

УДК 533 + 517.9

## О ПЛОСКИХ ГАЗОВЫХ ВИХРЯХ И ЗАКРУЧЕННЫХ СТРУЯХ ГАЗА

А. П. Чупахин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru

Изучается инвариантное решение ранга один уравнений движения политропного газа, описывающее плоские газовые вихри и закрученные струи газа. Выполнена классификация типов течения в зависимости от управляющего параметра: вихри в виде источников и стоков, неограниченный разлет и коллапс.

Ключевые слова: инвариантное решение, плоские газовые вихри, закрученная струя газа, аналитическое описание течения.

**1. Описание подмодели.** Уравнения динамики политропного газа допускают алгебру Ли симметрии  $L_{13}$  [1]. В [2] построена оптимальная система подалгебр  $\Theta L_{13}$  алгебры  $L_{13}$ , в [3, 4] приведено описание всех подмоделей динамики политропного газа, допускающих трехмерные алгебры симметрии. Описание 37 из этих подмоделей, задающих инвариантные решения ранга один и имеющих нормализатор большой размерности, представлено в [5]. Для большинства этих моделей фактор-системы либо интегрируются в конечном виде, либо сводятся к конечным формулам и одному неявному обыкновенному дифференциальному уравнению.

В данной работе исследуется одна из указанных подмоделей, интегрирование уравнений которой происходит по более сложной схеме.

Рассмотрим трехмерную подалгебру

$$L_{3.56} = \langle \partial_x, \partial_t, t \partial_t + \mathbf{x} \cdot \partial_{\mathbf{x}} + a(\rho \partial_\rho + p \partial_p) \rangle \quad (1.1)$$

из оптимальной системы подалгебр  $\Theta L_{13}$  алгебры Ли симметрии  $L_{13}$  уравнений динамики политропного газа (номер подалгебры соответствует списку в [2]). Нормализатор [1] этой трехмерной подалгебры есть подалгебра размерности семь. Это позволяет предположить, что уравнения подмодели имеют промежуточные интегралы. В (1.1)  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ;  $a \neq 0$  — произвольный вещественный параметр. Построим инвариантное решение ранга один по алгебре  $L_{3.56}$ . Это решение удобно привести в цилиндрических координатах с выделенной осью  $Ox$ , связанных с декартовыми координатами формулами

$$\begin{aligned} x &= x, & y &= r \sin \theta, & z &= r \cos \theta, \\ v &= V \cos \theta - W \sin \theta, & w &= V \sin \theta + W \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $V, W$  — радиальная и окружная компоненты вектора скорости.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00047а), а также в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2826.2008.1), гранта Министерства образования и науки РФ (№ 2.1.1/3543) и Программы ОЭММПУ РАН № 14.1.

Третий оператор алгебры (1.1) в координатах (1.2) принимает вид  $t \partial_t + x \partial_x + r \partial_r + a(\rho \partial_\rho + p \partial_p)$ . Инварианты алгебры  $L_{3,56}$ , записанные в цилиндрических координатах, имеют вид

$$\theta, u, V, W, r^{-a}\rho, r^{-a}p, \quad (1.3)$$

где  $\theta$  — полярный угол в плоскости  $\mathbb{R}^2(y, z)$ ;  $u$  — компонента вектора скорости вдоль оси  $Ox$ ;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность газа. Уравнение состояния имеет вид  $p = s\rho^\gamma$ , где  $s$  — функция энтропии;  $\gamma > 1$  — показатель адиабаты.

Согласно (1.3) представление инвариантного решения имеет вид

$$u = U(\theta), \quad V = V(\theta), \quad W = W(\theta), \quad \rho = r^a R(\theta), \quad p = r^a P(\theta), \quad s = r^{a(1-\gamma)} S, \quad (1.4)$$

где  $S = PR^{-\gamma}$ . Следовательно, выражения (1.4) являются решением с переменной энтропией. Изоэнтропическое решение возможно лишь при  $\gamma = 1$  и  $PR^{-1} = S_0 = \text{const}$ . В данной работе этот случай не рассматривается. Инвариантные функции  $U, V, W, R, P, S$  удовлетворяют фактор-системе

$$\begin{aligned} WU' &= 0, & WV' + aP/R &= W^2, & WW' + P'/R &= -VW, \\ WR' + (a+1)RV + RW' &= 0, & WP' + (a+\gamma)PV + \gamma PW' &= 0, \\ a(1-\gamma)VS + WS' &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

(штрихом отмечены производные по  $\theta$ ). Система (1.5) инвариантна относительно преобразования  $W \rightarrow -W, \theta \rightarrow -\theta$ , соответствующего изменению направления отсчета полярного угла. Следовательно, можно рассматривать лишь случай  $W > 0$ . Последнее уравнение в системе (1.5) — уравнение для энтропии — является следствием двух предыдущих. Это уравнение приведено потому, что функция  $S$  используется в дальнейшем для преобразования системы. Скорость звука  $c$  вычисляется по формуле  $c^2 = \gamma p/\rho$ . Из формул (1.4) следует, что эта величина инвариантна:  $c^2 = c^2(\theta) = \gamma P/R$  и удовлетворяет уравнению

$$W(c^2)' + (\gamma - 1)(V + W')c^2 = 0. \quad (1.6)$$

Вихрь  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$  векторного поля скоростей  $\mathbf{u}$ , задаваемого выражениями (1.4), в системе координат  $(x, r, \theta)$  имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = (r^{-1}(W - V'), r^{-1}U', 0). \quad (1.7)$$

В общем случае  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ .

Система (1.5) имеет нетривиальное постоянное решение, в котором радиальная компонента скорости  $V \equiv 0$ , а остальные функции в решении задаются формулами

$$U = U_0, \quad W^2 = W_0^2 = ac_0^2/\gamma, \quad R = R_0, \quad P = P_0, \quad (1.8)$$

где  $P_0, R_0$  — постоянные интегрирования;  $c_0^2 = \gamma P_0/R_0$ . Из (1.8) следует, что такое решение существует лишь при  $a > 0$ . Этому решению соответствует движение газа в круглой трубе, линии тока которого являются винтовыми линиями:

$$x = (r_0 U_0 / W_0) \theta + x_0, \quad r = r_0.$$

Значения  $\theta = \theta_0 = 0, r = r_0, x = x_0$  задают некоторое положение частицы газа на линии тока.

Решение (1.4), являющееся новым, ранее не исследованным, обобщает классические двумерные автомодельные решения уравнений газовой динамики [6, 7] и отличается от решений, рассмотренных Л. В. Овсянниковым [8], и конических течений [9].

**2. Преобразование системы (1.5).** Далее будем предполагать, что  $W \neq 0$ . В противном случае из уравнений (1.5), (1.6) и уравнения состояния следует, что  $P = R = 0$ .

Для интегрирования системы (1.5) используем метод выпрямления производной, примененный в [10] при исследовании регулярных частично инвариантных решений уравнений газовой динамики. При  $W \neq 0$  вместо  $\theta$  введем новую независимую переменную  $\sigma = \sigma(\theta)$ , выпрямляющую производную  $W(d/d\theta)$ , так что

$$W \frac{df}{d\theta} = \frac{df}{d\sigma}, \quad \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{W} \quad (2.1)$$

для любой гладкой функции  $f = f(\theta)$ . Рассмотрим второе уравнение в (2.1) как выражение для компоненты скорости  $W$ :

$$W = \theta_\sigma, \quad (2.2)$$

учитывая, что  $\theta = \theta(\sigma)$ . Параметр  $\sigma$ , изменяющийся вдоль линий тока, играет роль времени, задавая скорость изменения полярного угла  $\theta$ . Такая замена является взаимно однозначной при знакоопределенной функции  $W$ . Значение  $W = 0$ , являющееся особой точкой решения, отделяет движения с  $W > 0$ , для которых угол  $\theta$  монотонно возрастает, от движений, для которых  $W < 0$  и  $\theta$  убывает при движении частицы газа. Как отмечено выше, система (1.5) инвариантна относительно инволюции:  $W \rightarrow -W, \theta \rightarrow -\theta$ .

Вводя в уравнение для энтропии (последнее в системе (1.5)) величину

$$q = \ln S \quad (2.3)$$

и пересчитывая производную по формуле (2.1), компоненту вектора скорости  $V$  можно выразить через производную от энтропии:

$$V = \frac{1}{a(\gamma - 1)} W (\ln S)' = \frac{1}{a(\gamma - 1)} (\ln S)_\sigma = \frac{q_\sigma}{a(\gamma - 1)}. \quad (2.4)$$

При  $W \neq 0$  из первого уравнения системы (1.5) следует, что  $U = U_0 = \text{const}$ . Четвертое и пятое уравнения этой системы после деления на  $R$  и  $P$  и подстановки выражений (2.2) и (2.4) принимают вид

$$(\ln R)_\sigma + \frac{a + 1}{a(\gamma - 1)} q_\sigma + \frac{\theta_{\sigma\sigma}}{\theta_\sigma} = 0, \quad (\ln P)_\sigma + \frac{a + \gamma}{a(\gamma - 1)} q_\sigma + \gamma \frac{\theta_{\sigma\sigma}}{\theta_\sigma} = 0. \quad (2.5)$$

В результате интегрирования уравнения (2.5) дают представления

$$R = R_0 (\theta_\sigma e^{\frac{a+1}{a(\gamma-1)} q})^{-1}, \quad P = P_0 (\theta_\sigma^\gamma e^{\frac{a+\gamma}{a(\gamma-1)} q})^{-1}, \quad (2.6)$$

где  $R_0, P_0$  — постоянные интегрирования. Из (2.6) следует выражение

$$\frac{P}{R} = \frac{P_0}{R_0} \theta_\sigma^{1-\gamma} e^{-q/a}. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.2), (2.4), (2.7) во второе уравнение системы (1.5), получаем

$$q_{\sigma\sigma} = a(\gamma - 1) \left( \theta_\sigma^2 - \frac{aP_0}{R_0} \theta_\sigma^{1-\gamma} e^{-q/a} \right). \quad (2.8)$$

Третье уравнение в (1.5) после перехода к новым переменным принимает вид

$$\theta_{\sigma\sigma} + \frac{P_0}{R_0} e^{\frac{a+1}{a(\gamma-1)} q} \left( \frac{1}{\theta_\sigma^\gamma e^{\frac{a+\gamma}{a(\gamma-1)} q}} \right)_\sigma = -\frac{1}{a(\gamma - 1)} \theta_\sigma q_\sigma. \quad (2.9)$$

После ряда преобразований уравнение (2.9) приводится к уравнению

$$\left( \theta_\sigma^{\gamma+1} - \frac{\gamma P_0}{R_0} e^{-q/a} \right) \theta_{\sigma\sigma} - \frac{(a + \gamma) P_0}{a(\gamma - 1) R_0} e^{-q/a} q_\sigma \theta_\sigma + \frac{\theta_\sigma^{\gamma+2} q_\sigma}{a(\gamma - 1)} = 0. \quad (2.10)$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

**Лемма 1.** Фактор-система (1.5) для решения (1.4) сводится к системе двух уравнений (2.8), (2.10) для двух функций  $\theta$ ,  $q$ , определяемых формулами (2.1) и (2.3) и зависящих от переменной  $\sigma$ .

Поскольку уравнения (2.8) и (2.10) не содержат явно искомую функцию  $\theta$ , их порядок можно понизить, введя новые функции  $Q = Q(q)$ ,  $\Theta = \Theta(q)$ :

$$q_\sigma = Q(q), \quad \theta_\sigma = \Theta(q). \quad (2.11)$$

Из (2.11) следуют формулы для вторых производных

$$q_{\sigma\sigma} = Q_q q_\sigma = Q Q_q, \quad \theta_{\sigma\sigma} = \Theta_q q_\sigma = Q \Theta_q. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.11), (2.12) в (2.8), (2.10), получаем уравнения

$$Q Q_q = a(\gamma - 1) \left( \Theta^2 - \frac{a c_0^2}{\gamma} \Theta^{1-\gamma} e^{-q/a} \right); \quad (2.13)$$

$$Q \Theta^{1+\gamma} \Theta_q - c_0^2 e^{-q/a} Q \Theta_q - \frac{(a + \gamma) c_0^2}{\gamma a (\gamma - 1)} e^{-q/a} Q \Theta + \frac{Q \Theta^{\gamma+2}}{a(\gamma - 1)} = 0. \quad (2.14)$$

Следует отметить, что уравнение (2.14) можно сократить на ненулевой множитель  $Q \neq 0$ , в результате чего оно становится уравнением для определения функции  $\Theta$ . Решив это уравнение, из (2.13) находим функцию  $Q$ . Таким образом, уравнения системы (1.5) расщепились, что позволяет интегрировать их последовательно.

Вместо  $q$  удобно ввести новую независимую переменную  $\lambda$ :

$$\lambda = e^{-q/a}. \quad (2.15)$$

Тогда  $q = -a \ln \lambda$ . Заметим, что  $\lambda > 0$ . Производные пересчитываются по формуле

$$f_q = -\lambda f_\lambda / a. \quad (2.16)$$

Выполнив в (2.13), (2.14) замену (2.15) и пересчитав производные по формуле (2.16), получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** Фактор-система (1.5) решения (1.4) сводится к системе двух уравнений первого порядка

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\Theta(\Theta^{\gamma+1} - (c_0^2(a + \gamma)/\gamma)\lambda)}{\lambda(\Theta^{\gamma+1} - c_0^2\lambda)}; \quad (2.17)$$

$$(Q^2)_\lambda = \frac{2a^2(\gamma - 1)}{\lambda\Theta^{\gamma-1}} \left( \frac{a c_0^2}{\gamma} \lambda - \Theta^{\gamma+1} \right) \quad (2.18)$$

для функций  $\Theta = \Theta(\lambda)$ ,  $Q = Q(\lambda)$ , определенных формулами (2.11).

**3. Преобразование и интегрирование уравнения (2.17).** Покажем, что уравнение (2.17) можно проинтегрировать. Выполнив в (2.17) замену функции по формуле

$$w = \Theta^{\gamma+1}, \quad (3.1)$$

получим уравнение

$$\frac{dw}{d\lambda} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{w(w - \alpha_0\lambda)}{\lambda(w - c_0^2\lambda)}, \quad (3.2)$$

где

$$\alpha_0 = c_0^2(a + \gamma)/\gamma. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.2) является однородным и заменой искомой функции

$$v = w/\lambda \quad (3.4)$$

сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Подставляя (3.4) в (3.2), после ряда преобразований получим уравнение

$$\lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{2(v^2 + \beta_0 v)}{(\gamma - 1)(v - c_0^2)}, \quad (3.5)$$

где постоянная  $\beta_0 = (c_0^2(\gamma - 1) - \alpha_0(\gamma + 1))/2$  согласно (3.3) имеет вид

$$\beta_0 = -c_0^2(a + (a + 2)\gamma)/(2\gamma). \quad (3.6)$$

Общее решение уравнения (3.5) представляется в виде интеграла

$$\int \frac{(v - c_0^2) dv}{v^2 + \beta_0 v} = \frac{2}{\gamma - 1} \ln \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad (3.7)$$

где  $\lambda_0$  — постоянная интегрирования.

Интеграл в левой части формулы (3.7) берется в элементарных функциях, и решение уравнения (3.5) задается формулой

$$|v + \beta_0|^{1+c_0^2/\beta_0} v^{-c_0^2/\beta_0} = (\lambda/\lambda_0)^{2/(\gamma-1)}, \quad (3.8)$$

где  $\beta_0 \neq 0$ . Подставляя в формулу (3.8) представление (3.4), получаем решение в терминах функции  $w$

$$|w + \lambda\beta_0|^{1+c_0^2/\beta_0} w^{-c_0^2/\beta_0} = \lambda^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \lambda_0^{-2/(\gamma-1)}. \quad (3.9)$$

Заметим, что согласно (3.6)

$$1 + \frac{c_0^2}{\beta_0} = \frac{a(\gamma + 1)}{a(\gamma + 1) + 2\gamma}, \quad \frac{c_0^2}{\beta_0} = -\frac{2\gamma}{a(\gamma + 1) + 2\gamma}. \quad (3.10)$$

Подставляя в формулу (3.9) выражение (3.1) для  $w$  и значения степеней из (3.10), получаем решение в терминах функции  $\Theta$ :

$$|\Theta^{\gamma+1} + \lambda\beta_0|^{\frac{a(\gamma+1)}{a(\gamma+1)+2\gamma}} = \lambda_0^{-\frac{2}{\gamma-1}} \lambda^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \Theta^{\frac{2\gamma}{a(\gamma+1)+2\gamma}}. \quad (3.11)$$

При  $\beta_0 = 0$ , что соответствует значению  $a = -2\gamma/(\gamma + 1)$ , интеграл (3.7) упрощается и принимает вид

$$\int \left( \frac{1}{v} - \frac{c_0^2}{v^2} \right) dv = \frac{2}{\gamma - 1} \ln \frac{\lambda}{\lambda_0}.$$

В этом случае решение определяется формулой

$$\ln v + \frac{c_0^2}{v} = \frac{2}{\gamma - 1} \ln \frac{\lambda}{\lambda_0}. \quad (3.12)$$

Формулу (3.12) можно преобразовать к виду

$$v e^{c_0^2/v} = (\lambda/\lambda_0)^{2/(\gamma-1)}. \quad (3.13)$$

Подставляя в (3.13) значения  $v$  из (3.4) и (3.1), получаем

$$\Theta^{\gamma+1} \exp(c_0^2 \lambda \Theta^{-(\gamma+1)}) = \lambda_0^{-2/(\gamma-1)} \lambda^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}. \quad (3.14)$$

Сформулируем результат в виде следующего утверждения.

**Теорема 2.** *Общее решение уравнения (2.17) задается формулой (3.11) при  $\beta_0 \neq 0$  и формулой (3.14) при  $\beta_0 = 0$ .*

Соотношения (3.11), (3.14) являются неявными дифференциальными уравнениями [11] относительно производных  $\theta_q$  (или  $\theta_\sigma$ ).

**4. Звуковые характеристики, интеграл движения и завихренность.** Получим представления некоторых физических параметров течения, соответствующих решению (1.4), в терминах переменных  $\lambda$  и  $v$ .

При описании движения газа важную роль играют звуковые характеристики — поверхности или кривые в физическом пространстве, на которых нормальная к ним компонента скорости газа равна скорости звука [6, 7]. Звуковые характеристики, задаваемые в физической плоскости лучами  $\theta = \theta_0$  (или полуплоскостями в трехмерном пространстве), определяются уравнением  $W^2 = c^2$ , которое на решении (1.4) принимает вид

$$W^2(\theta) = \gamma P(\theta)/R(\theta). \quad (4.1)$$

Подставляя в (4.1) представление (2.2) для  $W$  и (2.7) для  $P/R$ , получим уравнение характеристик в виде  $\Theta^{\gamma+1}/\lambda = c_0^2$  или (в терминах (3.4))  $v = c_0^2$ .

**Лемма 2.** *Звуковые характеристики уравнений газовой динамики на решении (1.4), соответствующие в физической плоскости лучам  $\theta = \theta_0$  (или полуплоскостям в трехмерном случае), на плоскости  $\mathbb{R}^2(\lambda, v)$  задаются горизонтальными прямыми*

$$v = c_0^2.$$

Получим интеграл движения, связывающий в решении (1.4) радиальную координату частицы газа и энтропию, в терминах переменной  $\lambda$ . Уравнение линий тока течения в плоскости  $\mathbb{R}^2(y, z)$  имеет вид

$$\frac{dr}{V} = \frac{r d\theta}{W}. \quad (4.2)$$

После подстановки в (4.2) дифференциала  $d\sigma = d\theta/W$  из (2.1) и интегрирования этого уравнения получаем

$$\ln \frac{r}{r_0} = \int V(\sigma) d\sigma, \quad (4.3)$$

где  $r_0$  — постоянная интегрирования, соответствующая начальному положению частицы газа на линии тока. Подставляя в (4.3) представление (2.4) для  $V$  и переходя к переменной  $\lambda$  (см. (2.15)), получим следующее уравнение линии тока:

$$r = r_0(\lambda_0/\lambda)^{\gamma-1}. \quad (4.4)$$

Начальному положению  $r_0$  частицы газа соответствует значение  $\lambda_0$  параметра  $\lambda$ , характеризующего энтропию. Поскольку  $\gamma - 1 > 0$ , из формулы (4.4) следует, что  $r$  уменьшается при возрастании  $\lambda$  и увеличивается в противном случае.

Вычислим вихрь (1.7) в терминах переменных  $v$  и  $\lambda$ . Согласно (1.7) имеем  $\omega = (\omega^1, \omega^2, 0)$  на решении (1.4). В п. 2 установлено, что при  $W \neq 0$   $U = U_0 = \text{const}$ , поэтому  $\omega^2 = r^{-1}U_\theta = 0$ . Вычислим первую компоненту  $\omega^1$  вихря, подставив в (1.7) представления (2.2), (2.4) и (2.11) для компонент вектора скорости:

$$\omega^1 = \frac{1}{r}(W - V_\theta) = \frac{1}{r}\left(\theta_\sigma - \frac{q_{\sigma\sigma}}{a(\gamma-1)\theta_\sigma}\right) = \frac{1}{r\Theta}\left(\Theta^2 - \frac{(Q^2)_q}{2a(\gamma-1)}\right). \quad (4.5)$$

Дальнейшее преобразование (4.5) проведем с использованием уравнения (2.13) и формул (2.15), (3.1) и (3.4):

$$\omega^1 = \frac{ac_0^2}{\gamma r} \lambda \Theta^{-\gamma} = \frac{ac_0^2}{\gamma r} \lambda^{1/(\gamma+1)} v^{-\gamma/(\gamma+1)}. \quad (4.6)$$

Подставляя в (4.6) значение  $r$  из интеграла (4.4), окончательно получаем формулу для ненулевой компоненты вихря в решении (1.4):

$$\omega^1 = \frac{ac_0^2}{\gamma r_0 \lambda_0^{\gamma-1}} \left(\frac{\lambda^{\gamma^2}}{v^\gamma}\right)^{1/(\gamma+1)}. \quad (4.7)$$

**Лемма 3.** *Ненулевая компонента вихря в решении (1.4) в терминах переменных  $(\lambda, v)$  задается формулой (4.7). Вихрь возрастает по абсолютной величине при возрастании  $\lambda$  или убывании  $v$ .*

**5. Исследование особенностей решения.** Аналитическое решение (1.4) определяется формулами (3.11) и (3.14). Эти формулы достаточно громоздки и сложны для анализа, кроме того, они описывают промежуточные интегралы решения (1.4) в терминах его первых производных (2.11).

Важная информация о решении (1.4) может быть получена при анализе особых точек и многообразий уравнения (3.5) [12]. При этом получаем решение как функцию параметра  $\lambda$  и тем самым как функцию переменной энтропии. Для определения зависимости энтропии от пространственных координат необходимо решить уравнение (3.14) как дифференциальное уравнение относительно функции  $\Theta(q)$ , определенной соотношением (2.11).

Наряду с уравнением (3.5) рассмотрим соответствующую ему систему уравнений

$$\dot{v} = 2(v^2 + \beta_0 v)/(\gamma - 1), \quad \dot{\lambda} = \lambda(v - c_0^2), \quad (5.1)$$

где точкой отмечены производные по параметру.

При любых значениях  $\beta_0$  система (5.1) имеет особую точку  $O$  с координатами  $\lambda_0 = 0$  и  $v_0 = 0$ . При  $\beta_0 > 0$  точка  $O$  — единственная особая точка, при  $\beta_0 < 0$  появляется особая точка  $P_1$ , в которой  $\lambda_1 = 0$  и  $v_1 = -\beta_0$ . Напомним, что согласно (2.15)  $\lambda > 0$  и рассматриваются значения  $\Theta > 0$ , поэтому и  $v > 0$ . Таким образом, анализ проводится в первой четверти плоскости  $\mathbb{R}^2(\lambda, v)$ .

Из (3.6) следует, что  $\beta_0 > 0$  при  $a(\gamma + 1) + 2\gamma < 0$ . Введем характерный параметр

$$a_* = -2\gamma/(\gamma + 1) < 0.$$

Тогда

$$\beta_0 > 0 \quad \text{при} \quad a < a_*, \quad \beta_0 < 0 \quad \text{при} \quad a > a_*. \quad (5.2)$$

Поскольку  $\gamma > 1$ , значение  $a_*$  не обращается в нуль. Из (5.2) следует, что при отрицательных значениях параметра  $a$   $\beta_0 > 0$ , в то время как при  $\beta_0 < 0$  значения  $a$  могут быть как отрицательными ( $a \in (a_*, 0)$ ), так и положительными ( $a > 0$ ).

Из вида правой части уравнения (3.5) следует, что при  $v \rightarrow c_0^2$  производная  $dv/d\lambda \rightarrow \infty$ . Это означает, что касательная к интегральным кривым становится вертикальной. Если уравнение (3.5) записать, разрешив относительно производной  $d\lambda/dv$ , то на прямой  $v = c_0^2$  эта производная будет обращать в нуль. Таким образом, в точках прямой  $v = c_0^2$  может возникать неоднозначность решения в терминах функции  $v = v(\lambda)$  либо имеет место локальный экстремум функции  $\lambda = \lambda(v)$ . Реализация этих случаев зависит от поведения интегральных кривых при переходе через прямую  $v = c_0^2$ .

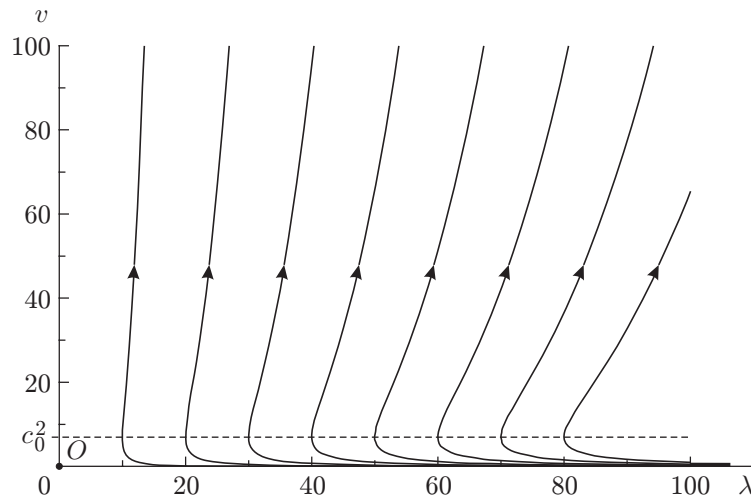
Интегральным кривым, расположенным выше прямой  $v = c_0^2$ , соответствует сверхзвуковое течение газа, в котором окружная компонента вектора скорости превышает скорость звука. Интегральным кривым, лежащим ниже прямой  $v = c_0^2$ , соответствует движение газа с  $|W| < c$ , однако такое движение может являться сверхзвуковым, поскольку для него радиальная компонента вектора скорости  $V \neq 0$ .

Матрица Якоби правых частей системы (5.1) равна

$$J = \begin{bmatrix} 2(2v + \beta_0)/(\gamma - 1) & 0 \\ \lambda & v - c_0^2 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Тогда матрица  $J$  при  $v = 0$  имеет собственные числа

$$k_1 = 2\beta_0/(\gamma - 1), \quad k_2 = -c_0^2 < 0. \quad (5.4)$$

Рис. 1. Интегральные кривые при  $\beta_0 > 0$ 

В точке  $P_1$  матрица (5.3) имеет спектр ( $\beta_0 < 0$ )

$$k_1 = -\frac{2\beta_0}{\gamma - 1} > 0, \quad k_2 = -\beta_0 - c_0^2. \quad (5.5)$$

Таким образом, возможны три случая.

1. Пусть  $\beta_0 > 0$ . Тогда  $a < a_* < 0$ . Имеется единственная особая точка  $O$ , в которой согласно (5.4)  $k_1 > 0$  и  $k_2 < 0$ . Точка  $O$  — седло, сепаратрисами которого являются оси координат, причем по оси  $\lambda$  движение происходит в направлении начала координат  $O(0, 0)$ , а по оси  $v$  — в противоположном направлении. Фазовый портрет интегральных кривых представлен на рис. 1. Интегральные кривые пересекают прямую  $v = c_0^2$  под прямым углом, каждому значению  $\lambda$  соответствует два значения  $v$ .

Согласно (2.15) при  $a < 0$  величины  $\lambda$  и  $q$  убывают или возрастают одновременно. Из (2.3) следует, что при возрастании энтропии  $S$  в решении возрастает величина  $q$ , а следовательно, и  $\lambda$ . В этом случае решение (1.4) в области  $v > c_0^2$  можно трактовать как сверхзвуковой вихревой сток. Частицы газа стартуют с характеристики — прямой  $v = c_0^2$  — и движутся по интегральным кривым, находящимся выше этой прямой. Такое движение соответствует возрастанию энтропии и (согласно (4.4)) движению частицы газа к центру (началу координат). Согласно лемме 3 завихренность такого движения возрастает.

Интегральным кривым, лежащим ниже прямой  $v = c_0^2$ , соответствует движение газа, заканчивающееся на звуковой характеристике. При таком движении убывает энтропия, частицы газа удаляются от начала координат, являющегося вихревым источником.

2. Пусть  $\beta_0 < 0$ ,  $-\beta_0 - c_0^2 < 0$ . Тогда  $a_* < a < 0$ . Имеется две особые точки  $O$  и  $P_1$ . Согласно (5.4) в точке  $O$   $k_1 < 0$ ,  $k_2 < 0$ , т. е. точка  $O$  — притягивающий узел. Согласно (5.5) в точке  $P_1$   $k_1 > 0$ ,  $k_2 < 0$ , т. е. точка  $P_1$  является седлом. По сепаратрисе, являющейся осью  $Ov$ , движение происходит из особой точки  $P_1$ , сепаратриса седла  $v = -\beta_0$  входит в особую точку  $P_1$ . Поскольку на отрезке  $OP_1$  оси  $Ov$   $v + \beta_0 < 0$ , согласно (5.1)  $v < 0$  и движение происходит из точки  $P_1$  в точку  $O$ . По оси  $O\lambda$  движение также происходит по направлению к точке  $O$ . Интегральные кривые для этого случая показаны на рис. 2, решение является трехзначным.

Каждому значению  $\lambda$  соответствуют три значения  $v$ . Поскольку  $a < 0$ , как и в случае 1, переменные  $\lambda$  и  $S$  убывают либо возрастают одновременно. Области, в которых меняется



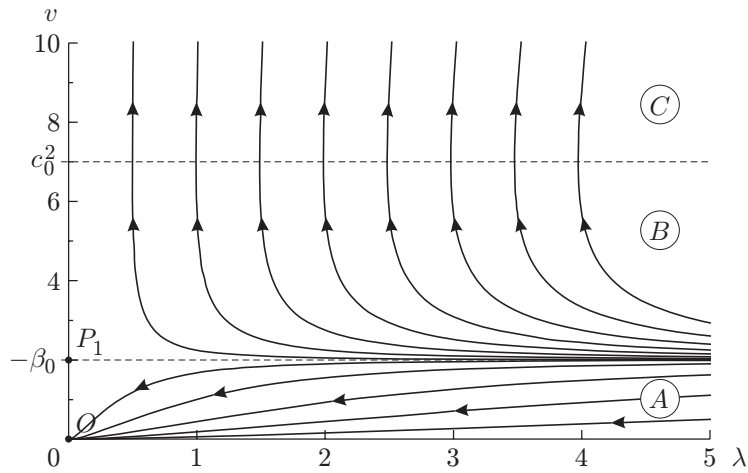


Рис. 2. Интегральные кривые при  $-c_0^2 < \beta_0 < 0$

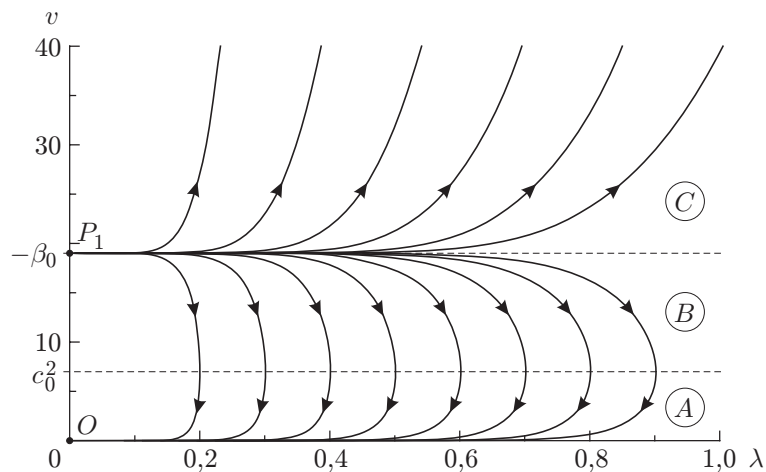


Рис. 3. Интегральные кривые при  $\beta_0 < -c_0^2$

знак производной, обозначим  $A, B, C$  (см. рис. 2). Решение в областях  $B$  и  $C$  совпадает с решением в случае  $\beta_0 > 0$ . В области  $A$  определено решение, в котором происходит разлет газа (до бесконечности) и энтропия уменьшается.

3. Пусть  $\beta_0 < 0, -\beta_0 - c_0^2 > 0$ . Тогда согласно (5.3)  $a > 0$ . Из (5.4) и (5.5) следует, что точка  $O$  является притягивающим узлом, а в точке  $P_1$   $k_1 > 0, k_2 > 0$ , т. е. она является отталкивающим узлом. Интегральные кривые для этого случая показаны на рис. 3.

Согласно формулам (2.3), (2.15) при  $a > 0$  энтропия  $S$  возрастает при убывании  $\lambda$ . Решение является трехзначным, как и в случае 2.

В области  $A$  решение описывает поток газа, истекающий со звуковой характеристики. Такое решение соответствует разлету газа на бесконечность, радиус неограниченно возрастает, энтропия в течении также увеличивается. В области  $B$  решение описывает сверхзвуковой сток газа, заканчивающийся на звуковой характеристике  $v = c_0^2$ . Решению в области  $C$  соответствует сверхзвуковое течение газа, в котором частицы стартуют из бесконечности и собираются в точках коллапса  $\lambda = \pm\infty$ , соответствующих значению  $r = 0$ .

При  $\beta_0 = 0$ , когда  $a = a_*$ , система имеет одну вырожденную особую точку  $O$ . В этой точке согласно (5.4)  $k_1 = 0, k_2 < 0$ . Описание поведения интегральных кривых в окрест-

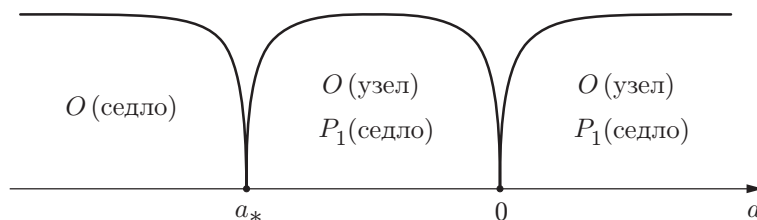


Рис. 4. Типы особых точек в зависимости от параметра  $a$

ности точки  $O$  можно получить, используя методы, изложенные в [12], либо на основе формулы решения (3.13), которая в данном случае имеет относительно простой вид. При этом картина интегральных кривых подобна картине, имеющей место в случае 1.

Таким образом, качественный анализ особенностей уравнения (3.5) позволяет получить важную информацию о решении (1.4). Дальнейшее исследование этого решения должно включать анализ неявных дифференциальных уравнений (3.11), (3.14) и изучение решения системы четырех уравнений (2.11), (2.13), (2.14). Такое исследование основывается на выполненном в данной работе анализе поведения решения уравнения (3.5) при различных значениях параметра  $a$  (рис. 4).

**6. Выводы.** Решение (1.4), представляющее интерес с точки зрения физики, описывает не только плоские газовые вихри, но и пространственные закрученные газовые струи. Действительно, решению вида (1.4) соответствует случай  $U = U_0 = \text{const}$ . При  $U_0 \neq 0$  решение описывает трехмерное движение с постоянной скоростью  $U_0$  вдоль оси  $Ox$  закрученной круглой струи газа. При этом форма сечения струи изменяется: оно либо расширяется, либо сужается в соответствии с описанием, приведенным в п. 5. В этом случае звуковыми характеристиками  $\theta = \theta_0$  являются полуплоскости, выходящие из оси  $Ox$ . Возможны режимы как неограниченного разлета струи на бесконечность, так и сжатия ее коллапса на ось симметрии. При  $U_0 = 0$  движение газа является плоским, решение описывает плоские газовые вихри. Для детального описания и физической трактовки таких режимов необходим анализ решений уравнений (3.11) или (3.14).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Головин С. В.** Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа. Новосибирск, 1996. (Препр. / Сиб. отд-ние РАН. Ин-т гидродинамики; № 5-96).
3. **Черевко А. А.** Теоретико-групповые решения уравнений газовой динамики, порожденные трехмерными подалгебрами симметрии // Тез. Междунар. конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвящ. 100-летию со дня рожд. И. Н. Векуа, Новосибирск, 28 мая — 2 июня 2007 г. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. С. 353.
4. **Черевко А. А.** Теоретико-групповые решения уравнений газовой динамики, порожденные трехмерными подалгебрами // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 553–595.
5. **Голод А. И., Чупахин А. П.** Инвариантные решения динамики политропного газа, построенные по трехмерным алгебрам симметрии // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 229–250.
6. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
7. **Курант Р.** Сверхзвуковое течение и ударные волны / Р. Курант, К. Фридрихс. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.

8. **Овсянников Л. В.** Плоские течения газа с замкнутыми линиями тока // Докл. РАН. 1998. Т. 361, № 1. С. 51–53.
9. **Булах Б. М.** Нелинейные конические течения газа. М.: Наука, 1970.
10. **Чупахин А. П.** Небарохронные подмодели типов (1,2) и (1,1) уравнений газовой динамики. Новосибирск, 1999. (Препр. / Сиб. отд-ние РАН. Ин-т гидродинамики; № 1-99).
11. **Арнольд В. И.** Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевск. респ. тип., 2002.
12. **Баутин Н. Н.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. М.: Наука, 1976.

*Поступила в редакцию 20/II 2008 г.,  
в окончательном варианте — 11/IV 2008 г.*

---