

УДК 539.3

ДВУХСЛОЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБОЛОЧКИ РАБОТНОВА И КРИТИЧЕСКОЕ ВРЕМЯ ВЫПУЧИВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Ю. М. Волчков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: volk@hydro.nsc.ru

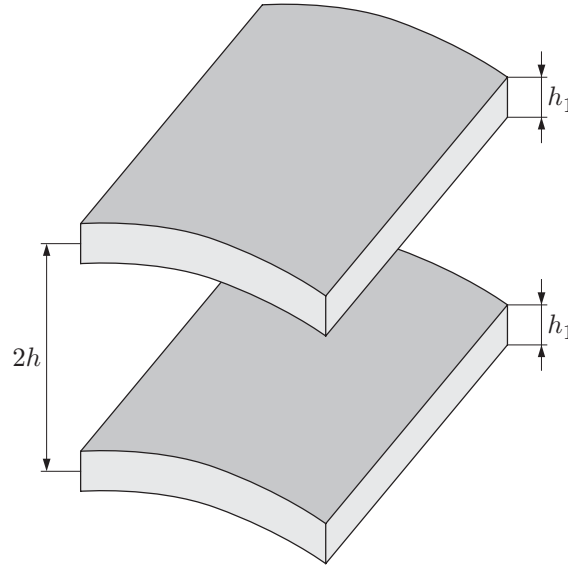
Приводятся основные положения двухслойной модели оболочки Работнова. Показано, что функционал Работнова может быть получен из смешанного вариационного принципа теории ползучести. Вводится понятие критического времени и излагается процедура, позволяющая получить для него явную формулу с использованием вариационного уравнения.

Ключевые слова: двухслойная модель оболочки, функционал, ползучесть, критическое время.

Введение. Для решения задач упругопластического деформирования Ю. Н. Работновым предложена двухслойная модель оболочки [1]. В работах [2, 3] модель была обобщена на случай деформирования оболочек в условиях ползучести. В [3] указан также класс оболочек, для которых применение двухслойной модели не может вносить больших погрешностей при решении конкретных задач. Этот класс оболочек описывается так называемой технической теорией оболочек, которая включает теорию осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки, теорию длинных цилиндрических оболочек и теорию чистого изгиба криволинейной трубы. Применение двухслойной модели оболочки позволило разработать эффективный численный метод решения задач о напряженно-деформированном состоянии оболочек в условиях ползучести [4]. Обобщение двухслойной модели на случай подкрепленных ребрами оболочек дано в работах [5–7].

1. Двухслойная модель оболочки Работнова. Модель представляет собой оболочку, состоящую из двух слоев, толщина каждого из которых равна h_1 , расстояние между срединными поверхностями слоев равно $2h$ (см. рисунок). Считается, что слои связаны между собой заполнителем, который передает сдвигающие усилия, но не воспринимает растягивающие усилия и изгибающие моменты. Деформирование слоев происходит в соответствии с гипотезой Кирхгофа — Лява. В качестве отсчетной поверхности принимается поверхность, равноотстоящая от несущих слоев. Напряжения по толщине несущих слоев полагаются постоянными.

Установим связь между параметрами модели h_1 , h и толщиной реальной оболочки $2H$, считая, что свойства материала модели и оболочки одинаковы. Эта связь устанавливается на основании требования, чтобы поведение модели и реальной оболочки совпадало при безмоментном напряженном состоянии и при цилиндрическом изгибе.



Двухслойная модель оболочки

Соотношения установившейся ползучести запишем в виде $\sigma_{ij} = s(v) \partial v / \partial \varepsilon_{ij}$ (σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{ij} — компоненты тензора скоростей ползучести; s — интенсивность напряжений; v — интенсивность скоростей сдвига; функция $s(v)$ определяется на основе данных, полученных в эксперименте на одноосное растяжение). В дальнейшем рассматривается плоское напряженное состояние. В случае безмоментного напряженного состояния скорости деформаций ε_{ij} постоянны по толщине в реальной оболочке и одинаковы для верхнего и нижнего слоев в модели. В реальной оболочке усилия выражаются через скорости деформаций по формуле

$$T_{11} = \frac{8}{3} \frac{s(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} H \left(\varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \varepsilon_{22} \right), \quad (1.1)$$

в модели — по формуле

$$T_{11} = \frac{8}{3} \frac{s(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} h_1 \left(\varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \varepsilon_{22} \right). \quad (1.2)$$

Здесь $\varepsilon_0 = \sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}}$.

Из (1.1), (1.2) получаем

$$h_1 = H. \quad (1.3)$$

В случае чистого изгиба оболочки $\varepsilon_{ij} = 2\kappa_{ij}$ (κ_{ij} — скорости изменения кривизн средней поверхности в реальной оболочке и отсчетной поверхности в модели). При этом интенсивность скоростей деформаций равна $\varepsilon_0 = \kappa_0 z$ (κ_0 — инвариант, выражающийся через скорости изменения кривизн аналогично тому, как ε_0 выражается через ε_{ij}). Следовательно, интенсивность напряжений является функцией $\kappa_0 z$ ($\sigma_0 = s(\kappa_0 z)$).

Таким образом, для реальной оболочки получаем

$$M_{11} = \int_{-H}^H \sigma_{11} z dz = \frac{8}{3\kappa_0} \left(\kappa_{11} + \frac{1}{2} \kappa_{22} \right) \int_0^H s(\kappa z) z dz, \quad (1.4)$$

для модели —

$$\varepsilon_{ij}^{\pm} = \pm h \kappa_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{\pm} = \pm \frac{4}{3} \frac{s(\kappa_0 h)}{\kappa_0} \left(\kappa_{11} + \frac{1}{2} \kappa_{22} \right).$$

В двухслойной оболочке изгибающий момент вычисляется по формуле

$$M_{11} = 2\sigma_{11}h_1h = \frac{8h_1hs(\kappa_0h)}{3\kappa_0} \left(\kappa_{11} + \frac{1}{2} \kappa_{22} \right). \quad (1.5)$$

Из (1.4), (1.5) следует

$$h_1hs(\kappa_0h) = \int_0^H s(\kappa_0z)z dz. \quad (1.6)$$

Для степенного закона ползучести $\varepsilon = \varepsilon_*s(\sigma/\sigma_*)^n$ соотношение (1.6) принимает вид

$$h_1h^{1+1/n} = \frac{n}{1+2n} H^{2+1/n}.$$

Используя (1.3), получим

$$h = \left(\frac{n}{1+2n} \right)^{n/(n+1)} H. \quad (1.7)$$

В соотношение (1.7) входит показатель ползучести n . При изменении n от 1 до ∞ величина h изменяется в интервале $1 \leq h \leq H/\sqrt{3}$. Значение $n = \infty$ соответствует случаю идеальной пластичности.

Если принять гипотезы Кирхгофа — Лява, то скорости деформаций в несущих слоях оболочки записываются в виде

$$\varepsilon_{11}^+ = \varepsilon_{11} + \kappa_{11}h, \quad \varepsilon_{11}^- = \varepsilon_{11} - \kappa_{11}h, \quad \varepsilon_{22}^+ = \varepsilon_{22}^- = \varepsilon_{22}, \quad (1.8)$$

где ε_{11} , ε_{22} — скорости деформаций срединной поверхности; κ_{11} — скорость изменения кривизны в направлении 1. В (1.8) и ниже знак “+” соответствует верхнему несущему слою, знак “-” — нижнему. Напряжения в несущих слоях вычисляются по формулам

$$\sigma_{11}^+ = \frac{4}{3} \frac{s^+}{v^+} \left(\varepsilon_{11} + \kappa_{11}h + \frac{1}{2} \varepsilon_{22} \right), \quad \sigma_{11}^- = \frac{4}{3} \frac{s^-}{v^-} \left(\varepsilon_{11} - \kappa_{11}h + \frac{1}{2} \varepsilon_{22} \right) \quad (1 \rightleftharpoons 2). \quad (1.9)$$

Если $T_{11} = 0$, то $\sigma_{11}^+ = -\sigma_{11}^-$. Из (1.9) следует, что условие $T_{11} = 0$ выполняется, если

$$\varepsilon_{11} + \frac{\varepsilon_{22}}{2} = 0, \quad \frac{s^+}{v^+} = \frac{s^-}{v^-}, \quad (1.10)$$

откуда в свою очередь следует, что $v^+ = v^-$ (материалы слоев предполагаются одинаковыми).

Если выполнено первое условие в (1.10), то напряжения в слоях вычисляются по формулам

$$\sigma_{11}^\pm = \pm \frac{4}{3} \frac{s^\pm}{v^\pm} \kappa_{11}h, \quad \sigma_{22}^\pm = \frac{s^\pm}{v^\pm} \left(\varepsilon_{22} \pm \frac{2}{3} \kappa_{11}h \right). \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в выражение для интенсивности напряжений, получаем

$$(v^\pm)^2 = \varepsilon_{22}^2 + 4\kappa_{11}^2h^2/3. \quad (1.12)$$

Из (1.10), (1.12) следует, что $v^+ = v^-$, $s^+ = s^-$. Усилие T_{22} и изгибающий момент M_{11} вычисляются по формулам

$$T_{22} = h_1(\sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^-) = \frac{2h_1s(v)}{v} \varepsilon_{22}, \quad M_{11} = h_1(\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-) = \frac{8h_1s(v)}{3v} \kappa_{11}h^2.$$

В безразмерных переменных

$$\omega = \frac{\sigma_* v}{\varepsilon_* s}, \quad u = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_*}, \quad m = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{M_{11}}{h h_1 \sigma_*} \quad (1.13)$$

соотношение (1.12) записывается в виде

$$(v^\pm(\omega))^2 / \varepsilon_*^2 = u^2 + m^2 \omega^2. \quad (1.14)$$

Вид функции $v(\omega)$ зависит от закона ползучести. При заданном законе ползучести уравнение (1.14) можно разрешить относительно ω . Так, для степенного закона ползучести $\varepsilon = \varepsilon_*(\sigma/\sigma_*)^n$ это соотношение имеет вид

$$\omega^{2n/(n-1)} = u^2 + m^2 \omega^2.$$

Усилие T_{22} и скорость изменения кривизны \varkappa_{11} выражаются через безразмерные переменные (1.13) следующим образом:

$$T_{22} = 2h_1 \sigma_* u / \omega, \quad \varkappa_{11} h = \sqrt{3} \varepsilon_* m \omega / 2.$$

Уравнения осесимметричного деформирования круговой цилиндрической оболочки в безразмерных переменных записываются в виде

$$u'' + 2m\omega = 0, \quad m'' - 2u/\omega + 2p = 0, \quad (1.15)$$

где

$$p = -\frac{q_n R}{2h_1 \sigma_*}, \quad b^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} R h,$$

q_n — равномерно распределенное внешнее давление; R — радиус оболочки; штрихи обозначают производные по безразмерной координате $\xi = x/b$.

При независимом варьировании величин u и m уравнения (1.15) являются уравнениями Эйлера для функционала

$$N = \int_0^l [u' m' + \psi(\omega) - 2m^2 \omega - 2pu] d\xi,$$

где

$$\psi(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_*^2} \int \frac{d(v^2)}{\omega},$$

l — безразмерная длина оболочки.

Уравнения (1.14), (1.15) обобщаются на случай не равной нулю продольной сжимающей силы ($T_{11} \neq 0$):

$$m'' - u(1/\omega^+ + 1/\omega^-) - 2\tau/\sqrt{3} + 2p = 0, \quad u'' + (m + \tau)\omega^+ - (m + \tau)\omega^- = 0, \\ (v^\pm/v^*)^2 = u^2 + (m \pm \tau)^2 (\omega^\pm)^2. \quad (1.16)$$

Здесь

$$\tau = \sqrt{3} T_{11} / (4h_1 \sigma_*).$$

При этом функционал N записывается в виде

$$N = \int_0^l \left[u' m' + \frac{1}{2} \psi(\omega^+) + \frac{1}{2} \psi(\omega^-) - (m + \tau)^2 \omega^+ - (m - \tau)^2 \omega^- + 2 \left(\frac{\tau}{\sqrt{3}} - p \right) u \right] d\xi. \quad (1.17)$$

2. Смешанный вариационный принцип теории ползучести и функционал Работнова. Примем, что в условиях установившейся ползучести напряжения и скорости деформаций ползучести связаны соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (2.1)$$

где Λ — функция напряжений; L — функция скоростей деформаций $\varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$; v_i — компоненты вектора скорости; $i, j = 1, 2, 3$.

Пусть тело, занимающее объем V , ограниченный поверхностью S , находится в состоянии установившейся ползучести под действием поверхностных усилий, заданных на части поверхности S_σ ; на части поверхности S_ν заданы скорости смещений, на части поверхности $S_{\sigma\nu}$ — некоторые компоненты вектора скорости и тензора напряжений. В этом случае напряжения и скорости смещений должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{в } V, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}n_j = \bar{T}_i \quad \text{на } S_\sigma, \quad v_i = \bar{v}_i \quad \text{на } S_\nu, \quad v_\gamma = \bar{v}_\gamma, \quad \sigma_{\nu j}n_j = \bar{T}_\nu \quad \text{на } S_{\sigma\nu} \\ (i, j, \gamma, \nu = 1, 2, 3; \quad \gamma \neq \nu). \end{aligned} \quad (2.3)$$

В (2.3) заданные величины отмечены чертой сверху. Система (2.1)–(2.3) является замкнутой системой уравнений для определения полей скоростей и напряжений в области V , ограниченной поверхностью S .

Рассмотрим функционал

$$N = \int_v (\Lambda - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}) dV + \int_{S_\sigma} \bar{T}_i v_i dS + \int_{S_\nu} (v_i - \bar{v}_i) T_i dS + \int_{S_{\sigma\nu}} [\bar{T}_\nu v_\nu + (v_\gamma - \bar{v}_\gamma) T_\gamma] dS. \quad (2.4)$$

Вычислим вариацию функционала (2.4). Варьируя независимо напряжения и скорости смещений, с учетом соотношений (2.1) получим

$$\begin{aligned} \delta N = \int_v \left[\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_{ij}} - \varepsilon_{ij} \right) \delta \sigma_{ij} + \sigma_{ij,j} \delta v_i \right] dV + \int_{S_\sigma} (\bar{T}_i - T_i) \delta v_i dS + \\ + \int_{S_\nu} (\bar{v}_i - v_i) \delta T_i dS + \int_{S_{\sigma\nu}} [(\bar{T}_\nu - T_\nu) \delta v_\nu + (v_\gamma - \bar{v}_\gamma) \delta T_\gamma] dS. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что в случае истинного распределения напряжений и скоростей деформаций $\delta N = 0$. При независимом варьировании напряжений и скоростей смещений следствием уравнения $\delta N = 0$ являются уравнения связи между напряжениями и скоростями смещений (2.1), уравнения равновесия (2.2) и краевые условия (2.3). Варьируя в функционале (2.4) только напряжения при условии, что вариации напряжений удовлетворяют однородным краевым условиям, получим принцип минимума рассеяния дополнительной мощности. С учетом соотношений (2.1) функцию напряжений Λ можно рассматривать как функцию скоростей деформаций ε_{ij} . В случае установившейся ползучести имеет место равенство

$$\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV = \int_v (\Lambda + L) dV.$$

Подставляя это равенство в функционал (2.4) и варьируя только скорости смещений, получим принцип максимума полной мощности.

Используем функционал (2.4) для вывода уравнений осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки. Для двухслойной модели оболочки связь между скоростями деформаций, усилиями и моментами можно представить в форме

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{11} &= 2 \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{1}{2h_1h} \left[\frac{v^+}{s^+} \left((M_1 + hT_1) - \frac{1}{2} (M_2 + hT_2) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{v^-}{s^-} \left((M_1 - hT_1) - \frac{1}{2} (M_2 - hT_2) \right) \right], \\
2\varepsilon_{22} &= -2 \frac{\dot{W}}{a} = \frac{1}{2h_1h} \left[\frac{v^+}{s^+} \left((M_2 + hT_2) - \frac{1}{2} (M_1 + hT_1) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{v^-}{s^-} \left((M_2 - hT_2) - \frac{1}{2} (M_1 - hT_1) \right) \right], \\
2\kappa_{11}h &= 2h \frac{d^2\dot{W}}{dx^2} = \frac{1}{2h_1h} \left[\frac{v^+}{s^+} \left((M_1 + hT_1) - \frac{1}{2} (M_2 + hT_2) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{v^-}{s^-} \left((M_1 - hT_1) - \frac{1}{2} (M_2 - hT_2) \right) \right],
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$(s^\pm)^2 = [(M_1 \pm hT_1)^2 + (M_2 \pm hT_2)^2 - (M_1 \pm hT_1)(M_2 \pm hT_2)] / (4h_1^2h^2).$$

Момент M_2 определяется как функция M_1 , T_1 , T_2 из условия $\kappa_{22} = 0$:

$$\frac{v^+}{s^+} \left((M_2 + hT_2) - \frac{1}{2} (M_1 + hT_1) \right) + \frac{v^-}{s^-} \left((M_2 - hT_2) - \frac{1}{2} (M_1 - hT_1) \right) = 0. \tag{2.7}$$

В модели двухслойной оболочки функция Λ определяется следующим образом:

$$\Lambda = h_1 \left(\int v^+ dS^+ + \int v^- dS^- \right). \tag{2.8}$$

Соотношения (2.1) в этой модели представляются в виде

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial \Lambda}{\partial T_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial \Lambda}{\partial T_2}, \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \Lambda}{\partial M_1}. \tag{2.9}$$

С учетом (2.6)–(2.9) функционал (2.4) записывается в следующем виде:

$$N = \int_0^l (\Lambda - T_1 \varepsilon_{11} - T_2 \varepsilon_{22} - M_1 \kappa_{11} + q \dot{W}) dx + \Phi. \tag{2.10}$$

Выражение для слагаемого Φ зависит от вида краевых условий на торцах оболочки. Так, если торцы оболочки шарнирно закреплены:

$$\dot{W}(0) = M_1(0) = \dot{W}(l) = M_1(l) = 0,$$

то

$$\Phi = \left(\bar{T}_1 \dot{U} - \frac{dM_1}{dx} \dot{W} \right) \Big|_{x=0}^{x=l}. \tag{2.11}$$

Если на торцах оболочки поставлены условия жесткого защемления

$$\dot{W}(0) = \frac{d\dot{W}(0)}{dx} = \dot{W}(l) = \frac{d\dot{W}(l)}{dx} = 0,$$

то

$$\Phi = \left(\bar{T}_1 \dot{U} - \frac{dM_1}{dx} \dot{W} + M_1 \frac{d\dot{W}}{dx} \right) \Big|_{x=0}^{x=l}. \quad (2.12)$$

В соотношениях (2.11), (2.12) \bar{T}_1 — заданная продольная сила.

Варьируя в функционале (2.10) независимо усилия, моменты и скорости смещений, получаем

$$\begin{aligned} \delta N = \int_0^l & \left[\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial T_1} - \varepsilon_{11} \right) \delta T_1 + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial T_2} - \varepsilon_{22} \right) \delta T_2 + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial M_1} - \varkappa_{11} \right) \delta M_1 + \frac{dT_1}{dx} \delta \dot{U} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{d^2 M_1}{dx^2} - \frac{T_2}{a} - q \right) \delta \dot{W} \right] dx - \left(T_1 \delta \dot{U} + M_1 \delta \frac{d\dot{W}}{dx} - \frac{dM_1}{dx} \delta \dot{W} \right) \Big|_{x=0}^{x=l} + \delta \Phi, \end{aligned}$$

где

$$\delta \Phi = \left(\bar{T}_1 \delta \dot{U} - \frac{dM_1}{dx} \delta \dot{W} - \dot{W} \delta \frac{dM_1}{dx} \right) \Big|_{x=0}^{x=l}$$

в случае (2.11) и

$$\delta \Phi = \left(\bar{T}_1 \delta \dot{U} - \frac{dM_1}{dx} \delta \dot{W} + M_1 \delta \frac{d\dot{W}}{dx} + \frac{d\dot{W}}{dx} \delta M_1 - \dot{W} \delta \frac{dM_1}{dx} \right) \Big|_{x=0}^{x=l}$$

в случае (2.12). Из уравнения $\delta N = 0$ при произвольных вариациях скоростей смещений, усилий и моментов следуют уравнения равновесия симметрично нагруженной цилиндрической оболочки, краевые условия на ее торцах и уравнения связи между скоростями деформаций срединной поверхности оболочки, усилиями и моментами.

Все величины, входящие в функционал (2.10), выразим через M_1 , T_1 и \dot{W} . В результате получим

$$\begin{aligned} T_2 = -h_1 \frac{\dot{W}}{a} \left(\frac{s^+}{v^+} + \frac{s^-}{v^-} \right) + \frac{1}{2} T_1, \quad 2\varkappa_{11} h = \frac{1}{2h_1 h} \left(\frac{3}{4} \frac{v^+}{s^+} (M_1 + hT_1) + \frac{3}{4} \frac{v^-}{s^-} (M_1 - hT_1) \right), \\ (s^\pm)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{M_1}{h_1 h} \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{T_1}{h_1} \right)^2 + \frac{\dot{W}}{a} \left(\frac{s^\pm}{v^\pm} \right)^2, \quad (2.13) \\ \Lambda = h_1 \left(s^+ v^+ + s^- v^- - \int s^+ dv^+ - \int s^- dv^- \right). \end{aligned}$$

Переходя в (2.13) к безразмерным переменным, имеем

$$\begin{aligned} T_2 = h_1 s_n \left[u \left(\frac{1}{\omega^+} + \frac{1}{\omega^-} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \tau \right], \quad \varkappa_{11} = \frac{\sqrt{3}}{4h} v_n [(m + \tau)\omega^+ + (m - \tau)\omega^-], \\ \left(\frac{v^\pm}{v_n} \right)^2 = (m \pm \tau)^2 (\omega^\pm)^2 + u^2, \quad (2.14) \end{aligned}$$

$$\Lambda = h_1 s_n v_n \left[\left(\frac{v^+}{v_n} \right)^2 \frac{1}{\omega^+} + \left(\frac{v^-}{v_n} \right)^2 \frac{1}{\omega^-} - \frac{1}{2} \Psi(\omega^+) - \frac{1}{2} \Psi(\omega^-) \right],$$

где

$$\Psi(\omega^\pm) = \int \frac{1}{\omega^\pm} d \left(\frac{v^\pm}{v_n} \right)^2.$$

Подставляя (2.14) в функционал (2.10), находим

$$\bar{N} = \frac{N}{bh_1v_n s_n} = \int_0^l \left[mu'' - \frac{1}{2} \Psi(\omega^+) - \frac{1}{2} \Psi(\omega^-) + \right. \\ \left. + (m + \tau)^2 \omega^+ + (m - \tau)^2 \omega^- - 2 \left(\frac{\tau}{\sqrt{3}} - p \right) u \right] d\xi + \bar{\Phi}, \quad (2.15)$$

где

$$\xi = \frac{x}{b}, \quad b = \left(\frac{16}{3} \right)^{1/4} \sqrt{ah}, \quad p = -\frac{qa}{2h_1 s_n}.$$

Следствием вариационного уравнения $\delta \bar{N} = 0$ являются уравнение равновесия

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} - \frac{T_2}{a} - q = 0$$

и соотношение

$$\varkappa_{11} - \frac{\partial \Lambda}{\partial M_1} = 0,$$

которые в безразмерных переменных имеют вид

$$m'' - u \left(\frac{1}{\omega^+} + \frac{1}{\omega^-} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \tau + 2p = 0, \quad u'' - (m + \tau)\omega^+ + (m - \tau)\omega^- = 0. \quad (2.16)$$

Величины ω^\pm выражаются неявно через скорость прогиба u и момент m из уравнений

$$(\omega^\pm)^{2n/(n-1)} = u^2 + (m \pm \tau)^2 (\omega^\pm)^2. \quad (2.17)$$

Функционал (2.15) идентичен функционалу (1.17), а уравнения (2.16), (2.17) — уравнениям (1.16).

3. Вычисление критического времени выпучивания цилиндрических оболочек в случае ползучести. Использование функционала (2.15) в задачах выпучивания оболочек в условиях ползучести позволяет получить выражение для критического времени в явном виде. Момент времени t^* называется критическим, если при $t \rightarrow t^*$ максимальный прогиб оболочки стремится к бесконечности. Поэтому при определении величин ω^\pm из уравнений (2.17) будем считать, что определяющим является слагаемое, содержащее скорость прогиба:

$$\omega^\pm = u^{(n-1)/n} (1 + \varepsilon^\pm). \quad (3.1)$$

Здесь

$$\varepsilon^\pm = \frac{n-1}{2n} (m \pm \tau)^2 u^{-2/n}$$

в случае степенного закона ползучести.

Используем представление (3.1) в функционале (2.15) для нахождения коэффициентов $\dot{\alpha}(t)$ и $\beta(t)$, определяющих зависимость от времени пробных функций для скорости смещения u и момента m . При вычислении функционала будем удерживать величины ε^\pm только в первой степени. Дифференциальные уравнения для определения $\dot{\alpha}(t)$ и $\beta(t)$, которые следуют из уравнений $\partial \bar{N} / \partial \dot{\alpha}(t) = 0$, $\partial \bar{N} / \partial \beta(t) = 0$, можно представить в следующем виде:

$$\alpha(t) = f(\dot{\alpha}(t), \beta(t)), \quad \varphi(\dot{\alpha}(t), \beta(t)) = 0 \\ (f(\dot{\alpha}(t), \beta(t)) \rightarrow \infty \text{ при } \dot{\alpha}(t) \rightarrow \infty). \quad (3.2)$$

Вид функций f и φ зависит от используемой модели оболочки [4–7].

Общее решение уравнений (3.2) записывается в виде

$$t = \int_{q_0}^q \frac{df(q, q(\beta))}{q}.$$

Зависимость $q(\beta)$ определяется из уравнения $\varphi(q, \beta) = 0$, константа q_0 — из условия $\alpha(0) = \alpha_0$. Критическое время вычисляется по формуле

$$t^* = \int_{q_0}^{\infty} \frac{df(q, q(\beta))}{q}.$$

Заключение. Задачи о деформировании оболочек в условиях ползучести при больших деформациях, к числу которых, в частности, относится задача об определении критического времени, являются сложными геометрически и физически нелинейными задачами. Получение решения таких задач в замкнутом виде на основе полных уравнений не представляется возможным. Следует также учитывать, что константы материала, входящие в определяющие уравнения закона ползучести, в эксперименте определяются с большой погрешностью (порядка 20–30 %), поэтому применение упрощающих гипотез и приближенных моделей при решении задач ползучести оболочек вполне оправданно. Использование двухслойной модели оболочки Работнова и ее обобщений позволяет эффективно решать задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочек в условиях ползучести.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Приближенная техническая теория упругопластических оболочек // Прикл. математика и механика. 1951. Т. 15, вып. 2. С. 167–174.
2. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1965.
3. **Работнов Ю. Н.** О вариационном уравнении установившейся ползучести оболочек // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168, № 2. С. 300–303.
4. **Волчков Ю. М.** Осесимметричные задачи ползучести круговых цилиндрических оболочек // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 5. С. 118–121.
5. **Волчков Ю. М., Немировский Ю. В.** Несимметричное выпучивание цилиндрических оболочек в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1967. № 4. С. 136–138.
6. **Волчков Ю. М., Немировский Ю. В.** Выпучивание трехслойных цилиндрических оболочек в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969. № 5. С. 150–158.
7. **Волчков Ю. М.** Критическое время выпучивания при ползучести вафельных цилиндрических оболочек // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2001. Вып. 119. С. 20–23.

Поступила в редакцию 2/II 2010 г.