

УДК 532.59

О КРИТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ ПО ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

В. И. Букреев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Приведены четыре экспериментально полученных примера неустойчивых и резонансных режимов генерации внутренних волн движущимся или колеблющимся цилиндром. Два из них можно трактовать как проявление эффекта критического слоя, но не по фазовой, а по групповой скорости распространения малых возмущений, один — как проявление эффекта уплотнения энергии двух волн, еще один пример допускает обе указанные трактовки.

Рассматривается двумерное стационарное течение с заданными распределениями скорости u и плотности ρ по координате z , направленной вертикально вверх. Дополнительные пояснения приведены на рис. 1. В невозмущенном состоянии выполнено условие устойчивости $d\rho/dz \leq 0$ во всей области, занятой жидкостью. Как частный случай рассматривается двухслойная покоящаяся жидкость ($u = 0$, ρ меняется скачкообразно). В эту систему вносится двумерное возмущение движением цилиндра диаметром D по закону

$$x_* = x_0 - Ut, \quad z_* = h + a \sin(\Omega t + \varphi_0),$$

где x_* , z_* — координаты оси цилиндра в неподвижной системе, показанной на рис. 1; x_0 , U , h , a , Ω и φ_0 — параметры. Как частные случаи рассматриваются чисто поступательный ($\Omega = 0$) и чисто колебательный ($U = 0$) законы движения.

Задача содержит ряд характерных скоростей. Для линейных волн кроме явно заданных величин u и U существенны фазовая c и групповая c_g скорости распространения малых гармонических возмущений. Существенно, что для гравитационных волн в жидкости c и c_g , как правило, не совпадают. Для нелинейных возмущений понятие групповой скорости теряет смысл, но важную роль играет предельная скорость распространения уединенных волн c_s^{\max} .

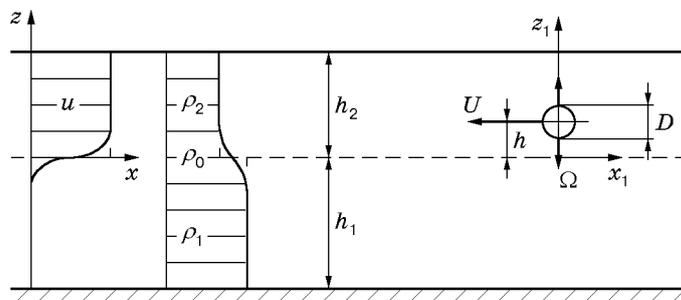


Рис. 1. Схема задачи

Одним из наиболее информативных признаков критического состояния является равенство каких-либо характерных скоростей. В данной работе основное внимание уделяется условиям $c_g = u$ и $c_g = U$. Для сравнения приводится также информация о критических состояниях при выполнении условий $c = u$, $c_g = c$ и $c_s^{\max} = u$.

Результаты анализа реакции системы на малое возмущение при $c = u$ явились одним из стимулов развития линейной теории гидродинамической устойчивости. В этой теории на основное течение накладывается малое возмущение, функция тока которого имеет вид

$$\psi = \Psi(z) \exp [i(kx - \omega t)], \quad i = \sqrt{-1}, \quad (1)$$

где x — продольная координата; t — время; k — волновое число; ω — круговая частота. Для возмущения (1) фазовая и групповая скорости определяются соотношениями $c = \omega/k$ и $c_g = d\omega/dk$.

Lord Rayleigh J. W. S. [1], анализируя в линейном приближении случай идеальной однородной по плотности жидкости ($\rho = \text{const}$), получил для амплитуды возмущения уравнение

$$(u - c) \left(\frac{d^2 \Psi}{dz^2} - k^2 \Psi \right) - \frac{d^2 u}{dz^2} \Psi = 0.$$

При $u = c$ оно имеет лишь тривиальное решение $\Psi = 0$. Значения z , при которых $u = c$, называют критическим слоем (или критическим уровнем) [2], в данном случае по фазовой скорости. В дальнейшем неопределенность при $u = c$ устранялась двумя способами: учетом нелинейности и учетом реальных физических свойств жидкости.

При учете реальных физических свойств жидкости W. M. F. Orr [3] и A. Sommerfeld [4] получили уравнение

$$(u - c) \left(\frac{d^2 \Psi}{dz^2} - k^2 \Psi \right) - \frac{d^2 u}{dz^2} \Psi + \frac{i\nu}{k} \left(\frac{d^4 \Psi}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + k^4 \Psi \right) = 0,$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости. При $\rho = \text{const}$ оно решает проблему критического слоя по фазовой скорости.

Для идеальной стратифицированной по плотности жидкости G. I. Taylor [5] и S. Goldstein [6] получили уравнение

$$(u - c)^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dz^2} - k^2 \Psi \right) - \left[(u - c) \frac{d^2 u}{dz^2} - N^2 \right] \Psi = 0, \quad N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \quad (2)$$

(g — ускорение свободного падения), имеющее квадратичную особенность при $u = c$.

P. G. Drazin [7] учел вязкость жидкости и получил уравнение

$$(u - c)^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dz^2} - k^2 \Psi \right) - \left[(u - c) \frac{d^2 u}{dz^2} - N^2 \right] \Psi + \frac{i\nu}{k} (u - c) \left(\frac{d^4 \Psi}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + k^4 \Psi \right) = 0.$$

Но это не привело к устранению неопределенности при $u = c$. Только дополнительный учет молекулярной диффузии той субстанции (тепла или инородной примеси), которая создает стратификацию по плотности, позволил решить проблему.

P. Hazel [8] получил уравнение

$$L(\Psi) = 0, \quad (3)$$

$$L = (u - c)^2 (d^2 - k^2) - [u - c + a(d^2 - k^2)] \frac{d^2 u}{dz^2} + N^2 + ab(d^2 - k^2)^3 - (u - c)(a + b)(d^2 - k^2)^2,$$

где $d = d/dz$; $a = i\chi/k$; $b = i\nu/k$; χ — коэффициент молекулярной диффузии. Все предыдущие уравнения являются частными случаями (3).

Влияние молекулярной диффузии на устойчивость сдвигового течения стратифицированной жидкости экспериментально изучалось в [9], где дан обзор работ, в которых выполнены численные расчеты.

Равенство нулю коэффициентов $(u - c_g)^2$ и $u - c_g$ соответствует критическому слою по групповой скорости. Эти коэффициенты появляются во втором приближении при разложении в ряд по амплитуде возмущения. На этом пути А. К. Liu и D. J. Benney [10] получили уравнение

$$\left[(u - c_g)^2 \frac{d^2}{dz^2} - (u - c_g) \frac{d^2 u}{dz^2} + N^2 \right] \Psi_1 = \Psi^2 f_0, \quad (4)$$

где Ψ определяется уравнением (2); Ψ_1 — амплитуда функции тока дрейфового течения, порожденного слабонелинейной волной; f_0 — некоторая функция от z , u , N , c , $c - c_g$, явное выражение для которой получено в [10]. Это выражение очень громоздкое и здесь не приводится. Можно отметить только, что при $u = c_g$

$$\Psi_1 = \Psi^2 \frac{c - c_g}{(u - c)^2}.$$

Экспериментально физические процессы в критических слоях по групповой скорости специально не изучались. Данная работа частично восполняет этот пробел. Далее приводятся некоторые результаты трех серий опытов в бассейне с плоским горизонтальным дном длиной 4,8 м и шириной 0,2 м (рис. 1).

В сериях опытов I ($\Omega = 0$) и II ($U = 0$) нижний слой (слабый раствор глицерина в воде) покоился, а верхний слой (дистиллированная вода) двигался со скоростью u . За счет молекулярной вязкости и молекулярной диффузии между водой и раствором формировались прослойки с малыми (порядка 1 см) характерными толщинами δ_1 для плотности и δ_2 для скорости. До некоторого значения разности скоростей между слоями эти прослойки стабилизировали течение (см., например, [2]), и в рассматриваемых примерах невозмущенное состояние системы было устойчивым. Постоянное значение скорости u и относительно малый уровень турбулентных флуктуаций (среднеквадратичное значение менее $0,02u$) обеспечивались специальными устройствами, расположенными на входе в рабочую часть бассейна. Поверхность, на которой $\rho = \rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2$, принимается далее за условную границу раздела слоев.

В серии опытов III изучался случай двухслойной покоящейся в невозмущенном состоянии жидкости ($\delta_1 = \delta_2 = 0$, $u = 0$). Стратификация создавалась с помощью воды и керосина, а устойчивость невозмущенного состояния к неконтролируемым возмущениям обеспечивалась межфазным натяжением.

Жидкости имели следующие плотности: вода — $(0,999 \pm 0,001)$ г/см³, керосин — $(0,8 \pm 0,001)$ г/см³, раствор глицерина — $(1,013 \pm 0,002)$ г/см³. Коэффициенты кинематической вязкости были равны: для воды — $(0,0105 \pm 0,0004)$ см²/с, для раствора глицерина — $(0,0108 \pm 0,0005)$ см²/с, для керосина — $(0,0170 \pm 0,0005)$ см²/с. Коэффициент молекулярной диффузии глицерина в воде был равен примерно $0,4 \cdot 10^{-5}$ см²/с. Коэффициент межфазного натяжения между водой и керосином равнялся $(40 \pm 4) \cdot 10^{-3}$ Н/м. Верхней границей служила свободная поверхность, однако параметры возмущения таковы, что в математических моделях ее можно заменить твердой крышкой. Это установлено на основе теоретических и экспериментальных данных из [11] и подтверждено специальными контрольными опытами.

Цилиндр закреплялся на буксировочной тележке с помощью двух телескопических державок, погруженная в жидкость часть которых имела диаметр 3 мм. Зазоры между торцами цилиндра и боковыми стенками бассейна были порядка 1 мм. Вертикальные колебания цилиндра осуществлялись специальным устройством, позволяющим менять амплитуду a

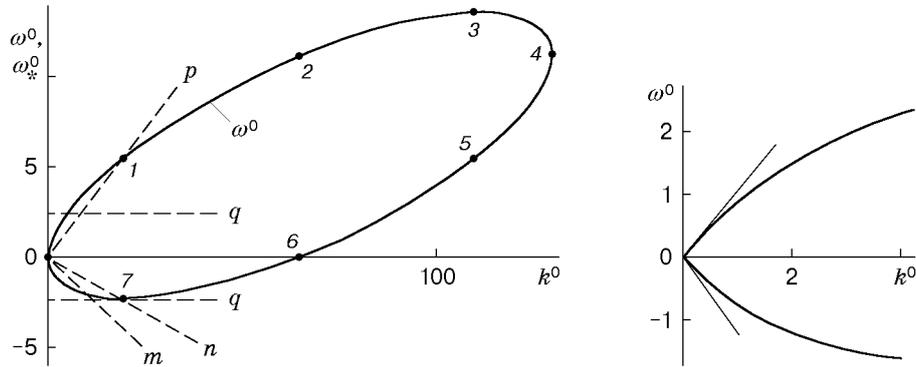


Рис. 2. Дисперсионная кривая линейной теории и характеристики возмущений для серий опытов I и II

и частоту Ω колебаний. Строго синусоидальный характер колебаний обеспечивался специальным кулисным механизмом.

Движение цилиндра начиналось из состояния покоя, так что в общем случае множество заданных параметров включало характерные времена выхода на стационарные режимы поступательного и колебательного движений. Для рассматриваемых далее примеров значения этих параметров были порядка 0,2 с при общем времени движения 30–120 с, так что их роль была второстепенной. В результате предварительных опытов найдено такое значение начального положения цилиндра x_0 по отношению к правой торцевой стенке бассейна (рис. 1), при котором влиянием этого параметра можно было пренебречь. Наблюдения за процессами прекращались, как только в рассматриваемую координату x приходили внутренние волны, отразившиеся от торцевых стенок бассейна.

В опытах с водой и керосином отклонения границы раздела от положения равновесия η измерялись волномерами, описанными в [11]. В опытах с непрерывно стратифицированной жидкостью более информативной была фотосъемка. При ее использовании нижний слой (или линия равной плотности $\rho = \rho_0 = \text{const}$) окрашивался чернилами. В качестве основных характерных масштабов длины и времени принимаются соответственно h_2 и $\sqrt{h_2/(\varepsilon g)}$ ($\varepsilon = (\rho_1/\rho_2) - 1$). Используются неподвижная (x, z) и подвижная (x_1, z_1) системы координат, показанные на рис. 1.

Планирование опытов осуществлялось на основе графоаналитического метода, суть которого поясняется на примере сдвигового течения идеальной двухслойной жидкости без учета межфазного натяжения при замене свободной поверхности твердой крышкой (рис. 2).

На фазовой плоскости ($k^0 = kh_2$, $\omega^0 = \omega\sqrt{h_2/(\varepsilon g)}$) строился график дисперсионного соотношения линейной теории $\omega^0(k^0)$, которое в рассматриваемом случае имеет вид [11]

$$\omega^0 = k^0 \left[\sqrt{f} \pm \sqrt{\frac{\text{th } k^0}{k^0(A+1)} - Af} \right], \tag{5}$$

где $f = F/(1+A)^2$; $F = u^2/(\varepsilon gh_2)$; $A = [(1+\varepsilon)\text{th } k^0]/\text{th}(k^0 H^0)$; $H^0 = h_1/h_2$; система координат связана с нижним слоем. Для покоящейся в невозмущенном состоянии жидкости в (5) надо положить $F = 0$. Формула (5) содержит три независимых параметра ε , F и H^0 . При $\varepsilon \ll 1$ роль самого параметра ε мала и существенно только произведение εg . График на рис. 2 построен при $h_2 = 18,5$ см, $\varepsilon = 0,013$, $F = 0,031$ ($u = 27$ см/с), $H^0 = 1,24$. Отдельным фрагментом в увеличенном масштабе показана область малых значений k^0 .

На рис. 2 выделены восемь симметрично расположенных особых точек по фазовой и групповой скоростям распространения возмущений. В точке $(0, 0)$ фазовая скорость при-

нимает экстремальное значение, и имеет место одно из наиболее критических условий

$$c_g^0 \rightarrow c^0 \rightarrow c_m^0 = \sqrt{f} \pm \sqrt{\frac{1}{A+1} - Af} \quad \text{при} \quad k^0 \rightarrow 0.$$

При $c^0 > c_m^0$ линейная теория неприменима. В первом приближении теории мелкой воды здесь существуют только разрывные решения, соответствующие на практике обрушивающимся волнам. Однако опыты [12, 13] показали, что обрушение волн на мелкой воде происходит лишь при скорости распространения их переднего фронта $c_l > c_s^{\max} > c_m$, а в диапазоне $c_m < c_l < c_s^{\max}$ реализуются гладкие волны типа ондулярных, кноидальных, уединенных и др. Второе приближение теории мелкой воды достаточно хорошо отражает этот факт [11–13]. С физической точки зрения обрушение нелинейных волн на мелкой воде начинается при $u = c_l$.

Критические условия имеют место также в точке 4, где групповая скорость обращается в бесконечность. Эта точка соответствует нижней границе волновых чисел тех возмущений, которые неустойчивы по механизму Кельвина — Гельмгольца [14].

В точке 2 фазовая скорость равна скорости движения верхнего слоя, а в точке 6 — нижнего, т. е. имеют место условия, определяющие критический слой по фазовой скорости. В точках 1, 3, 5 и 7 выполняются условия, которые определяют критический слой по групповой скорости. Точки 3 и 7 ограничивают также область существования линейных гармонических волн по параметру ω^0 . Между точками 3 и 4, а также 6 и 7 скорости c_g^0 и c^0 имеют разные знаки. На дуге 4–5–6 $c_g^0 > c^0$, и согласно [14, 15] здесь существуют волны “отрицательной энергии”.

На плоскости (k^0, ω^0) наряду с $\omega^0(k^0)$ строилась характеристика вносимого возмущения $\omega_*^0(k^0)$. При совместном поступательном и колебательном движении цилиндра, которое имело место в серии опытов III, характеристика возмущения представляет собой три параллельные прямые:

$$\omega_{*1}^0 = k^0 U^0, \quad \omega_{*2}^0 = k^0 U^0 + \Omega^0, \quad \omega_{*3}^0 = k^0 U^0 - \Omega^0, \quad (6)$$

где $U^0 = U/\sqrt{\varepsilon g h}$; $\Omega^0 = \Omega\sqrt{h_2/(\varepsilon g)}$. По точкам пересечения $\omega^0(k^0)$ и $\omega_*^0(k^0)$ можно судить о длине, частоте, фазовой и групповой скоростях распространения стационарных линейных гармонических волн, порождаемых данным возмущением. При варьировании параметров системы и возмущения прямые (6) могут иметь с кривой (5) до пяти точек пересечения. Особый интерес представляют такие сочетания параметров, при которых прямые (6) пересекают кривую (5) в каких-либо выделенных выше особых точках или касаются ее. Далее обсуждаются именно такие примеры.

В частном случае чисто поступательного движения (серия опытов I) $\Omega = 0$ и три прямые (6) сливаются в одну: $\omega_{*1} = \omega_{*2} = \omega_{*3} = k^0 U^0$. При чисто колебательном движении (серия опытов II) $U = 0$ и характеристика возмущения представлена двумя прямыми: $\omega_{*2,3} = \pm \Omega^0$.

Зависимость (5) соответствует идеализированной системе. В области больших k^0 вязкость, молекулярная диффузия и межфазное натяжение существенно влияют на $\omega^0(k^0)$. В данной работе вычислялись дисперсионные соотношения с учетом этих факторов. Сравнение показало, что при малых k^0 (от $k^0 = 0$ до $k^0 \simeq 12$) формула (5) давала хорошую точность, и для значений k^0 именно из этой области в опытах задавались параметры F , h/h_2 , D/h_2 , a/h_2 и $\delta_{1,2}/h_2$.

Прямые m , n , p на рис. 2 — характеристики возмущений из серии опытов I. Для характеристики m скорость движения цилиндра $U^0 = -0,305$. Точка ее пересечения с $\omega^0(k^0)$ не является особой точкой, и цилиндр генерирует гладкую, почти синусоидальную волну. Ее фотография приведена на рис. 3, а. Длина, частота, фазовая и групповая скорости

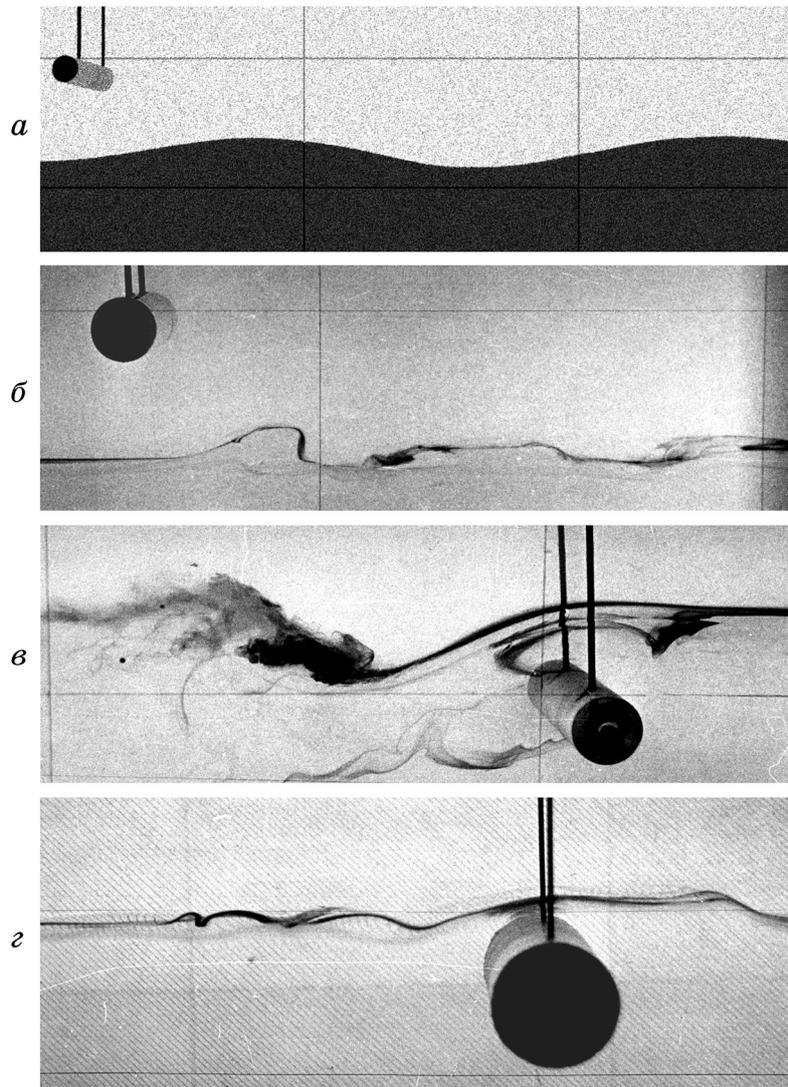


Рис. 3. Примеры физических процессов в сдвиговом потоке:
а, б, в, г соответствуют характеристикам возмущений *m, n, p, q* на рис. 2

этой волны хорошо описываются линейной теорией, а амплитуда примерно на 30 % больше полученной в расчетах, в которых цилиндр имитируется диполем. Причины такого расхождения обсуждаются в [11]. Цилиндр движется справа налево в верхнем слое на расстоянии от условной границы раздела $h/D = 3$, $D = 2$ см. Верхний слой движется вправо, нижний слой, окрашенный чернилами, покоится.

Характеристике *n* соответствуют скорость цилиндра $U^0 = -0,126$, $D = 3$ см, $h/D = 3$, остальные параметры те же, что на рис. 3, *а*. По абсолютной величине скорость цилиндра меньше, чем в предыдущем примере, и на первый взгляд волны должны быть еще более устойчивыми. Однако в данном случае точка пересечения характеристик системы и возмущения относится к числу особых точек по групповой скорости и волны оказываются неустойчивыми (рис. 3, *б*).

Характеристике *p* соответствует скорость цилиндра $U^0 = 0,305$, точка пересечения также является особой, и возмущение также неустойчиво (рис. 3, *в*). Цилиндр диаметром 3 см движется в нижнем слое в том же направлении, что и верхний слой, слегка обгоняя его. Следует отметить, что в приведенных примерах в критическом состоянии по групповой

скорости распространения возмущений находился либо весь верхний, либо весь нижний слой.

Характеристика q относится к опытам серии II с чисто колебательным движением цилиндра. Ее нижняя ветвь касается дисперсионной кривой в особой точке 7. Реакция системы на это возмущение показана рис. 3,2 ($D = 7,5$ см, амплитуда колебаний $a/D = 0,5$, $h/D = -1,25$). Несмотря на то что диаметр цилиндра значительно больше, чем в серии I, он генерирует слабые бесформенные волны, которые не могут распространяться далеко вверх по потоку и обрушиваются.

Отметим, что по терминологии [14] в серии II реализован режим уплотнения энергии двух волн, когда две точки пересечения $\omega(k)$ и $\omega_*(k)$ сливаются. То, что при этом не произошло усиления волн, можно объяснить определенными соотношениями между фазами отдельных гармонических составляющих данного возмущения. Хорошо известная аналогичная ситуация имеет место в определенном диапазоне скоростей распространения гравитационных и капиллярных волн, когда они гасят друг друга [16].

В отсутствие сдвига скорости между слоями возможны два критических условия по групповой скорости. Одно из них такое же, как при наличии сдвига скорости между слоями: $c_g = c$ при $k \rightarrow 0$. Другое условие $c_g = U$ имеет место, например, при поступательно-колебательном движении цилиндра. В рамках модели идеальной безграничной двухслойной жидкости и без учета межфазного натяжения это условие имеет место, если параметры закона движения (6) удовлетворяют соотношению [17]

$$\frac{(1 + \varepsilon)U\Omega}{\varepsilon g} = \frac{1}{4}. \quad (7)$$

Варьируя конкретные значения U , Ω и ε , но так, чтобы выполнялось условие (7), можно получить множество критических режимов по групповой скорости. В серии опытов III реализован ряд таких режимов. Следует отметить, что вязкость и межфазное натяжение меняют условие (7), что учитывалось при планировании опытов на основе изложенного выше графоаналитического метода. Погрешность не превышала нескольких процентов. Однако для резонансного режима она оказалась существенной. Наиболее четко выраженные физические эффекты наблюдались при сочетаниях параметров, ранее заданных в экспериментальной части работы [17]: $h_1 = 30$ см, $h_2 = 15$ см, $D = 1$ см, $h = 3$ см, $a = 0,5$ см, $\varepsilon = 0,25$. Параметры U и Ω варьировались.

На рис. 4 приведены экспериментальные зависимости отклонения границы раздела от положения равновесия $\eta(t)$, полученные неподвижным волномером при $x - x_0 = -150$ см [17]. Начало отсчета t связано с моментом старта цилиндра. Ось η пересекает ось t в

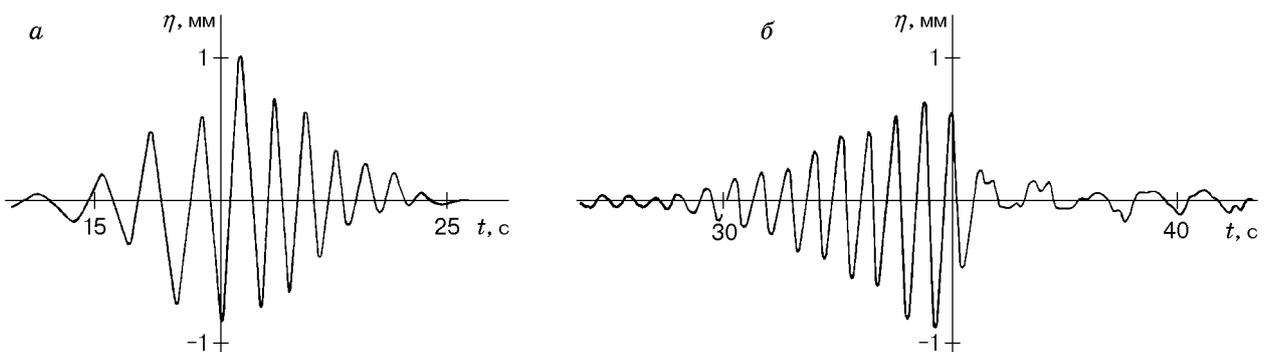


Рис. 4. Резонансный (а) и околорезонансный (б) режимы при поступательно-колебательном движении цилиндра в двухслойной покоящейся жидкости

точке, соответствующей моменту прохода оси цилиндра над волномером. Возмущения перед цилиндром расположены слева от оси η .

Кривая на рис. 4,а получена при $U = -8,44$ см/с, $\Omega/(2\pi) = 0,51$ Гц, и с поправкой на влияние вязкости и межфазного натяжения условие резонанса выполнено точно. В этом случае в окрестности цилиндра формируется стационарный волновой пакет, огибающая которого напоминает уединенную волну. Непосредственно под цилиндром период колебаний существенно меняется.

Данный режим также можно трактовать как эффект уплотнения энергии двух волн. В отличие от режима, представленного на рис. 3,з, в этом режиме имело место многократное усиление амплитуды возмущения по сравнению со случаями чисто поступательного или чисто колебательного движения цилиндра с теми же параметрами.

Кривая на рис. 4,б получена при $U = -4,28$ см/с, $\Omega/(2\pi) = 1,03$ Гц. С учетом влияния вязкости и межфазного натяжения параметры U и Ω меньше критических всего на 3%. Однако картина волн существенно меняется. Она нестационарна, а многократное усиление возмущений имеет место только перед цилиндром. Следует отметить, что в резонансном режиме и в некоторой его окрестности очень важную роль играет параметр φ_0 в законе движения цилиндра. При варьировании φ_0 в резонансном режиме непосредственно под цилиндром формировались либо гребень, либо впадина, либо промежуточное между ними значение η . В околорезонансных режимах от этого параметра зависит, где происходит усиление волн: перед цилиндром или за ним.

Данные, приведенные на рис. 4, позволили выяснить, какой из двух путей более эффективен при теоретическом анализе критических режимов генерации волн: учет в модели физических факторов или учет нелинейности. Сравнение с линейной теорией показало [17], что без учета вязкости она хорошо описывает фазовую картину волн, но предсказывает неограниченный рост их амплитуды. Учет вязкости в линейной модели привел к удовлетворительному согласованию с экспериментом и по амплитудам волн.

Таким образом, приведенные примеры показывают, что критические условия по групповой скорости распространения возмущений играют важную роль в проблеме устойчивости гравитационных волн. Величина c_g характеризует среднюю скорость переноса энергии гармонического возмущения. Поэтому в критических условиях по c_g перестройка течения оказывается более быстрой и сильной, чем в критических условиях по c . Вместе с тем из полученной теоретической и экспериментальной информации следует, что в критических слоях по c_g потеря устойчивости происходит, по-видимому, по жесткому типу, т. е. интенсивность возмущения должна превысить некоторое пороговое значение. Это подтверждается двумя фактами: 1) неопределенность при $c_g = u$ появляется лишь в нелинейном приближении по амплитуде возмущения (4); 2) для течений, представленных на рис. 3,б,в, число Ричардсона $Ri = \varepsilon g \delta / u^2$ было значительно больше критического значения $Ri = 0,25$, и по линейной теории возмущение должно было быть устойчивым [2]. Нет сомнений, что для бесконечно малых возмущений этот теоретический результат справедлив. Он подтверждается экспериментально и для достаточно малых реальных возмущений (см. рис. 3,а), но не в критических условиях по групповой скорости.

Автор выражает благодарность Е. Ф. Ведерникову и А. В. Гусеву за помощь в проведении опытов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rayleigh J. W. S.** On the stability, or instability of certain fluid motions // Proc. London Math. Soc. 1880. V. 9. P. 57–70.
2. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.

3. **Orr W. M. F.** The stability or instability of a perfect liquid and a viscous liquid // Proc. Roy. Irish Acad. 1907. V. 27. P. 9–138.
4. **Sommerfeld A.** Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen // Atti del 4 Congr. Intern. Mat. Roma. 1908. V. III. P. 116–124.
5. **Taylor G. I.** Effect of variation of density on the superposed streams of fluid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1931. V. 132, N 820. P. 499–523.
6. **Goldstein S.** On the stability of superposed streams of fluids of different densities // Ibid. P. 524–548.
7. **Drazin P. G.** On stability of parallel flow of an incompressible fluid of variable density and viscosity // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1962. V. 58, N 4. P. 546–561.
8. **Hazel P.** The effect of viscosity and heat conduction on internal gravity waves at a critical level // J. Fluid Mech. 1967. V. 30, pt 4. P. 775–784.
9. **Букреев В. И., Гусев А. В., Романов Е. М.** Влияние молекулярной диффузии на устойчивость сдвиговых течений стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 1. С. 35–40.
10. **Liu A. K., Benney D. J.** The evolution of nonlinear wave trains in stratified shear flow // Stud. Appl. Math. 1981. V. 64, N 3. P. 247–269.
11. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
12. **Букреев В. И., Романов Е. М., Туранов Н. П.** Обрушение гравитационных волн в окрестности второй критической скорости их распространения // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 52–58.
13. **Букреев В. И., Гусев А. В.** Волны в канале впереди вертикальной пластины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 1. С. 82–90.
14. **Степанянц Ю. А., Фабрикант А. Л.** Распространение волн в сдвиговых гидродинамических течениях // Успехи физ. наук. 1989. Т. 159, вып. 1. С. 83–123.
15. **Cairns R. A.** The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows // J. Fluid Mech. 1979. V. 92, pt 1. P. 1–14.
16. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
17. **Букреев В. И., Гусев А. В., Стурова И. В.** Генерация внутренних волн при совместном поступательном и колебательном движении цилиндра в двухслойной жидкости // ПМТФ. 1986. № 3. С. 63–70.

Поступила в редакцию 22/VII 1999 г.
