

УДК 532.135

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУЙНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

А.В. СОЛДАТКИН, А.П. АНДРИЕВСКИЙ

Полоцкий государственный университет, Новополоцк

В рамках теории пограничного слоя рассмотрено развитие неавтономной затопленной струи неньютоновской реагирующей жидкости. На основе метода локального подобия получены аналитические выражения изменения интегральных параметров струйного течения вдоль ее оси, удовлетворительно согласующиеся с численным решением неавтономной задачи.

Струйные течения находят широкое применение в различных химических технологиях, а также в экологии [1, 2]. При проектировании струйных установок желательно иметь адекватную модель течения и результаты расчетов на ее основе во всей зоне смешения реагентов.

При оценке распространения загрязнений в окружающей среде, да и в значительной части химических технологий прикладного характера целесообразнее использовать реологическую модель Оствальда-де Виля [3], которая надежно зарекомендовала себя в инженерных разработках. В этой модели касательное напряжение аппроксимируется выражением $m|\partial u/\partial y|^{N-1} \cdot \partial u/\partial y$, где m — мера консистентности смеси, N — показатель неньютоновости смеси ($N = 1$ — это ньютоновская жидкость, например, вода; $N > 1$ — концентрированная суспензия, в пределе по концентрации получается стержневое течение; $N < 1$ — псевдопластическая жидкость, частным и распространенным примером которой являются полимеры).

Развитие плоской струи инертной неньютоновской жидкости в автономной области рассмотрено в статье [3]. Развитие неавтономной плоской струи инертной неньютоновской жидкости во всей зоне развития изучено в [4].

В настоящей статье приведен комплексный анализ реагирующей струи неньютоновской жидкости во всей зоне ее распространения.

Уравнения переноса импульса, неразрывности конвективной диффузии реагента в недостатке энергии в рамках теории пограничного слоя имеют вид:

$$u(\partial u/\partial x) + v(\partial u/\partial y) = m(\partial/\partial y)\left(|\partial u/\partial y|^{N-1} \cdot \partial u/\partial y\right),$$
$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0,$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right) - \frac{W}{\rho}, \quad W = k_0 \exp\left(\frac{-E}{RT}\right), \quad (1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{QW}{\rho}, \quad D = D_{01} \exp\left(\frac{-E_1}{RT}\right).$$

Краевые условия задачи:

$$\left. \begin{aligned} u = u_0, \quad T = T_0, \quad C = C_0, \quad |y| \leq d/2, \quad x = 0, \\ \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \quad y = 0 \\ u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad C \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} x > 0. \end{aligned}$$

В случае применения метода локального подобия используются интегральные условия:

$$I_0 = \rho du_0^2, \quad F_0 = \rho du_0 \Delta T_0, \quad M_0 = \rho du_0 C_0,$$

где x, y — продольная и поперечная координаты, u, v — продольная и поперечная компоненты скорости смеси, T — температура смеси, m, N — параметры реологической модели, a — коэффициент температуропроводности, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, ρ — плотность смеси, C — концентрация реагента в недостатке, k_0, E — предэкспонент и энергия активации; R — газовая постоянная; D_{01}, E_1 — постоянные диффузионной модели, I — импульс струи смеси, F, M — потоки энергии и массового расхода соответственно, d — ширина щели. Индекс “0” соответствует величинам на срезе сопла.

Численный анализ задачи проводился при замене переменных, которая преобразует бесконечную область в конечную полосу (см. также [5, 6]):

$$\xi = x, \quad \eta = \int_{-y}^y u^2 dy.$$

Данная замена позволяет осуществлять численное интегрирование методом Рунге — Кутты при автоматическом контроле счета. Помимо этого важного обстоятельства следует отметить, что наличие инварианта позволяет разделить динамическую задачу на две, которые сводятся к решению дифференциального уравнения в частных производных для продольной скорости и интегрального уравнения — для поперечной скорости. Последнее решалось методом трапеций. Что касается параболического уравнения для u , то полубесконечная полоса разбивалась на P полос (в расчетах величина P варьировалась от 15 до 40; результаты при P равном 20 и 40 различались в пределах 5 %). Система из $P - 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений решалась маршевым методом Рунге — Кутты 4-го порядка точности с автоматическим выбором сеточного шага.

Преимущества предлагаемого метода заключаются в следующем. Во-первых, замена переменных позволяет естественно разделить динамическую задачу на основе физического инварианта — сохранения импульса струи. Во-вторых, в данном случае не возникает трудности, связанной с использованием функции тока для тождественного удовлетворения уравнений неразрывности при задании краевых условий на сложных границах расчетной области. Помимо этого, как отмечалось ранее, метод позволяет осуществить автоматический контроль счета. Несмотря на использование явного метода (Рунге — Кутты), расчет одного варианта длится

порядка десяти секунд; проблем с устойчивостью решения не возникает при удовлетворении условия Куранта — Фридрихса. Кроме того, следует отметить, что в новых переменных уравнение для продольной скорости относится к параболическим уравнениям типа теплопроводности с ее нелинейным коэффициентом; устойчивость численного решения уравнения сохраняется даже в “жестких” условиях (с учетом химических реакций).

Трудности, возникающие при решении задачи из-за реологической модели при $N < 1$ на оси струи в преобразованных переменных и при $u = 0$, в работе устраняются разложением функции u по η около соответствующей точки и, используя конечные разности по η внутрь области интегрирования, соответственно при $\eta = 0$ и 1 .

В новых переменных задача записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \left[(2N-1) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + N \cdot u \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right] u^{2N} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^{N-1}, \\ v &= -N \int_0^\eta u \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left[u^2 \frac{\partial u}{\partial \eta_1} \right] u^{2N-4} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^{N-1} d\eta_1, \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial \xi} &= \frac{u^3}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial \eta^2} + 2 \frac{u^2}{\text{Pr}} \frac{\partial \Delta T}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} - u^{2N} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^{N-1} \frac{\partial \Delta T}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta_0 Da \psi, \\ \frac{\partial C}{\partial \xi} &= \frac{u^2}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Du \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) - u^{2N} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^{N-1} \frac{\partial \Delta T}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} - Da \psi, \\ \psi &= (C/u) \exp(\Delta T/1 + \Theta \Delta T), \\ \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \Delta T}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0; \quad u = C = 0; \quad \Delta T = 0, \quad \eta = 1 \end{aligned} \right\} \xi > 0, \\ \left. \begin{aligned} u &= C = 0; \quad \Delta T = 0, \quad \eta = 1 \\ u &= 1, \quad C = 1; \quad \Delta T = 1, \quad 0 \leq \eta < 1 \end{aligned} \right\} \xi = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

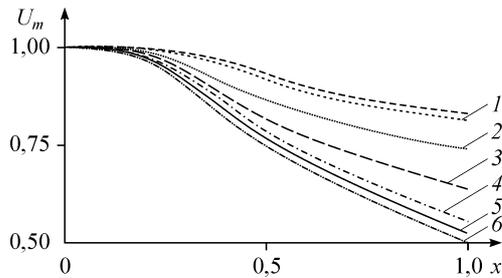
Величины в (2) безразмерны. В качестве характерных величин использованы начальная скорость и ширина щели, температура и концентрация реагента в недостатке в начальном сечении струи:

$$u = \frac{u^*}{u_0}, \quad v = \frac{v^*}{u_0 \text{Re}}, \quad x = \frac{x^*}{d \text{Re}}, \quad y = \frac{y^*}{d}, \quad T = \frac{T^*}{T_0}, \quad C = \frac{C^*}{C_0}.$$

Некоторые результаты расчета приведены на рис. 1–3.

Изменения скорости течения и толщины струи неньютоновской жидкости вдоль ее оси определяются взаимодействием гидродинамического и реологического механизмов во всем поле течения. Характер этого взаимодействия в значительной мере определяется структурой реальной смеси: смешение концентрированной суспензии ($N > 1$,

Рис. 1. Изменение осевой скорости вдоль оси струи при разных показателях неньютоновости течения. $N = 1$ (1), 0,75 (2), 1,5 (3), 2 (4), 0,5 (5), 0,25 (6); пунктир — аналитическое решение.



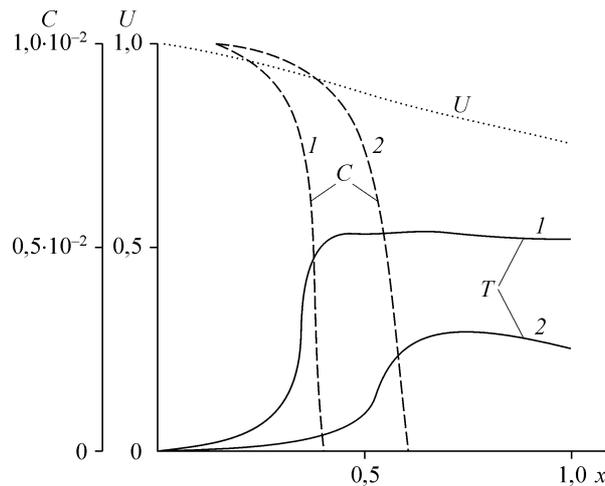


Рис. 2. Изменение осевых температуры и концентрации реагента в недостатке при разных значениях теплового эффекта реакции.

$$N = 1,5; Pr = 6,7; Da = 0,05; \Theta = 0,07; \beta_0 = 50 (1), 25 (2).$$

рис. 1) принципиально отличается от смешения полимеров ($N < 1$, рис. 1). В случае течения концентрированной суспензии ($N = 1,5$, кривая 2, $N = 2$, кривая 1, см. рис. 1) скорость струи уменьшается в меньшей степени по сравнению с течением ньютоновской жидкости ($N = 1$, кривая 3, см. рис. 1), а толщина струи растет в меньшей степени. При увеличении концентрации частиц ($N > 1$) течение приобретает вид стержневого. Течение полимеров в плоской струе ($N = 0,75$ кривая 4, $N = 0,5$ кривая 5, $N = 0,25$ кривая 6, см. рис. 1) характеризуется иной тенденцией: его скорость на оси струи уменьшается быстрее, чем в случае ньютоновской жидкости, а струя расширяется в большей степени — эффект ее разбухания.

На рис. 2 показаны изменения температуры и массы реагента в недостатке вдоль оси струи во всей области ее развития. При более высоком тепловыделении в жидкости (кривая 1) путь превращения реагента в струе оказывается короче, а температура выше и быстрее достигает максимальных значений.

На рис. 3 показаны профили концентрации реагента в случаях: 1 — $x = 0,4$, 2 — $x = 0,5$ (a); 3 — $x = 0,6$, 4 — $x = 0,7$, 5 — $x = 0,8$ (b). Следует отметить смещение к кромке максимума концентрации в поперечном сечении струи с увеличением расстояния от ее истока. Это связано с тем, что зона смешения удаляется от оси по мере расширения струи. Данное обстоятельство подчеркивает важность струйного течения как гидродинамического механизма смешения реагентов в химических реакторах.

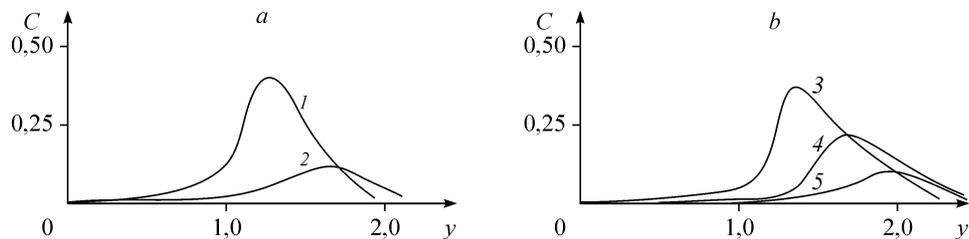


Рис. 3. Профили концентрации реагента по мере удаления от сопла струи ($N = 1,5; Pr = 6,7; Sc = 6,7, Da = 0,05; \Theta = 0,07$).

$$a — x = 0,4 (1); 0,5 (2); b — x = 0,6 (3), 0,7 (4), 0,8 (5).$$

Для нахождения изменения масштабных величин струйного течения (осевых скорости, температуры, и концентрации реагента в недостатке) вдоль оси струи был использован метод локального подобия (МЛП) [6]:

Подстановка преобразований подобия:

$$u = u_m(x) f'(\varphi), \quad T = T_m(x) \psi(\varphi), \quad C = C_m(x) \zeta(\varphi), \quad \varphi = \frac{y}{\delta(x)}, \quad (3)$$

где индекс m указывает, что величина берется на оси струи, φ — переменная подобия, в исходную систему уравнений (1) производится с учетом следующих выражений для частных производных:

$$\begin{aligned} \partial u / \partial x &= u'_m f' - (u_m / \delta) f'' \varphi \delta', \\ \partial / \partial y &= (1 / \delta) \partial / \partial \varphi, \quad \partial^2 / \partial y^2 = (1 / \delta^2) \partial^2 / \partial \varphi^2, \\ \partial T / \partial x &= T'_m \psi - (T_m / \delta) \psi' \varphi \delta', \\ \partial C / \partial x &= C'_m \zeta - (C_m / \delta) \zeta' \varphi \delta'. \end{aligned} \quad (4)$$

В результате уравнение неразрывности приводится к виду

$$v = u_m \delta' f' \varphi - (u \delta)' f,$$

а уравнение изменения количества импульса в продольном направлении к виду

$$\left(|f''|^{N-1} f'' \right)' + \frac{(u_m^{2-N} \delta^{N+1})'}{3Tm} (f'^2 + ff'') = 0. \quad (5)$$

Соотношение (5) при поиске автомодельного решения разделяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(|f''|^{N-1} f'' \right)' + 1/3N (f'^2 + ff'') &= 0, \\ u_m^{2-N} \delta^{N+1} &= mx. \end{aligned} \quad (6)$$

Первое уравнение системы (6) позволяет определить профиль скорости, а второе, совместно с выражением для импульса струи, — изменения масштабных величин вдоль оси струи:

$$\begin{aligned} u_m^{2-N} \delta^{N+1} &= mx, \\ u_m^2 \delta &= I_0 / \gamma_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение системы (7) с учетом введения понятия полюсного расстояния приводит к аналитическим выражениям для масштабных величин (скорости на оси струи и толщины струи):

$$\begin{aligned} B &= \alpha^{-(1+N/3N)}, \quad C_1 = \alpha^{2-N/3N}, \quad \alpha = 9N/n, \\ u_m &= Bx^{-\frac{1}{3N}} (1 + \gamma/x)^{-1/3N}, \\ \delta &= x^{-\frac{1}{3N}} C_1 (1 + \gamma/x)^{2/3N}, \quad \gamma = \gamma_0 / N^{2,2}, \quad \gamma_0 = 0,05, \\ n &= n_0 \exp(-1/N), \quad n_0 = 8,3. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь использовано понятие полюсного расстояния γ , выраженное через массовый расход жидкости на срезе сопла струи [7],

$$\gamma = M_0^3 a^{N-1} / 36 \mu_0^{N-1} I_0.$$

Аналогичная процедура применительно к уравнениям переноса тепла и массы позволяет также получать обыкновенные дифференциальные уравнения, которые описывают изменения этих величин вдоль оси плоской струи при тепловыделении в ходе химической реакции:

$$\begin{aligned} F'_x &= a_2 (\beta_0 Da / 2\lambda_1) G \exp(F/\eta^* + \beta_0 F) x^{1/3N}, \\ G'_x &= -a_2 (\beta_0 Da / 2\lambda_1) G \exp(F/\eta^* + \beta_0 F) x^{1/3N}, \\ \eta^* &= \alpha^{1-2N/3N} x^{1/3N}. \end{aligned} \quad (9)$$

Что касается констант в (8), то они были определены на основе сопряжения с численным решением.

Выражения (8) позволяют описать развитие струйного течения в ближней зоне при удовлетворительном согласовании с численным решением.

Важной характеристикой тепломассопереноса в струйных течениях при реакциях с внезапным началом является путь воспламенения x_B (аналог периода индукции в теории теплового взрыва (ТТВ)).

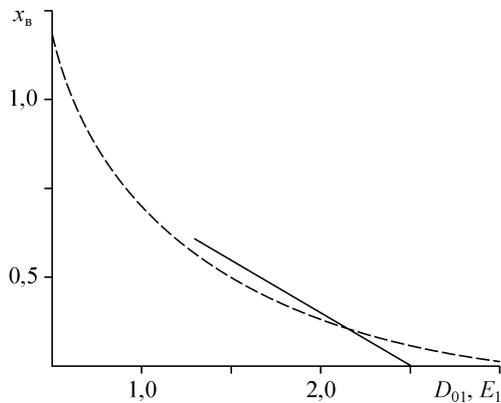
Используя двухзонное разбиение (Зельдович, Франк — Каменецкий) области течения получаем аналитическое выражение пути воспламенения x_B .

Применяя асимптотику ТТВ для реакций с внезапным началом, можно проинтегрировать уравнение энергии (9) и получить выражение для пути воспламенения

$$x_B = \left[2\lambda_1 (3N+1) / 3Na_2 \beta_0 Da \exp(F/\eta^*) x^{1/3N} + \gamma^{3N+1/3N} \right]^{3N/3N+1}. \quad (10)$$

На рис. 4 приведена зависимость пути воспламенения от параметров (в частности, Da), характеризующих скорость реакции в струе: чем больше тепловой эффект реакции, тем короче путь воспламенения и наоборот. Также показано удовлетворительное соответствие с численным расчетом.

В заключение отметим, что полученные аналитические выражения для параметров струйного течения ньютоновской жидкости, удовлетворительно согласующиеся с численным расчетом, вполне пригодны при анализе тепловых режимов реальных течений, моделируемых системой уравнений (1), например, применительно к струйному течению полимеров или распространению загрязнений или примесей от источника. Подобные расчеты позволяют разработать методику оценки загрязнений и выбрать достоверные нормативы характеристик качества среды.



применительно к струйному течению полимеров или распространению загрязнений или примесей от источника. Подобные расчеты позволяют разработать методику оценки загрязнений и выбрать достоверные нормативы характеристик качества среды.

Рис. 4. Зависимость пути воспламенения от режимных параметров: (сплошная линия — расчет, пунктир — аналитическое решение; $F(0) = 0,4$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы расчета турбулентных течений / Под ред. В. Кольмана. — М.: Мир, 1984. — 464 с.
2. Вулис Л.А., Ярин Л.П. Аэродинамика факела. — Л.: Энергия, 1978. — 165 с.
3. Павлов К.Б. // ПМТФ. — 1979. № 1. — С. 79–82.
4. Солдаткин Ал.В., Солдаткин Ан.В. Неавтомодельная струя неньютоновской жидкости // ПМТФ. — 1991. — С. 42–44.
5. Белоглазов Б.П., Гиневский А.С. // Уч. Зап. ЦАГИ. — 1974. — Т. 5, № 4. — С. 1–16.
6. Солдаткин А.В. // Инж.-физ. журн. — 1983. — Т. 45, № 6. — С. 951–954.
7. Мартыненко О.Г., Соковишин Ю.А., Коровкин В.Н. Теория ламинарных вязких струй. — Минск: Наука и техника, 1985. — 286 с.

Статья поступила в редакцию 15 апреля 2004 г.