УДК 532.62

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДВОЙНОЙ ДИФФУЗИИ С УЧЕТОМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ И КОНВЕКТИВНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ВБЛИЗИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ, ПОМЕЩЕННОЙ В ПОРИСТУЮ СРЕДУ

А. А. Афифи[*,**], М. Дж. Уддин[***]

[*] Университет Кассима, 51452 Барайда, Саудовская Аравия
[**] Университет Хелван, 11795 Каир, Египет
[***] Американский международный университет, 1213 Дхака, Бангладеш
E-mails: afify65@yahoo.com, jashim_74@yahoo.com

Численно исследуется стационарное двумерное свободно-конвективное течение при наличии двойной диффузии вблизи вертикальной твердой поверхности, помещенной в пористую среду, и с учетом условий проскальзывания, конвективных граничных условий на твердой поверхности, излучения (поглощения) тепла и солнечного излучения. С использованием группы масштабирующих преобразований получены уравнения пограничного слоя и граничные условия. Полученные уравнения решаются методом Рунге — Кутты — Фехлберга четвертого и пятого порядков точности с помощью программного пакета Maple 13. Проанализированы профили скорости, температуры и концентрации, коэффициент проскальзывания, числа Нуссельта и Шервуда.

Ключевые слова: группы Ли, групповой анализ, тепло- и массообмен, пористая среда, течение с проскальзыванием, конвективные граничные условия.

DOI: 10.15372/PMTF20160521

Введение. Интерес к исследованию свободно-конвективного тепло- и массопереноса обусловлен его использованием в геотермальных сооружениях, системах теплоизоляции, химических реакторах, работа которых основана на диффузии через плотноупакованный слой, пористых теплообменниках, при отделении песка от нефти посредством пара, в подземных хранилищах ядерных отходов, пищевых хранилищах и при охлаждении элементов электронных устройств. Подробный обзор рассматриваемых задач приведен в работах [1, 2]. При наличии градиентов температуры и концентрации в сплошной среде происходит двойная диффузия вещества, которая имеет различную скорость. В таких задачах тепло- и массоперенос происходят одновременно [3–8]. В литературе рассматриваются случаи, когда силы, влияющие на массо- и теплоперенос, действуют как в одном направлении, так и в противоположных. Авторы работы [9] получили неавтомодельное решение для магнитогидродинамического тепло- и массопереноса вблизи вертикальной пластины, помещенной в однородную пористую среду, и обнаружили уменьшение локального числа Нуссельта вследствие пористости среды. В [10] с использованием конечно-разностного подхода рассмотрена задача сопряженного тепло- и массообмена для смешанного конвективного движения жидкости вблизи клина, помещенного в пористую среду, при различных значениях скорости граничных потоков массы и тепла. Также в [10] показано, что локальные числа Нуссельта и Шервуда увеличиваются с увеличением плавучести. В [11] изучалось течение в пограничном слое с учетом двойной диффузии в окрестности точки торможения на вертикальной поверхности, помещенной в анизотропную пористую среду. Для преобразования основных уравнений в систему обыкновенных дифференциальных уравнений использовалось преобразование подобия. Показано, что решение существует и не является единственным как для случая с сонаправленными, так и для случая с противоположно направленными силами. Использование методов группового анализа позволяет найти все решения уравнений пограничного слоя, инвариантные относительно заданных преобразований, образующих группу. Поскольку классический групповой анализ позволяет находить автомодельные решения (см., например, [12–14]), многими авторами методы группового анализа применяются для решения задач переноса [15–18]. В работе [19], в которой исследовались автомодельные решения уравнений пограничного слоя для течения жидкости, описываемой степенным реологическим законом, над проницаемой сжимаемой поверхностью, установлено, что приповерхностный градиент $-f''(0)$ уменьшается при увеличении индекса течения n как для псевдопластических, так и для дилатантных сред.

Следует отметить, что в данных исследованиях не учитываются проскальзывание и конвективные течения через поверхности, несмотря на то что они имеют место во многих реальных течениях. Поэтому необходимо исследовать двойную диффузию в пограничном слое, обусловленную наличием градиента температуры и концентрации, с учетом условий проскальзывания и конвективных граничных условий на поверхности.

Целью настоящей работы является исследование свободно-конвективного течения в пограничном слое при наличии двойной диффузии вблизи вертикальной поверхности в пористом теле с учетом проскальзывания, конвективных граничных условий на поверхности, излучения (поглощения) тепла и солнечного излучения.

1. Математическая постановка задачи. Геометрия задачи, прямоугольная система координат x, y, компоненты вектора скорости $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ и конфигурация течения показаны на рис. 1. Температура окружающей среды полагается равной T_∞, T_w — неизвестная температура пластины, левая поверхность которой нагревается посредством конвекции горячей среды с температурой $T_f > T_\infty$. Необходимо ввести переменный коэффициент теплопереноса $h_f(x/L)$. Полагается, что излучение тепла происходит в виде однонаправленного потока перпендикулярно поверхности пластины и описывается аппроксимацией Росселанда. Данная модель справедлива в случае оптически толстой среды, в которой излучение распространяется в ограниченной области, прежде чем рассеивается или поглощается средой. Концентрация окружающей среды полагается однородной и равной C_∞, неизвестная концентрация на пластине — C_w. Параметры среды полагаются постоянными, плотность может изменяться только в некоторых случаях (например, при использовании аппроксимации Буссинеска). Учитываются также внутреннее излучение и поглощение тепла. В приближении пограничного слоя наиболее соответствующие исследуемой задаче уравнения [20] запишем в размерном виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$\rho\Big(\boldsymbol{u}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{v}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\Big) = \mu\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial y^2} + \rho g\beta_T(T - T_\infty) + \rho g\beta_C(C - C_\infty) - \frac{\mu}{k(x/L)}\,\boldsymbol{u}; \tag{2}$$

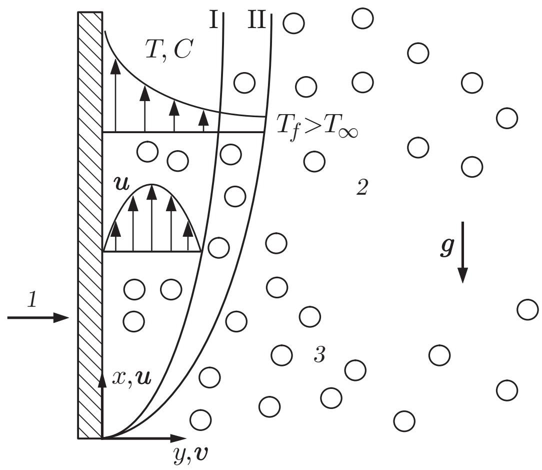


Рис. 1. Схема течения в пористой среде:
1 — горячий поток, *2* — застойная зона, *3* — пористая среда; стрелки — направление потока; I, II — границы гидродинамического и теплового пограничных слоев соответственно

$$\boldsymbol{u}\,\frac{\partial T}{\partial x} + \boldsymbol{v}\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_2}{\rho C_p}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho C_p}\,\frac{\partial q^r}{\partial y} + \frac{Q(x/L)}{\rho C_p}\,(T - T_\infty); \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}\,\frac{\partial C}{\partial x} + \boldsymbol{v}\,\frac{\partial C}{\partial y} = D\,\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} y = 0: \qquad \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{u} = N_1(x/L)\nu\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}, \quad -k_2\,\frac{\partial T}{\partial y} = h_f(x/L)[T_f - T_w], \quad C = C_w, \\ y \to \infty: \qquad \boldsymbol{u} \to 0, \quad T \to T_\infty, \quad C \to C_\infty. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь T — температура; C — концентрация; ν — кинематическая вязкость; k_2 — теплопроводность; D — коэффициент массовой диффузии среды; β_T, β_C — коэффициенты объемного тепломассопереноса; g — ускорение свободного падения; $\alpha = k_2/(\rho C_p)$ — коэффициент термодиффузии среды; ρ — плотность основной среды; μ — динамическая вязкость; $k(x/L)$ — проницаемость пористой среды; $N_1(x/L)$ — коэффициент проскальзывания; $Q(x/L)$ — объем излучаемого тепла.

С использованием диффузионного приближения Росселанда [21] находим плотность потока излучения q^r:

$$q^r = -\frac{4\sigma_1}{3k_1}\,\frac{\partial T^4}{\partial y},$$

где σ_1, k_1 — константа Стефана — Больцмана и коэффициент поглощения соответственно. Раскладывая T^4 в ряд Тейлора в окрестности T_∞ и пренебрегая членами высших порядков, запишем

$$T^4 \approx 4TT_\infty^3 - 3T_\infty^4.$$

Таким образом, выражение (3) принимает вид

$$\boldsymbol{u}\,\frac{\partial T}{\partial x} + \boldsymbol{v}\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_2}{\rho C_p}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{16\sigma_1 T_\infty^3}{3\rho C_p k_1}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q(x/L)}{\rho C_p}\,(T - T_\infty). \tag{6}$$

1.1. *Безразмерное представление уравнений.* Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{x}{L}, \quad y = \frac{y\,\mathrm{Gr}^{1/4}}{L}, \quad u = \frac{\boldsymbol{u}}{U_r}, \quad v = \frac{\boldsymbol{v}L}{\nu\,\mathrm{Gr}^{1/4}}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}, \quad \varphi = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}. \tag{7}$$

Здесь $\mathrm{Gr} = g\beta_T(T_f - T_\infty)L^3/\nu^2$ — число Грасгофа, составленное по характерной длине L; $U_r = \sqrt{g\beta_T(T_f - T_\infty)L}$ — характерная скорость [22]. Также введем функцию тока ψ:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

При этом соотношение (1) удовлетворяется полностью, выражения (2), (4), (6) преобразуются к виду

$$\Delta_1 \equiv \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} - \lambda(\theta + N\varphi) + \frac{\nu L}{k(x)U_r}\,\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0; \tag{8}$$

$$\Delta_2 \equiv \Pr\Big(\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\Big) - (1 + R)\,\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - \Pr\,\frac{Q(x)L}{\rho C_p U_r}\,\theta = 0; \tag{9}$$

$$\Delta_3 \equiv \mathrm{Sc}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{10}$$

Здесь $\Pr = \rho C_p\nu/k_2$ — число Прандтля; $\mathrm{Sc} = \nu/D$ — число Шмидта; $N = \beta_C(C_w - C_\infty)/(\beta_T(T_f - T_\infty))$ — коэффициент плавучести; $\lambda = g\beta_T L(T_f - T_\infty)/U_r^2 = 1$; $R = 16\sigma_1 T_\infty^3/(3k_1k_2)$ — параметр излучения.

Граничные условия (5) принимают вид

$$y = 0\colon \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\mathrm{Gr}^{1/4}\,N_1(x)\nu}{L}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{Lh_f(x)}{k_2\,\mathrm{Gr}^{1/4}}\,(1 - \theta), \quad \varphi = 1,$$

$$y \to \infty\colon \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} \to 0, \quad \theta \to 0, \quad \varphi \to 0.$$

1.2. *Анализ симметрий.* Рассмотрим однопараметрическую группу масштабирующих преобразований, которая является упрощенным вариантом преобразований, образующих группу Ли [23, 24]:

$$\Gamma\colon \quad x^* = x\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_1}, \quad y^* = y\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_2}, \quad \psi^* = \psi\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_3}, \quad \theta^* = \theta\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_4}, \quad \varphi^* = \varphi\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_5}, \quad h_f^* = h_f\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_6},$$
$$N_1^* = N_1\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_7}, \quad k^* = k\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_8}, \quad Q^* = Q\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_9}\,. \tag{11}$$

Здесь ε — параметр группы; α_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ — произвольные вещественные числа. Преобразование (11) рассматривается в качестве преобразования, которое переводит точку с координатами $(x, y, \psi, \theta, \varphi, h_f, N_1, k, Q)$ в точку с координатами $(x^*, y^*, \psi^*, \theta^*, \varphi^*, h_f^*, N_1^*, k^*, Q^*)$. Установим связь между параметрами α_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ с помощью соотношения

$$\Delta_j\Big(x^*, y^*, u^*, v^*, \theta^*, \varphi^*, \ldots, \frac{\partial^3\psi^*}{\partial y^{*3}}\Big) =$$
$$= H_1\Big(x, y, u, v, \theta, \varphi, \ldots, \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}; \alpha\Big)\Delta_j\Big(x, y, u, v, \theta, \varphi, \ldots, \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\Big), \quad j = 1, 2, 3,$$

согласно которому дифференциальные формы Δ_1, Δ_2, Δ_3 должны быть конформными инвариантами преобразований группы Γ [23].

Система является инвариантной относительно преобразований группы Г, если выполняются следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
2\alpha_3 - 2\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - 3\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_8,\\
\alpha_4 + \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_4 - 2\alpha_2 = \alpha_4 + \alpha_9,\\
\alpha_5 + \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_5 - 2\alpha_2.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Граничные условия являются инвариантами преобразований группы Г при выполнении условий

$$
\begin{gathered}
\alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_7 + \alpha_3 - 2\alpha_2,\\
\alpha_4 - \alpha_2 = \alpha_6 = \alpha_6 + \alpha_4,\\
\alpha_5 = 0.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Решая (12), (13), находим

$$
\alpha_4 = \alpha_5 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_7 = \frac{1}{4}\,\alpha_1, \quad \alpha_3 = \frac{3}{4}\,\alpha_1, \quad \alpha_6 = -\frac{1}{4}\,\alpha_1, \quad \alpha_8 = \frac{1}{2}\,\alpha_1, \quad \alpha_9 = -\frac{1}{2}\,\alpha_1.
$$

Для определения абсолютных инвариантов разложим преобразование (11) в ряд Тейлора, сохраняя члены до первого порядка ε включительно. Получаем

$$
\frac{dx}{x} = \frac{dy}{(1/4)y} = \frac{d\psi}{(3/4)\psi} = \frac{d\theta}{0} = \frac{d\varphi}{0} = \frac{dN_1}{(1/4)N_1} = \frac{dh_f}{(-1/4)h_f} = \frac{dk}{(1/2)k} = \frac{dQ}{(-1/2)Q}. \tag{14}
$$

1.3. *Преобразования подобия.* Решая (14), получаем следующие преобразования подобия (абсолютные инварианты):

$$
\begin{gathered}
\eta = yx^{-1/4}, \quad \psi = x^{3/4} f(\eta), \quad \theta = \theta(\eta), \quad \varphi = \varphi(\eta),\\
h_f = x^{-1/4}(h_f)_0, \quad N_1 = x^{1/4}(N_1)_0, \quad k = k_0 x^{1/2}, \quad Q = Q_0 x^{-1/2},
\end{gathered} \tag{15}
$$

где η — независимый параметр подобия; $f(\eta)$, $\theta(\eta)$, $\varphi(\eta)$ — безразмерные функции скорости, температуры, концентрации соответственно; $(h_f)_0$ — постоянный коэффициент теплопереноса; $(N_1)_0$ — гидродинамический коэффициент проскальзывания; k_0 — проницаемость пористой среды; Q_0 — количество излучаемого тепла.

1.4. *Уравнения в автомодельных переменных.* Подставляя (15) в (8)–(10), получаем уравнения

$$
f''' + (1/4)(3ff'' - 2f'^2 - 4Kf') + \lambda(\theta + N\varphi) = 0; \tag{16}
$$

$$
(1 + R)\theta'' + (3/4)\,\mathrm{Pr}\, f\theta' + \mathrm{Pr}\, G\theta = 0; \tag{17}
$$

$$
\varphi'' + (3/4)\,\mathrm{Sc}\, f\varphi' = 0 \tag{18}
$$

с граничными условиями

$$
\begin{gathered}
f(0) = 0, \quad f'(0) = af''(0), \quad \theta'(0) = -\,\mathrm{Bi}\,[1 - \theta(0)], \quad \varphi(0) = 1,\\
f'(\infty) = \theta(\infty) = \varphi(\infty) = 0,
\end{gathered} \tag{19}
$$

где производная берется по переменной η; $\mathrm{Bi} = (h_f)_0 L/(k_2\,\mathrm{Gr}^{1/4})$ — число Био; $a = (N_1)_0 \nu\,\mathrm{Gr}^{1/4} L$ — безразмерный гидродинамический коэффициент проскальзывания; $K = \nu L/(U_r k_0)$ — безразмерная проницаемость; $G = Q_0 L/(\rho C_p U_r)$ — безразмерный параметр, описывающий излучение и поглощение тепла.

Таблица 1

Значения скорости теплообмена при $\mathrm{Bi} \to \infty$ и различных значениях числа Прандтля Pr

Pr	$-\theta'(0)$	
	Данные настоящей работы	Данные работы [20]
0,01	0,180	0,162
0,72	0,387	0,387
1,00	0,401	0,401
2,00	0,426	0,426
10,00	0,464	0,465
100,00	0,489	0,490
1000,00	0,497	0,499

Искомыми физическими величинами являются коэффициент трения C_{fx}, локальное число Нуссельта Nu_x и локальное число Шервуда Sh_x, которые находятся из соотношений

$$C_{fx} = \frac{\mu}{\rho U_r^2(x)}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\Big)\Big|_{y=0}, \quad \mathrm{Nu}_x = \frac{x}{T_f - T_\infty}\Big(-\frac{\partial T}{\partial y}\Big)\Big|_{y=0}, \quad \mathrm{Sh}_x = \frac{x}{C_w - C_\infty}\Big(-\frac{\partial C}{\partial y}\Big)\Big|_{y=0}.$$

С использованием (7), (15) выражения для коэффициента трения, локальных чисел Нуссельта и Шервуда представим в безразмерной форме

$$\mathrm{Gr}_x^{1/4} C_{fx} = f''(0), \quad \mathrm{Gr}_x^{1/4}\,\mathrm{Nu}_x = -\theta'(0), \quad \mathrm{Gr}_x^{1/4}\,\mathrm{Sh}_x = -\varphi'(0),$$

где Gr_x — локальное число Грасгофа.

2. Численное решение. Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (16)–(18) с граничными условиями (19), представляющая собой краевую задачу, решалась численно с использованием программного пакета Maple 13 методом Рунге — Кутты — Фехлберга четвертого и пятого порядков при различных значениях параметров, задающих исследуемое течение. Точность метода проверялась при решении различных задач переноса [18, 25]. Граничное условие на бесконечности в (19) заменялось на условие в конечной точке $\eta_{\max}$:

$$\eta_{\max} = 15, \qquad f'(15) = \theta(15) = \varphi(15) = 0.$$

Выбор значения $\eta_{\max} = 15$ обусловлен тем, что численное решение также имеет асимптотику на бесконечности. В [26] обнаружено, что при численном решении задач конвективного тепло- и массообмена во многих исследованиях получены неверные результаты вследствие выбора малого значения η. Численные расчеты проводились при следующих значениях параметров: $0 \leqslant \mathrm{Bi} \leqslant 2$, $0 \leqslant R \leqslant 2$, $0 \leqslant K \leqslant 2$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, $0 \leqslant G \leqslant 0{,}3$, $-1 \leqslant N \leqslant 1$, $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $\mathrm{Sc} = 0{,}24$.

3. Результаты исследования и их обсуждение. Для проверки точности численного метода полученные результаты сравнивались с данными работы [20] (табл. 1). Сравнение показало, что они хорошо согласуются. Также хорошо согласуются значения $f''(0)$, $\theta'(0)$ с данными [22] при $\mathrm{Bi} \to \infty$, $a = R = K = 0$ (табл. 2). Результаты численного расчета при различных значениях безразмерных параметров приведены в табл. 3. Из табл. 3 следует, что вследствие равномерного распределения числа Био, безразмерного параметра излучения, количества излучаемого тепла и коэффициента проскальзывания напряжение сдвига, скорости тепло- и массопереноса уменьшаются при увеличении безразмерной проницаемости. Также обнаружено, что напряжение сдвига, скорость тепло- и массопереноса увеличиваются при увеличении числа Био и параметра плавучести вдоль пластины.

Таблица 2

Значения коэффициента трения и скорости теплообмена при различных значениях числа Прандтля Pr

Pr	$-f''(0)$		$-\theta'(0)$	
	Данные работы [22]	Данные настоящей работы	Данные работы [22]	Данные настоящей работы
0,72	0,6760	0,676 02	0,5046	0,504 63
1,00	0,6421	0,642 19	0,5671	0,567 15
10,00	0,4192	0,419 19	1,1694	1,169 33

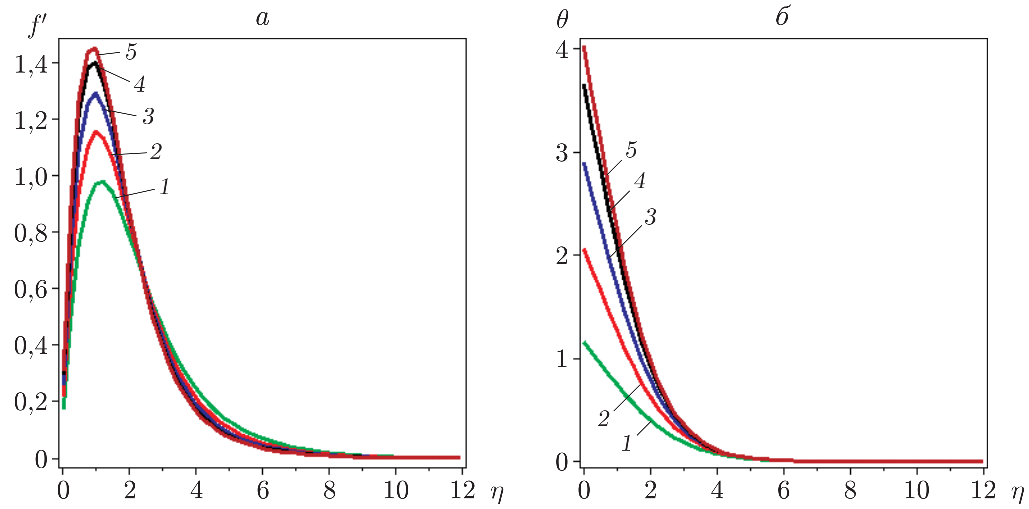
Таблица 3

Значения коэффициента трения, скоростей тепло- и массообмена при $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $\mathrm{Sc} = 0{,}24$ и различных значениях параметров K, N, G, a, Bi, R, λ

K	N	G	a	Bi	R	λ	$f''(0)$	$-\theta'(0)$	$-\varphi'(0)$
0,1	0,1	0,10	0,1	0,1	0,1	1,0	0,497 612	0,065 543	0,183 437
0,5	0,1	0,10	0,1	0,1	0,1	1,0	0,442 875	0,060 536	0,174 352
1,0	0,1	0,10	0,1	0,1	0,1	1,0	0,402 692	0,054 901	0,167 407
1,0	0,5	0,10	0,1	0,1	0,1	1,0	0,779 532	0,072 974	0,206 939
0,1	1,0	0,10	0,1	0,1	0,1	1,0	1,131 216	0,077 262	0,231 749
0,1	0,1	0,15	0,1	0,1	0,1	1,0	0,517 824	0,061 849	0,226 268
0,1	0,1	0,18	0,1	0,1	0,1	1,0	0,557 065	0,058 093	0,228 785
0,1	0,1	0,10	0,5	0,1	0,1	1,0	0,371 884	0,068 087	0,188 984
0,1	0,1	0,10	1,0	0,1	0,1	1,0	0,279 671	0,069 639	0,192 817
0,1	0,1	0,10	0,1	0,5	0,1	1,0	0,745 404	0,165 996	0,199 246
0,1	0,1	0,10	0,1	1,0	0,1	1,0	0,830 363	0,209 475	0,204 038
0,1	0,1	0,10	0,1	0,1	1,0	1,0	0,573 449	0,062 723	0,194 673
0,1	0,1	0,10	0,1	0,1	2,0	1,0	0,546 043	0,061 016	0,190 542

Все параметры уменьшаются с увеличением параметра интенсивности излучения. Также установлено, что напряжение сдвига и скорость массообмена увеличиваются в областях, где теплообмен уменьшается вследствие увеличения параметра интенсивности излучения. Сдвиговое напряжение уменьшается в областях, где скорости тепло- и массообмена увеличиваются вследствие уменьшения безразмерного коэффициента проскальзывания. При увеличении безразмерного коэффициента проскальзывания среда скользит по пластине с большей скоростью, при этом коэффициент трения стремится к нулю. На рис. 2–7 приведены профили скорости, температуры и концентрации при $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $\mathrm{Sc} = 0{,}24$ и различных значениях числа Био Bi, параметров проскальзывания a, излучения R, проницаемости K, поглощения (излучения) тепла G и плавучести N.

На рис. 2 видно, что при увеличении числа Био скорость вблизи пластины увеличивается, вдали от нее — уменьшается, при этом температура увеличивается, концентрация уменьшается. При $\mathrm{Bi} = 0$ левая поверхность пластины является термически изолированной от среды, находящейся справа от пластины (внутреннее термическое сопротивление пластины велико), и конвективного теплообмена между левой и правой поверхностями пластины не происходит. Заметим, что при $\mathrm{Bi} = 0$ максимальное значение скорости мало. При увеличении числа Био термическое сопротивление пластины уменьшается, вследствие чего максимальное значение скорости и скорость в его окрестности значительно увеличиваются. Также при увеличении числа Био температура жидкости на правой поверхности пластины увеличивается, термическое сопротивление пластины уменьшается, скорость



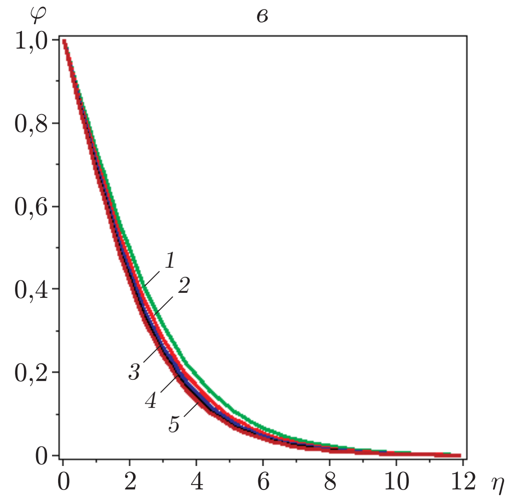


Рис. 2. Профили скорости (*а*), температуры (*б*) и концентрации (*в*) при $N = \lambda = 1$, $a = G = K = 0{,}1$, $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $\mathrm{Sc} = 0{,}24$, $R = 0{,}5$ и различных значениях числа Био:
1 — $\mathrm{Bi} = 0{,}4$, *2* — $\mathrm{Bi} = 0{,}8$, *3* — $\mathrm{Bi} = 1{,}2$, *4* — $\mathrm{Bi} = 1{,}6$, *5* — $\mathrm{Bi} = 1{,}8$

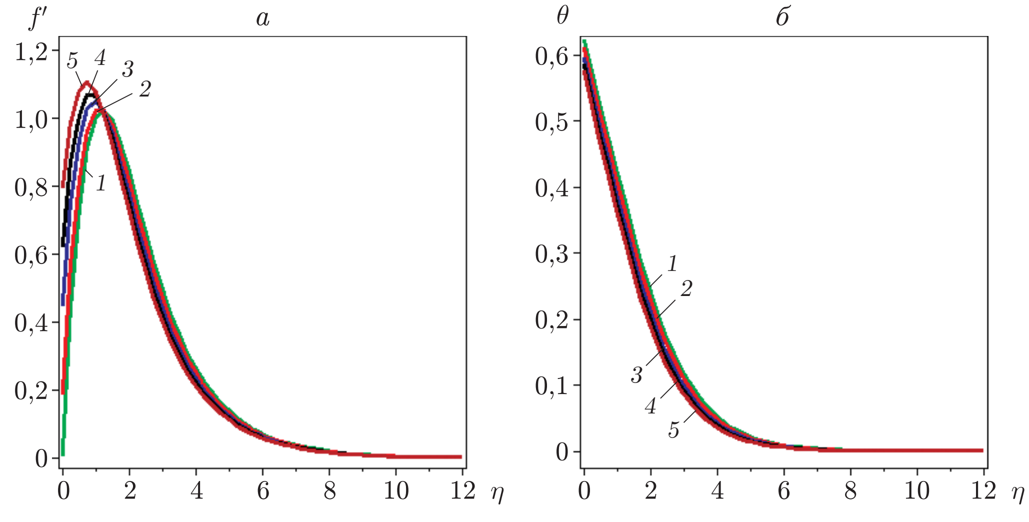


Рис. 3. Профили скорости (*а*) и температуры (*б*) при $N = \lambda = 1$, $G = K = 0{,}1$, $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $\mathrm{Sc} = 0{,}24$, $\mathrm{Bi} = R = 0{,}5$ и различных значениях параметра проскальзывания a:
1 — $a = 0$, *2* — $a = 0{,}1$, *3* — $a = 0{,}3$, *4* — $a = 0{,}5$, *5* — $a = 0{,}8$

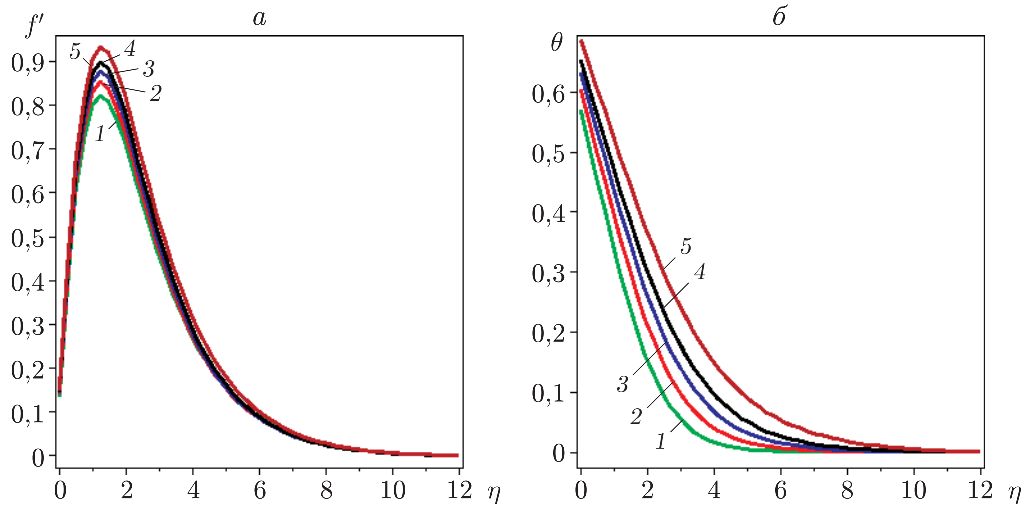
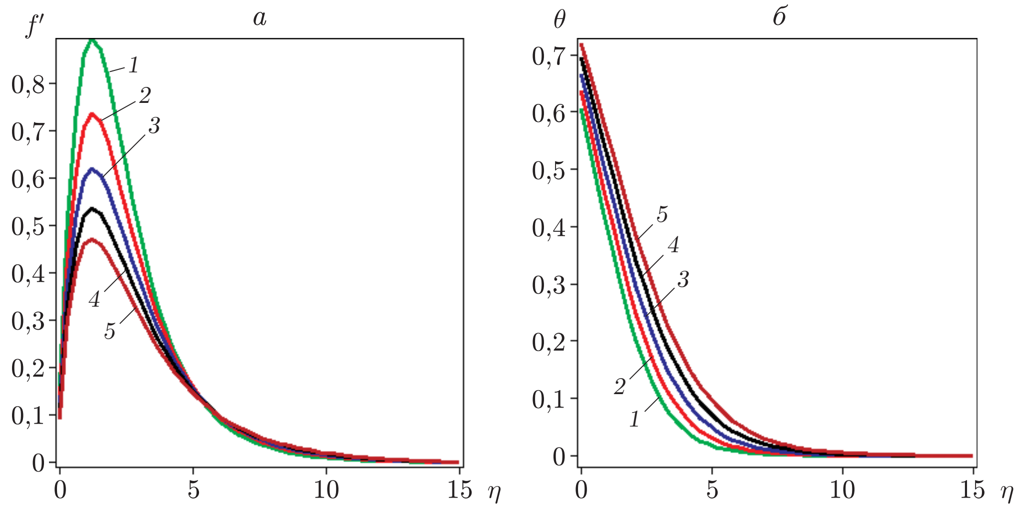


Рис. 4. Профили скорости (*а*) и температуры (*б*) при $N = \lambda = 1$, $\mathrm{Bi} = 0{,}5$, $a = G = K = 0{,}1$, $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $\mathrm{Sc} = 0{,}24$, и различных значениях параметра излучения R:
1 — $R = 0$, *2* — $R = 0{,}4$, *3* — $R = 0{,}8$, *4* — $R = 1{,}2$, *5* — $R = 2{,}0$



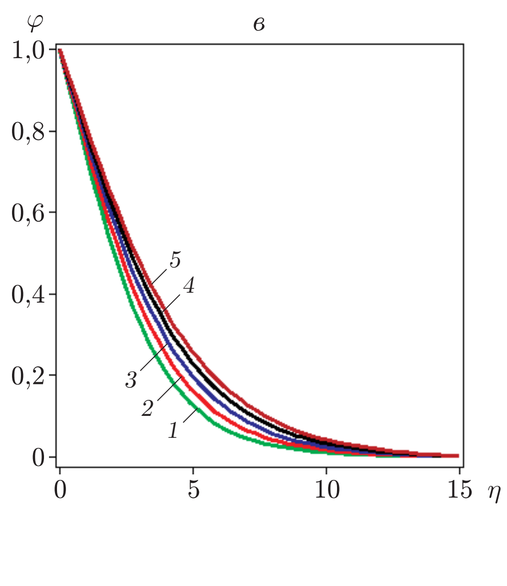


Рис. 5. Профили скорости (*а*), температуры (*б*) и концентрации (*в*) при $N = \lambda = 1$, $\mathrm{Bi} = R = 0{,}5$, $a = G = 0{,}1$, $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $\mathrm{Sc} = 0{,}24$ и различных значениях параметра проницаемости K:
1 — $K = 0$, *2* — $K = 0{,}5$, *3* — $K = 1{,}0$, *4* — $K = 1{,}5$, *5* — $K = 2{,}0$

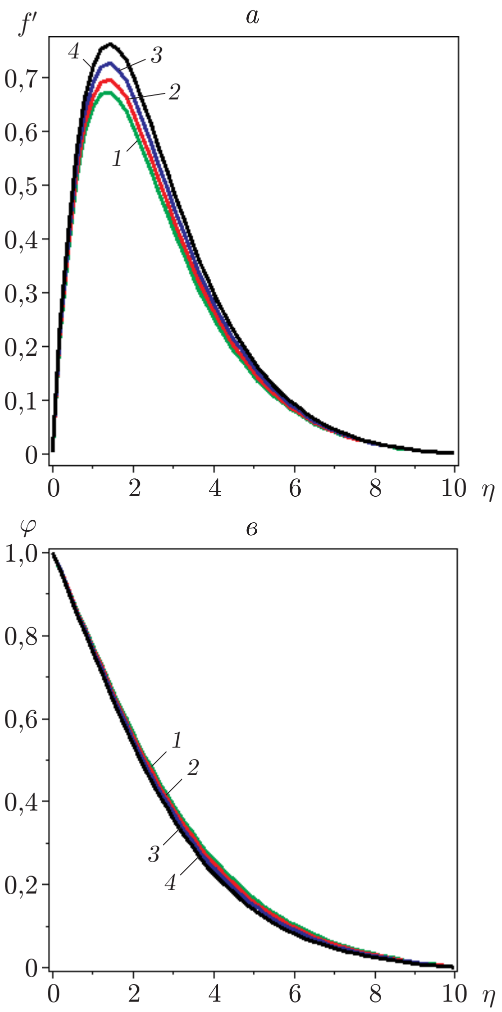


Рис. 6. Профили скорости (a), температуры ($б$) и концентрации ($в$) при $N = 0{,}5$, $\lambda = R = 1{,}0$, $\mathrm{Bi} = 1000$, $a = 0$, $K = 0{,}5$, $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $\mathrm{Sc} = 0{,}24$ и различных значениях параметра поглощения (излучения) тепла G:
1 — $G = 0$, *2* — $G = 0{,}1$, *3* — $G = 0{,}2$, *4* — $G = 0{,}3$

тепломассообмена между жидкостью справа от пластины и пластиной увеличивается (см. табл. 3).

Из рис. 3 следует, что при увеличении параметра a скорость в окрестности пластины увеличивается, вдали от нее — уменьшается. При учете условий проскальзывания импульс, действующий на пластину, не полностью передается жидкости, поэтому при увеличении параметра проскальзывания скорость уменьшается. В пограничном слое увеличение параметра проскальзывания a приводит к уменьшению температуры жидкости и как следствие к уменьшению толщины теплового пограничного слоя.

На рис. 4 видно, что при увеличении параметра излучения R скорость и температура увеличиваются. При уменьшении коэффициента поглощения Росселанда k_1 происходит уменьшение скорости теплопереноса и увеличение дивергенции $\partial q_r/\partial y$ и как следствие увеличение температуры.

На рис. 5 видно, что при увеличении параметра проницаемости K температура и концентрация увеличиваются, скорость уменьшается. В пористой среде сопротивление течению жидкости увеличивается, что приводит к уменьшению скорости и увеличению температуры и концентрации.

На рис. 6 видно, что при увеличении параметра излучения (поглощения) тепла G скорость и температура увеличиваются, а концентрация уменьшается.

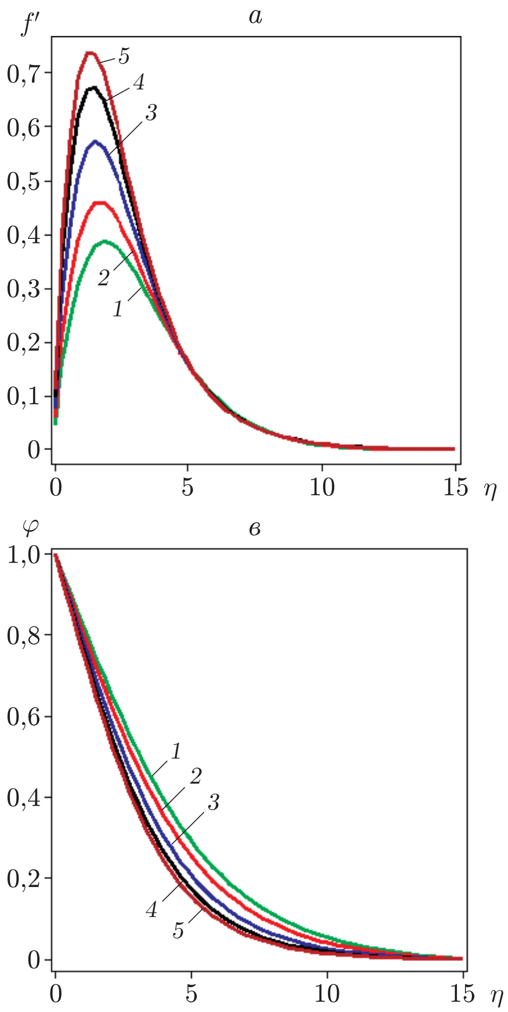


Рис. 7. Профили скорости (*а*), температуры (*б*) и концентрации (*в*) при $\mathrm{Bi} = 0{,}5$, $\lambda = R = 1{,}0$, $\mathrm{Sc} = 0{,}24$ $G = K = a = 0{,}1$, $\mathrm{Pr} = 0{,}72$ и различных значениях параметра плавучести N:
1 — $N = -0{,}5$, *2* — $N = -0{,}3$, *3* — $N = 0$, *4* — $N = 0{,}3$, *5* — $N = 0{,}5$

Увеличение скорости движения жидкости вдоль поверхности обусловлено наличием плавучести (градиенты концентрации и температуры имеют одно направление ($N > 0$)). При увеличении G толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев увеличиваются, толщина концентрационного пограничного слоя уменьшается.

Профили скорости, температуры и концентрации при различных значениях параметра плавучести приведены на рис. 7. При $N > 0$ происходит увеличение скорости и уменьшение температуры и концентрации. При $N < 0$ скорость уменьшается, температура и концентрация увеличиваются.

4. Выводы. В работе численно исследовано стационарное двумерное свободноконвективное течение при наличии двойной диффузии в пограничном слое вблизи вертикальной поверхности, помещенной в пористую среду. С использованием методов группового анализа впервые получены инвариантные преобразования основных уравнений, с помощью которых они приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. С учетом сказанного выше можно сделать следующие основные выводы.

Полученные результаты могут иметь различные приложения для жидкостных систем включая растягивающиеся материалы.

Увеличение параметра проницаемости приводит к уменьшению сдвигового напряжения, скорости тепло- и массообмена.

Увеличение числа Био и параметра плавучести приводит к увеличению напряжения сдвига, скорости тепло- и массообмена, однако при увеличении параметра излучения эти параметры уменьшаются. При увеличении коэффициента проскальзывания сдвиговое напряжение уменьшается, скорости тепло- и массообмена увеличиваются.

Увеличение числа Био приводит к увеличению скорости и температуры и уменьшению концентрации.

Увеличение коэффициента проскальзывания приводит к увеличению скорости и уменьшению температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nield D. A.** Convection in porous media / D. A. Nield, A. Bejan. N. Y.: Springer, 2013.
2. **Ingham D.** Transport phenomena in porous media III / D. Ingham, I. Pop. Oxford: Elsevier, 2005.
3. **Béghein C., Haghighat F., Allard F.** Numerical study of double-diffusive natural convection in a square cavity // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1992. V. 35. P. 833–846.
4. **Chamkha A. J., Al-Naser H.** Hydro magnetic double-diffusive convection in a rectangular enclosure with opposing temperature and concentration gradients // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2002. V. 45. P. 2465–2483.
5. **Costa V. A. F.** Double diffusive natural convection in a square enclosure with heat and mass diffusive walls // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1997. V. 40. P. 4061–4071.
6. **Mehta J. M.** Analysis of double-diffusive convection with temperature modulations at the boundaries // Intern. J. Heat Fluid Flow. 1992. V. 13. P. 160–167.
7. **Sun H., Lauriat G., Sun D. L., Tao W. Q.** Transient double-diffusive convection in an enclosure with large density variations // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2010. V. 53. P. 615–625.
8. **Chamkha A. J., Al-Naser H.** Double-diffusive convection in an inclined porous enclosure with opposing temperature and concentration gradients // Intern. J. Thermal Sci. 2001. V. 40. P. 227–244.
9. **Chamkha A. J., Khaled A. A.** Nonsimilar hydromagnetic simultaneous heat and mass transfer by mixed convection from a vertical plate embedded in a uniform porous medium // Numer. Heat Transfer. Pt A. 1999. V. 36. P. 327–344.
10. **Yih K. A.** Coupled heat and mass transfer in mixed convection over a VHF/VMF wedge in porous media: the entire regime // Acta Mech. 1999. V. 137. P. 1–12.
11. **Bachok N., Ishak A., Pop I.** Mixed convection boundary layer flow near the stagnation point on a vertical surface embedded in a porous medium with anisotropy effect // Transport Porous Media. 2010. V. 82. P. 363–373.
12. **Hansen A. G.** Similarity analysis of boundary layer problems in engineering. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964.
13. **Bluman G. W.** Symmetries and differential equations / G. W. Bluman, S. Kumei. N. Y.: Springer, 1989.
14. **Ibragimov N. H.** Elementary lie group analysis and ordinary differential equations. N. Y.: Wiley, 1999.
15. **Afify A. A.** Some new exact solutions for MHD aligned creeping flow and heat transfer in second grade fluids by using Lie group analysis // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. Ser. A. 2009. V. 70. P. 3298–3306.

16. **Uddin M. J., Khan W. A., Ismail A. I.** Scaling group transformation for MHD boundary layer slip flow of a nanofluid over a convectively heated stretching sheet with heat generation // Math. Problems Engng. 2012. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: http://dx.doi.org/10.1155/2012/934964.
17. **Afify A. A., Elgazery N. S.** Lie group analysis for the effects of chemical reaction on MHD stagnation-point flow of heat and mass transfer towards a heated porous stretching sheet with suction or injection // Nonlinear Anal. Model. Control. 2012. V. 17. P. 1–15.
18. **Uddin M. J., Yusoff N. H. M., Bég O. A., Ismail A. I. M.** Lie group analysis and numerical solutions for non-Newtonian nanofluid flow in a porous medium with internal heat generation // Phys. Scripta. 2013. V. 87. P. 1–14.
19. **Jalil M., Asghar S.** Flow of power-law fluid over a stretching surface: A Lie group analysis // Intern. J. Non-Linear Mech. 2013. V. 48. P. 65–71.
20. **Bejan A.** Convection heat transfer. N. Y.: Wiley, 2004.
21. **Sparrow E. M.** Radiation heat transfer / E. M. Sparrow, R. D. Cess. Washington: Hemisphere, 1978.
22. **Ostrach S.** An analysis of laminar free-convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force. S. l., 1953. (Rep. / NACA; N 1111). P. 63–79.
23. **Tapanidis T., Tsagas Gr., Mazumdar H. P.** Application of scaling group of transformations to viscoelastic second grade fluid flow // Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2003. N 8. P. 345–350.
24. **Mukhopadhyay S., Layek G. C.** Effects of variable fluid viscosity on flow past a heated stretching sheet embedded in a porous medium in presence of heat source/sink // Meccanica. 2012. V. 47. P. 863–876.
25. **White R. E.** Computational methods in chemical engineering with Maple applications / R. E. White, V. R. Subramanian. Berlin: Springer, 2010.
26. **Pantokratoras A.** A common error made in investigation of boundary layer flows // Appl. Math. Model. 2009. V. 33. P. 413–422.

Поступила в редакцию 25/VII 2014 г.,
в окончательном варианте — 17/X 2014 г.