УДК 539.3

ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕРЖНЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Р. Г. Якупов

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа
E-mail: imran@anrb.ru

Рассмотрены волновые процессы в полубесконечном стержне, находящемся в упругой среде, при воздействии сосредоточенной нагрузки, движущейся с постоянной скоростью. С использованием преобразования Лапласа по времени решена система двух дифференциальных уравнений движения теории балок Тимошенко. Полученные интегралы определены численно. Показано изменение изгибающего момента по продольной координате за фронтом упругих волн и областью действия сосредоточенной силы в различные моменты времени. Результаты решения представляют собой функции влияния.

Ключевые слова: стержень, сосредоточенная нагрузка, волны напряжения.

В данной работе проанализированы продольные и поперечные волны, которые возникают в полубесконечном стержне, находящемся в упругой среде, при действии сосредоточенной силы, движущейся с постоянной скоростью. В последнее время актуальное значение приобрела задача о распространении волн напряжений и деформаций в инженерных сооружениях большой протяженности.

Динамика строительных систем под воздействием движущихся нагрузок изучалась во многих работах, обзор которых содержится в [1–3]. Обычные уравнения движения теории изгиба дают приближенные решения волновой задачи для больших значений времени и соответствуют мгновенному распространению возмущений вдоль стержня [3]. В рассматриваемом случае уравнение движения запишем с учетом деформаций сдвига и инерции вращения [4]:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha W = p(x,t) - \rho F\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} - Q = \rho I\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$Q = k' GF\Big(\theta - \frac{\partial W}{\partial x}\Big), \qquad M = EJ_y\,\frac{\partial \theta}{\partial x}. \tag{2}$$

Здесь Q, M — поперечная сила и изгибающий момент; W — прогиб; $p(x,t)$ — внешняя сила; ρ, E, G — плотность, модули упругости и сдвига материала стержня; I — полярный момент инерции элемента; F, J_y — площадь поперечного сечения и осевой момент инерции; x — продольная координата, отсчитываемая от опорного устройства; t — время; k' — коэффициент формы поперечного сечения (для прямоугольного сечения $k' = 1{,}2$, для круглого $k' = 1{,}1$); α — коэффициент основания, определяемый по формуле [5]

$$\alpha = 0{,}12E_*(b/l_0)^{1/2}/(1-\mu_*^2);$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-97905).

b — ширина поперечного сечения стержня; l_0 — единичная длина. В случае стержня круглого сечения $b = D$ (D — диаметр стержня). Полный угол поворота равен

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \theta + \beta_* \tag{3}$$

(θ, β_* — углы поворота, обусловленного изгибающим моментом и поперечной силой соответственно). Подставляя (2) и (3) в систему (1), получим уравнения, записанные в перемещениях:

$$\begin{gathered} k'GF\Big(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big) + \rho F\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \alpha W = p(x,t), \\ EJ_y\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - k'GF\Big(\theta - \frac{\partial W}{\partial x}\Big) - \rho I\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Используя безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{r}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{r}, \quad w = \frac{W}{r}, \quad m = \frac{Mr}{EJ_y}$$

и вводя обозначения

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{k'G}{\rho}, \quad r^2 = \frac{J_y}{F}, \quad \gamma = \frac{c_1^2}{c_2^2},$$

разделим уравнение (4) на $k'GF$. В результате получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \gamma\,\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \zeta w = -\frac{rp(\xi,\tau)}{\rho F c_2^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} - \theta + \gamma\Big(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}\Big) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\zeta = r^2\alpha/(\rho F c_2^2)$; c_1, c_2 — скорости распространения волн изгиба и сдвига. Предполагается, что внешняя сила сосредоточенная и перемещается со скоростью V. Функцию давления запишем следующим образом:

$$p(\xi,\tau) = p_0\delta(x - Vt) = p_0\delta[r(\xi - \tau/\beta)].$$

Здесь $\beta = c_1/V$; δ — дельта-функция Дирака, определяемая условием

$$\int_a^b f(\xi)\delta(\xi - X)\,d\xi = f(X), \qquad a \leqslant X \leqslant b.$$

Для покоящегося стержня, когда сила p_0 еще не начала двигаться, начальные условия имеют вид

$$\tau = 0: \qquad w(\xi,0) = \theta(\xi,0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0.$$

К системе (5) применим преобразование Лапласа по времени

$$\begin{gathered} \frac{d^2\bar{w}}{d\xi^2} - (\gamma s^2 + \zeta)\bar{w} - \frac{d\bar{\theta}}{d\xi} = -\frac{p_0 r}{\rho F c_2^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\tau}\,\delta[r(\xi - \tau/\beta)]\,d\tau, \\ \frac{d\bar{w}}{d\xi} + \gamma\,\frac{d^2\bar{\theta}}{d\xi^2} - (\gamma s^2 + 1)\bar{\theta} = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

($\bar{w}$, $\bar{\theta}$ — изображения функций w и θ). В правой части первой формулы в (6) выполним замену переменной по формуле

$$z = r(\xi - r/\beta), \tag{7}$$

откуда находим

$$\tau = \beta(\xi - z/r), \qquad d\tau = -(\beta/r)\,dz. \tag{8}$$

Подставив (7) и (8) в подынтегральное выражение в правой части первого уравнения в (6), проведем интегрирование:

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-s\tau}\,\delta\Big[r\Big(\xi - \frac{\tau}{\beta}\Big)\Big]\,d\tau = -\frac{\beta}{r}\,\mathrm{e}^{-\beta s\tau}\,\mathrm{e}^{\beta sz}\,\big|_{z=0} = -\frac{\beta}{r}\,\mathrm{e}^{-\beta s\xi}.$$

В результате система (6) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{d^2\bar{w}}{d\xi^2} - (\gamma s^2 + \zeta)\bar{w} - \frac{d\bar{\theta}}{d\xi} = k\gamma\,\mathrm{e}^{-\beta s\xi},\\ \frac{d\bar{w}}{d\xi} + \gamma\,\frac{d^2\bar{\theta}}{d\xi^2} - (\gamma s^2 + 1)\bar{\theta} = 0,\end{gathered} \tag{9}$$

где $k = p_0/(\rho F V c_1)$.

Исключив $\bar{\theta}$ из (9), находим

$$\frac{d^4\bar{w}}{d\xi^4} - [(\gamma+1)s^2 + \zeta]\,\frac{d^2\bar{w}}{d\xi^2} + \Big[\gamma s^4 + (\zeta+1)s^2 + \frac{\zeta}{\gamma}\Big]\bar{w} = kf_2\,\mathrm{e}^{-\beta s\xi}. \tag{10}$$

Здесь $f_2 = (\beta^2 - 1)\gamma s^2 - 1$. Решение системы (9) имеет вид

$$\begin{gathered}\bar{w} = A_1\,\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi} + A_2\,\mathrm{e}^{-\lambda_2\xi} + D_1\,\mathrm{e}^{-\beta s\xi},\\ \bar{\theta} = (\lambda_1^2 - \gamma s^2 - \zeta)A_1\,\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}/(-\lambda_1) + (\lambda_2^2 - \gamma s^2 - \zeta)A_2\,\mathrm{e}^{-\lambda_2\xi}/(-\lambda_2) + D_2\,\mathrm{e}^{-\beta s\xi},\end{gathered} \tag{11}$$

где A_1, A_2 — постоянные интегрирования уравнения (10); $D_1 = kf_2/(b_1f_1)$; $D_2 = k\beta s/(b_1f_1)$; $f_1 = (s^2 - a_3^2)(s^2 - a_4^2)$; $a_{3,4} = [b_2 \pm (b_2^2 - 4b_1\zeta/\gamma)^{1/2}]/(2b_1)$; $b_1 = (\beta^2 - \gamma)(\beta^2 - 1)$; $b_2 = (\beta^2 - 1)\zeta - 1$; $\lambda_{1,2}$ — два (из четырех) корня характеристического уравнения

$$\lambda^4 - [(\gamma+1)s^2 + \zeta]\lambda^2 + [\gamma s^4 + (\zeta+1)s^2 + \zeta/\gamma] = 0,$$

удовлетворяющих условию затухания $\bar{w}$ и $\bar{\theta}$ на бесконечности:

$$\lambda_{1,2} = (1/\sqrt{2}\,)\big([(\gamma+1)s^2 + \zeta] \pm \{(\gamma-1)^2s^4 + 2[(\gamma-1)\zeta - 2]s^2 + \zeta(\zeta - 4/\gamma)\}^{1/2}\big)^{1/2}. \tag{12}$$

Представим (12) в виде

$$\lambda_{1,2}^2 = [(\gamma+1)s^2 + \zeta]/2 \pm f/a, \tag{13}$$

где $f = [(s^2 - a_1^2)(s^2 - a_2^2)]^{1/2}$; $a_{1,2}^2 = (a/2)\{(a - \zeta) \pm a[1 - (\gamma-1)\zeta/\gamma]^{1/2}\}$; $a = 2/(\gamma - 1)$. Функция $\lambda_1^2(s)$ аналитическая в плоскости интегрирования и не равна нулю. Следуя [6], умножим и разделим λ_2^2 на λ_1^2. После преобразований имеем

$$\lambda_2^2\lambda_1^2/\lambda_1^2 = \gamma(s^2 + \zeta/\gamma)(s^2 + 1/\gamma)/\lambda_1^2. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что точками ветвления λ_1 являются точки $s = \pm a_1$, $s = \pm ia_2$, а точками ветвления λ_2 — точки $s = \pm a_1$, $s = \pm ia_2$ и $s = \pm i(\zeta/\gamma)^{1/2}$, $s = \pm i(1/\gamma)^{1/2}$.

Рассмотрим два вида опорного устройства в начальном сечении: шарнирное закрепление и заделку. При шарнирном закреплении преобразованные граничные условия имеют вид

$$\xi = 0: \qquad \bar{w}(0,\tau) = \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\xi} = 0.$$

Постоянные интегрирования равны

$$A_1 = \frac{ka}{2f}\Big[\gamma + (\lambda_2^2 - \beta^2 s^2)\,\frac{f_2}{b_1 f_1}\Big], \qquad A_2 = -\frac{ka}{2f}\Big[\gamma + (\lambda_1^2 - \beta^2 s^2)\,\frac{f_2}{b_1 f_1}\Big].$$

В случае заделки на опоре углы поворота и сдвига равны нулю:

$$\xi = 0: \qquad \bar{\theta} = 0, \quad \frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi} - \bar{\theta} = 0,$$

а постоянные интегрирования равны

$$A_1 = \frac{ak\lambda_1\lambda_2^2}{2\beta f s}\Big[\frac{\gamma}{\gamma s^2 + \beta} + \frac{f_2}{b_1 f_1}\Big], \qquad A_2 = -\frac{ak\lambda_2\lambda_1^2}{2\beta f s}\Big[\frac{\gamma}{\gamma s^2 + \beta} + \frac{f_2}{b_1 f_1}\Big].$$

Изображение изгибающего момента определяется по формуле

$$\bar{m} = A_1^*\,\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi} + A_2^*\,\mathrm{e}^{-\lambda_2\xi} - D_3^*\,\mathrm{e}^{-\beta s\xi}, \tag{15}$$

где $A_1^* = (\lambda_1^2 - \gamma s^2 - \zeta)A_1$; $A_2^* = (\lambda_2^2 - \gamma s^2 - \zeta)A_2$; $D_3^* = k\beta^2 s^2/(b_1 f_1)$.

Формула обращения имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\,\mathrm{e}^{\tau s}\,ds = \begin{cases} f(\tau), & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Определим оригинал изгибающего момента в случае шарнирного закрепления при $V < c_2$. В соответствии с (15) запишем

$$m(\xi,\tau) = (I_1 + I_2 + I_3)/(2\pi i). \tag{16}$$

Здесь

$$I_1 = \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} A_2^*\,\mathrm{e}^{(\tau-\lambda_2\xi/s)s}\,ds, \qquad I_2 = \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} A_2^*\,\mathrm{e}^{(\tau-\lambda_1\xi/s)s}\,ds, \qquad I_3 = \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} D_3^*\,\mathrm{e}^{(\tau-\beta\xi)s}\,ds.$$

Подынтегральные выражения в (16) обладают следующим свойством:

$$s \to \infty: \qquad A_1^*(s) \to 0, \quad A_2^*(s) \to 0, \quad D_3^*(s) \to 0,$$

при этом λ_1 и λ_2 стремятся к постоянным значениям:

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\lambda_2}{s} = 1, \qquad \lim_{s\to\infty}\frac{\lambda_1}{s} = \sqrt{\gamma}.$$

В любой заданный момент времени τ интегралы I_1 и I_2 не равны нулю при $\xi < \tau$ и $\xi < \tau/\sqrt{\gamma}$ соответственно и равны нулю при $\xi > \tau$ и $\xi > \tau/\sqrt{\gamma}$ соответственно [6]. Аналогично $I_3 \neq 0$ в случае $\xi < \tau/\beta$ и $I_3 = 0$ в случае $\xi > \tau/\beta$. Область распространения возмущения разбивается фронтами волн изгиба и сдвига и сосредоточенной силой p_0 на три части. Координаты фронтов волн $\xi_1 = \tau$, $\xi_2 = \tau/\sqrt{\gamma}$, координата сосредоточенной силы $\xi_3 = \tau/\beta$. Вся область $0 < \xi < \xi_1$ охвачена волной изгиба, параметры волны определяются с помощью интеграла I_1, в интервале $0 < \xi < \xi_2$ присутствуют волны изгиба и сдвига, параметры волны сдвига определяются интегралом I_2. В области $0 < \xi < \xi_3$ в дополнение к деформациям изгиба и сдвига возникают деформации, обусловленные действием сосредоточенной силы, которые определяются интегралом I_3. В интервале $0 < \xi < \xi_3$ присутствуют все виды деформации.

Для удобства перехода к вещественным интегралам выражения для I_1 и I_2 представим в виде суммы

$$\frac{1}{2\pi i}\, I_1 = I_1' + I_1'', \qquad \frac{1}{2\pi i}\, I_2 = I_2' + I_2'',$$

где

$$I_1' = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{ka\gamma}{2f}\, (\lambda_2^2 - \gamma s^2 - \zeta)\, \mathrm{e}^{\tau s - \lambda_2 \xi}\, ds, \qquad \tau > \xi,$$

$$I_1'' = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{ka}{2b_1}\, \frac{[(\beta^2 - 1)\gamma s^2 - 1](\lambda_1^2 - \beta^2 s^2)(\lambda_2^2 - \gamma s^2 - \zeta)\, \mathrm{e}^{\tau s - \lambda_2 \xi}}{f f_1}\, ds, \qquad \xi < \tau < \sqrt{\gamma}\, \xi,$$

$$I_2' = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{ka\gamma}{2f}\, (\lambda_1^2 - \gamma s^2 - \zeta)\, \mathrm{e}^{\tau s - \lambda_1 \xi}\, ds, \qquad \sqrt{\gamma}\, \xi < \tau < \beta \xi,$$

$$I_2'' = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{ka}{2b_1}\, \frac{[(\beta^2 - 1)\gamma s^2 - 1](\lambda_2^2 - \beta^2 s^2)(\lambda_1^2 - \gamma s^2 - \zeta)\, \mathrm{e}^{\tau s - \lambda_1 \xi}}{f f_1}\, ds, \qquad \sqrt{\gamma}\, \xi < \tau < \beta \xi,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\, I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{k\beta^2 s^2}{b_1 f_1}\, \mathrm{e}^{(\tau - \beta\xi)s}\, ds, \qquad \tau > \beta\xi.$$

В интеграле I_1 подынтегральные функции имеют точки ветвления $s = \pm a_1$, $\pm i a_2$, $\pm i a_5$, $\pm i a_6$; в интеграле I_2 — точки ветвления $s = \pm a_1$, $\pm i a_2$. Помимо указанных точек ветвления функции в I_1'' и I_2'' имеют простые полюсы в точках $\pm i a_3$ и $\pm i a_4$.

Контурные интегралы преобразуем в вещественные. Контуры для интегрирования I_1 и I_2 представлены на рис. 1. Комплексные выражения в подынтегральных функциях вычислены с учетом ограничений на их аргументы в зависимости от пути интегрирования и приведены в таблице. Вычисления проводились по формуле

$$I = \sum \mathrm{res}\,(s) - \sum \int\limits_{\gamma_i},$$

где γ_i — пути интегрирования по берегам разреза и дуге окружности бесконечно малого радиуса. При стремлении радиуса окружности к нулю интегралы равны нулю. После вычислений находим

$$I_1' = \frac{ka\gamma}{2\pi} \int\limits_0^{a_1} \Big(\frac{\mathrm{e}^{-(\tau x + \eta_1 \xi)} [(R_1 - \gamma x^2 - \zeta) \cos(\eta_2 \xi) + R_2 \sin(\eta_2 \xi)]}{\sqrt{(a_1^2 - x^2)(a_2^2 + x^2)}} + {} \\ {} + \frac{\mathrm{e}^{\tau x - \eta_2 \xi} [(R_1 - \gamma x^2 - \zeta) \cos(\eta_1 \xi) + R_2 \sin(\eta_1 \xi)]}{\sqrt{(a_1^2 - x^2)(a_2^2 + x^2)}} \Big)\, dx,$$

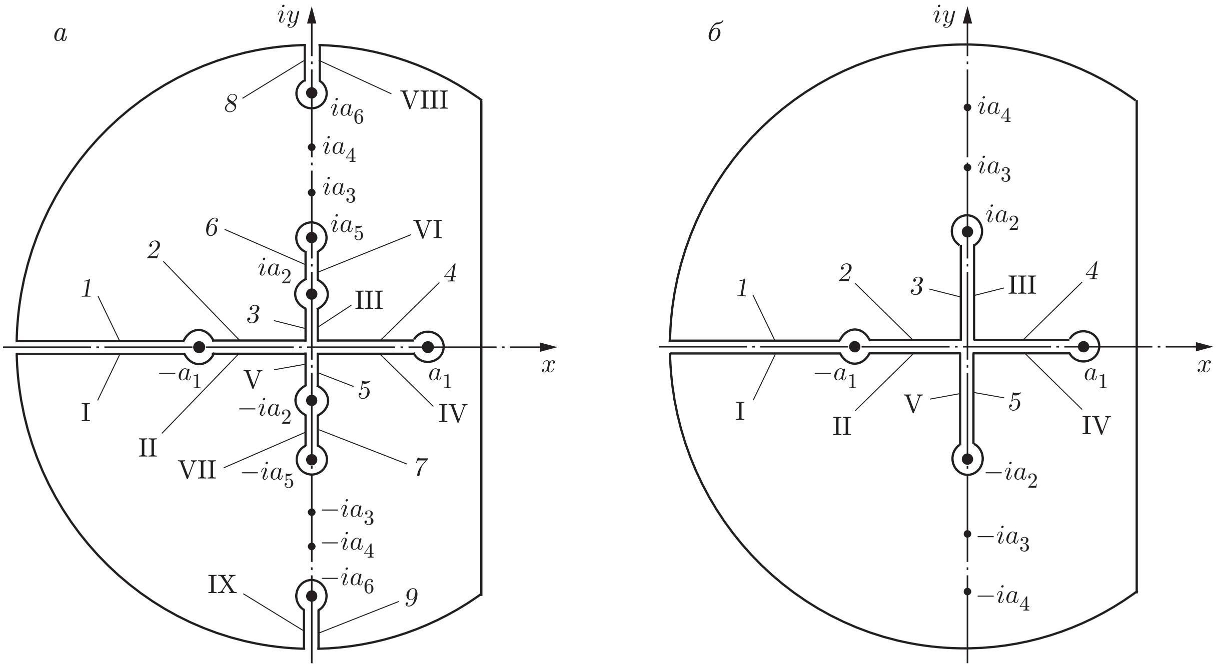

Рис. 1. Контуры интегрирования I_1 (a) и I_2 ($б$) по формуле (16):
1–9 и I–IX — противоположные берега пути интегрирования

$$I_1'' = \operatorname{res}(s)_1 - \frac{ka}{2\pi b_1}\int\limits_0^{a_1}\Big(\frac{\mathrm{e}^{-(\tau x+\eta_1\xi)}[(\beta^2-1)\gamma x^2-1][T_1\cos(\eta_2\xi)-T_2\sin(\eta_2\xi)]}{\sqrt{(a_1^2-x^2)(a_2^2+x^2)}\,(a_3^2+x^2)(a_4^2+x^2)} +$$

$$+\frac{\mathrm{e}^{\tau x-\eta_2\xi)}[(\beta^2-1)\gamma x^2-1][T_1\cos(\eta_1\xi)-T_2\sin(\eta_1\xi)]}{\sqrt{(a_1^2-x^2)(a_2^2+x^2)}\,(a_3^2+x^2)(a_4^2+x^2)}\Big)\,dx,$$

$$\operatorname{res}(s)_1 = \frac{ka}{2b_1}\Big(\frac{[(\beta^2-1)\gamma a_3^2+1](\bar R_1-\bar R_2+\beta^2a_3^2)(\bar R_1+\bar R_2+\gamma a_3^2-\zeta)\,\mathrm{e}^{-\eta_6\xi}\sin(a_3\tau)}{a_3(a_3^2-a_4^2)\sqrt{(a_3^2+a_1^2)(a_3^2-a_2^2)}} +$$

$$+\frac{[(\beta^2-1)\gamma a_4^2+1](\bar R_1-\bar R_2+\beta^2a_4^2)(\bar R_1+\bar R_2+\gamma a_4^2-\zeta)\,\mathrm{e}^{-\eta_6\xi}\sin(a_4\tau)}{a_4(a_4^2-a_3^2)\sqrt{(a_4^2+a_1^2)(a_4^2-a_2^2)}}\Big),$$

$$R_1 = [(\gamma+1)x^2+\zeta]/2, \quad R_2 = (\gamma+1)[|a_2^2-x^2|(a_2^2+x^2)]^{1/2}/2, \quad R = (R_1^2+R_2^2)^{1/2},$$

$$T_1 = (R_1-\beta^2x^2)(R_1-\gamma x^2-\zeta)+R_2^2, \quad T_2 = R_2[(\beta^2-\gamma)x^2-\zeta],$$

$$\bar R_1 = [\zeta-(\gamma+1)y^2]/2, \quad \bar R_2 = (\gamma-1)[(a_1^2+y^2)|a_2^2-y^2|]^{1/2}/2, \quad \bar R = (\bar R_1^2+\bar R_2^2)^{1/2},$$

$$\eta_{1,2} = [(R\mp R_1)/2]^{1/2}, \quad \eta_{3,4} = [(\bar R\pm\bar R_1)/2]^{1/2}, \quad \eta_{5,6} = |\bar R_1\mp\bar R_2|^{1/2}.$$

Величины $\bar R_1$, $\bar R_2$ и η_6 в первом слагаемом выражения для $\operatorname{res}(s)_1$ определяются при $y = a_3$, во втором слагаемом — при $y = a_4$.

Комплексные величины в выражениях интегралов I_1 и I_2

Путь интегрирования	s	s^2	$s+a_1$	$s-a_1$	$\dfrac{\sqrt{s+a_1}}{\sqrt{s-a_1}}$	$s+ia_2$
$\dfrac{1}{\mathrm{I}}$	$\lvert x\rvert\,\mathrm{e}^{\pm i\pi}$	x^2	$(x+a_1)\,\mathrm{e}^{\pm i\pi}$	$(x-a_1)\,\mathrm{e}^{\pm i\pi}$	$-\sqrt{x^2-a_1^2}$	$\sqrt{a_2^2+x^2}\,\mathrm{e}^{i(\pi-\alpha)}$
$\dfrac{2}{\mathrm{II}}$	$\lvert x\rvert\,\mathrm{e}^{\pm i\pi}$	x^2	$(a_1-x)\,\mathrm{e}^{\pm i\pi}$	$(a_1-x)\,\mathrm{e}^{\pm i\pi}$	$\pm i\sqrt{a_1^2-x^2}$	$\sqrt{a_2^2+x^2}\,\mathrm{e}^{i(\pi-\alpha)}$
$\dfrac{4}{\mathrm{IV}}$	x	x^2	$(a_1-x)\,\mathrm{e}^{\pm i\pi}$	$(a_1-x)\,\mathrm{e}^{\pm i\pi}$	$\pm i\sqrt{a_1^2-x^2}$	$\sqrt{a_2^2+x^2}\,\mathrm{e}^{i\alpha}$
$\dfrac{3}{\mathrm{III}}$	iy	$-y^2$	$\sqrt{a_1^2+y^2}\,\dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{\mathrm{e}^{i(\pi-\alpha)}}$	$\sqrt{a_1^2+y^2}\,\dfrac{\mathrm{e}^{i(\pi-\alpha)}}{\mathrm{e}^{i\alpha}}$	$i\sqrt{a_1^2+y^2}$	$(a_2+y)\,\mathrm{e}^{i\pi/2}$
$\dfrac{5}{\mathrm{V}}$	$-iy$	$-y^2$	$\sqrt{a_1^2+y^2}\,\mathrm{e}^{-i\alpha}$	$\sqrt{a_1^2+y^2}\,\mathrm{e}^{-i(\pi-\alpha)}$	$-i\sqrt{a_1^2+y^2}$	$(a_2+y)\,\mathrm{e}^{-i\pi/2}$
$\dfrac{6,\ \mathrm{VI}}{7,\ \mathrm{VII}}$	$\pm iy$	$-y^2$	$\sqrt{a_1^2+y^2}\,\dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{\mathrm{e}^{-i\alpha}}$	$\sqrt{a_1^2+y^2}\,\mathrm{e}^{\pm i(\pi-\alpha)}$	$\pm i\sqrt{a_1^2+y^2}$	$(y\pm a_2)\,\mathrm{e}^{\pm i\pi/2}$

Примечание. Арабские и римские цифры соответствуют отрезкам контура интегрирования

Для I_2 имеют место соотношения

$$I_2' = -I_1', \qquad I_2'' = -(I_2' - \operatorname{res}(s)_1) + \operatorname{res}(s)_2,$$

$$\operatorname{res}(s)_2 = \frac{ka}{2b_1}\Big(\frac{T_3[(\beta^2-1)\gamma a_3^2+1]\sin(a_3\tau)\cos(\eta_5\xi)}{a_3(a_4^2-a_3^2)\sqrt{(a_3^2+a_1^2)(a_3^2-a_2^2)}} + {} \\ {}+ \frac{T_3[(\beta^2-1)\gamma a_4^2+1]\sin(a_4\tau)\cos(\eta_5\xi)}{a_4(a_3^2-a_4^2)\sqrt{(a_4^2+a_1^2)(a_4^2-a_2^2)}}\Big),$$

$$T_3 = (\bar R_1 + \bar R_2 + \beta^2 y^2)(\bar R_1 - \bar R_2 + \gamma y^2 - \zeta).$$

Величины $\bar R_1$, $\bar R_2$ и η_5, T_3 в первом слагаемом выражения для $\operatorname{res}(s)_2$ определяются при $y = a_3$, во втором слагаемом — при $y = a_4$.

Интеграл I_3 имеет простые полюсы в точках $\pm ia_3$, $\pm ia_4$ и равен сумме вычетов в полюсах:

$$\frac{1}{2\pi i}\, I_3 = \operatorname{res}(s)_3, \qquad \tau > \beta\xi.$$

Здесь

$$\operatorname{res}(s)_3 = \frac{k}{b_1(a_4^2-a_3^2)}\,[\beta^2 a_4 \sin((\tau-\beta\xi)a_4) - \beta^2 a_3 \sin((\tau-\beta\xi)a_3)].$$

Интегралы по отрезкам контура интегрирования, обозначенным цифрами 1 и I, и по всем берегам разреза вдоль мнимой оси взаимно уничтожаются.

для различных путей интегрирования

$s-ia_2$	$\sqrt{s+ia_2}\times\sqrt{s-ia_2}$	f	$\lambda^2_{1,2}$	$\lambda_{1,2}$	Интервал изменения x, y
$\sqrt{a_2^2+x^2}\,\mathrm{e}^{-i(\pi-\alpha)}$	$\sqrt{a_2^2+x^2}$	$-\sqrt{x^2-a_1^2}\times\sqrt{x^2+a_2^2}$	$R_1\mp R_2$	$\sqrt{R_1\mp R_2}$	$x<-a_1$
$\sqrt{a_2^2+x^2}\,\mathrm{e}^{-i(\pi-\alpha)}$	$\sqrt{a_2^2+x^2}$	$\pm i\sqrt{a_1^2-x^2}\times\sqrt{a_2^2+x^2}$	$\dfrac{R_1\pm R_2}{R_1\mp R_2}$	$\dfrac{\eta_1\pm i\eta_2}{\eta_1\mp i\eta_2}$	$-a_1<x<0$
$\sqrt{a_2^2+x^2}\,\mathrm{e}^{-i\alpha}$	$\sqrt{a_2^2+x^2}$	$\pm i\sqrt{a_1^2-x^2}\times\sqrt{a_2^2+x^2}$	$\dfrac{R_1\pm R_2}{R_1\mp R_2}$	$\dfrac{\eta_2\pm i\eta_1}{\eta_2\mp i\eta_1}$	$0\leqslant x\leqslant a_1$
$(a_2-y)\,\mathrm{e}^{-i\pi/2}$	$\sqrt{a_2^2-y^2}$	$i\sqrt{a_1^2+y^2}\times\sqrt{a_2^2-y^2}$	$\bar R_1\pm i\bar R_2$	$\eta_3\pm i\eta_4$	$0\leqslant y\leqslant a_2$
$(a_2-y)\,\mathrm{e}^{i\pi/2}$	$\sqrt{a_2^2-y^2}$	$-i\sqrt{a_1^2+y^2}\times\sqrt{a_2^2-y^2}$	$\bar R_1\mp i\bar R_2$	$\eta_3\mp i\eta_4$	$-a_2\leqslant y\leqslant 0$
$(y\mp a_2)\,\mathrm{e}^{\pm i\pi/2}$	$\pm i\sqrt{y^2-a_2^2}$	$-\sqrt{y^2+a_1^2}\times\sqrt{y^2-a_2^2}$	$\bar R_1\mp\bar R_2$	$\lambda_1=i\eta_5$ $\lambda_2=\eta_6$	$y<-a_2$

на рис. 1.

В частном случае $V=c_2$ в (11) следует принять

$$D_1=k[(\gamma-1)\gamma s^2-1]/[b_3(s^2+a_7^2)],\qquad D_2=k\sqrt{\gamma}\,s/[b_3(s^2+a_7^2)],$$

где $b_3=1-(\gamma-1)\xi$; $a_7^2=\zeta/(b_3\gamma)$. В случае шарнирного закрепления выражения для изгибающего момента имеют вид

$$m(\xi,\tau)=(I_1+I_2+I_3)/(2\pi i),\qquad \tau>\sqrt{\gamma}\xi.$$

Здесь

$$I_1=-\frac{ka}{2}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Big[\frac{\gamma}{f}+(\lambda_1^2-\gamma s^2)\frac{F_1}{F_2}\Big]F_3\,\mathrm{e}^{\tau s-\lambda_2\xi}\,ds,$$

$$I_2=\frac{ka}{2}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Big[\frac{\gamma F_5}{f}+(\lambda_2^2-\gamma s^2)\,\frac{F_1F_4}{F_2}\Big]\,\mathrm{e}^{\tau s-\lambda_1\xi}\,ds,$$

$F_1=(\gamma-1)\gamma s^2-1$, $F_2=fb_3(s^2+a_7^2)$, $F_3=\lambda_2^2-\gamma s^2-\zeta$, $F_4=\lambda_1^2-\gamma s^2-\zeta$, $F_5=\lambda_1^2-\gamma s^2-1$,

$$I_3=k\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\gamma s^2}{b_3(s^2+a_7^2)}\,\mathrm{e}^{(\tau-\sqrt{\gamma}\xi)s}\,ds.$$

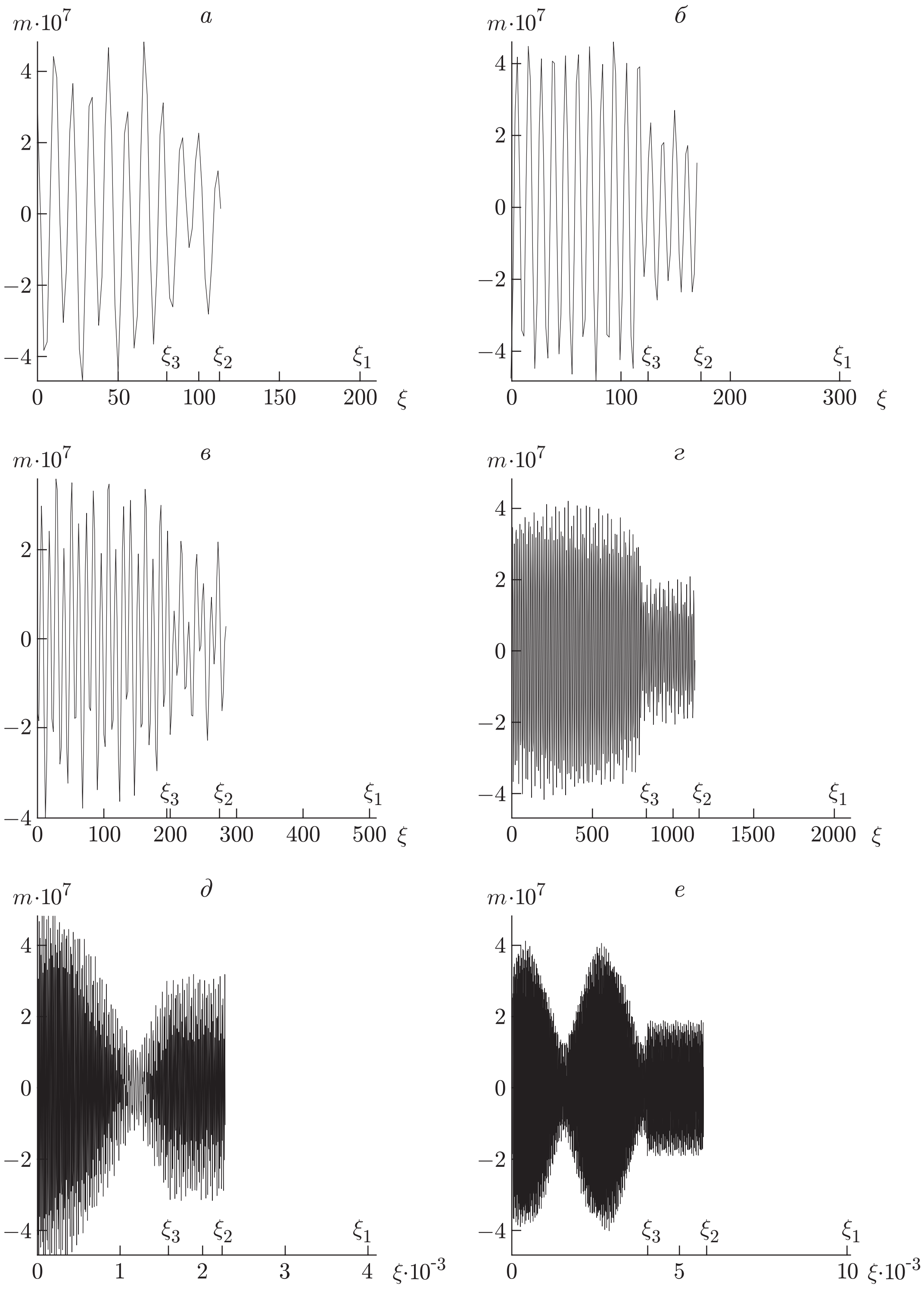

Рис. 2. Распределение изгибающего момента вдоль стержня при $V < c_2$:
а — $\tau = 200$; *б* — $\tau = 300$; *в* — $\tau = 500$; *г* — $\tau = 2000$; *д* — $\tau = 4000$; *е* — $\tau = 10\,000$

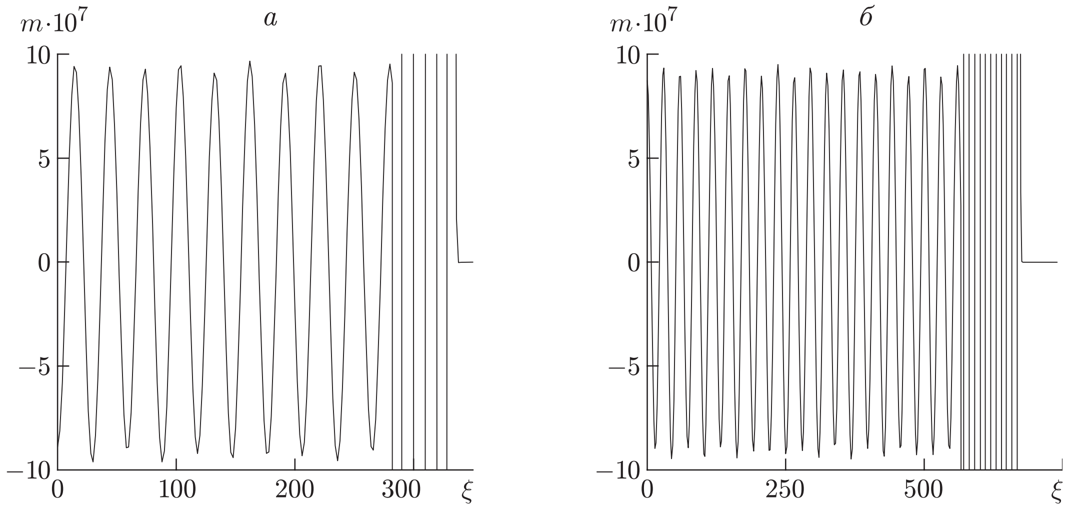

Рис. 3. Распределение изгибающего момента вдоль стержня при $V = c_2$:
а — $\tau = 500$; *б* — $\tau = 1000$

Рассмотрим численный пример. Считаем, что $p_0 = 10$ кН/м, сечение балки прямоугольное, $b = h = 0{,}1$ м, $F = b \times h$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 8$ т/м^3, $c_1 = 5 \cdot 10^3$ м/с, $c_2 = 2{,}84 \cdot 10^3$ м/с, $V = 2 \cdot 10^3$ м/с, $\zeta = 1{,}35 \cdot 10^{-2}$, $\gamma = 3{,}1$, $\beta = 2{,}5$, $k = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$, $a = 0{,}95$, $a_1 = 0{,}94$, $a_2 = 0{,}051$, $a_3 = 0{,}072$, $a_4 = 0{,}225$, $a_5 = 0{,}066$, $a_6 = 0{,}568$, $a_7 = 0{,}067$, $b_1 = 16{,}6$, $b_2 = -0{,}929$, $b_3 = 0{,}972$. Расчеты проводились по формулам

$$m(\xi,\tau) = \begin{cases} I_1' + I_1'', & \xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_1, \\ \operatorname{res}(s)_1 + \operatorname{res}(s)_2, & \xi_3 \leqslant \xi \leqslant \xi_2, \\ \operatorname{res}(s)_1 + \operatorname{res}(s)_2 + \operatorname{res}(s)_3, & 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_3. \end{cases}$$

Подынтегральные функции в интегралах I_1' и I_1'' являются осциллирующими и в точке $x = a_1$ имеют бесконечный разрыв, поэтому при интегрировании по x обеспечивалось не менее 10 шагов в пределах длины полуволны, верхний предел принимался в виде $a_1(1-\delta)$, где $\delta = 10^{-15}$. Таким образом определены главные значения несобственных интегралов. Вычисления проводились по методу трапеций.

По результатам расчетов построены графики зависимости $m(\xi)$ в различные моменты времени (рис. 2, 3). Для наблюдателя, находящегося в фиксированной точке стержня, графики представляют собой осциллограммы изгибающего момента.

Из приведенных данных следует, что в зоне возмущения движение стержня имеет сложный колебательный характер. При $V < c_2$ частота колебаний $f = 9$ кГц, в частном случае $V = c_2$ $f = 3{,}4$ кГц. Амплитуда волны изгиба на два порядка меньше амплитуды волны сдвига и в данном масштабе неразличима. Напряжения на волне сдвига и за нагрузкой равны 0,86 и 1,52 МПа соответственно.

Перед фронтом волны сдвига происходит всплеск амплитуды изгибающего момента m, который перемещается со скоростью c_2. Скачкообразное увеличение амплитуды обусловлено предположением о сосредоточенности нагрузки [2]. По мере продвижения нагрузки вдоль стержня величина скачка амплитуды, длина участка стержня, где происходит всплеск амплитуды, а следовательно, и число колебаний увеличиваются. В результате каждая частица материала стержня подвергается действию изгибающего момента, возрастающего со временем.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Якушев Н. З.** Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок. 1. Балки, стержни и арки под действием подвижных нагрузок // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1972. Вып. 8. С. 3–42.
2. **Флоренс А. Л.** Воздействие движущейся силы на стержень Тимошенко // Прикл. механика. 1965. № 2. С. 108–116.
3. **Уфлянд Я. С.** Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12, вып. 6. С. 287–300.
4. **Тимошенко С. П.** Теория колебаний в инженерном деле. М.: Наука, 1967.
5. **Айнбиндер А. Б.** Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость / А. Б. Айнбиндер, А. Г. Камерштейн. М.: Недра, 1982.
6. **Boley B. A., Chao C. C.** Some solutions of the Timoshenko beam equations // Trans. ASME. 1955. V. 77. P. 579–586.

Поступила в редакцию 8/VI 2006 г.