

ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ МАХОВСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ СУЖАЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ

А. Е. Медведев, В. М. Фомин

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложена приближенно-аналитическая модель для расчета параметров стационарного течения газа внутри плоского сужающегося канала, образованного двумя симметрично расположенными клиньями. При углах раскрытия клина больше некоторого критического значения в канале формируется маховская конфигурация ударных волн (тройная точка). Расчет течения в сужающемся канале сводится к решению итерационной задачи для системы нелинейных алгебраических уравнений. Представленная модель течения газа описывает конфигурацию ударных волн, контактного разрыва и звуковой линии. Сравнение результатов, полученных на основе данной модели, с экспериментальными данными показывает, что данная модель с достаточной степенью точности позволяет рассчитать высоту «ножки» Маха и длину дозвуковой области течения.

Исследования течения в плоских каналах, образованных двумя симметрично расположенными клиньями, вызваны интересом к вопросам неоднозначности [1–3] определения критериев перехода от регулярного к нерегулярному (маховскому) отражению косоугольной ударной волны от плоскости симметрии. Не касаясь вопроса выбора критического угла клина (далее считается, что угол клина больше критического) и связанных с этим проблем, отметим, что до сих пор не ясна качественная картина течения с маховским отражением в канале. Инженерный подход [4, 5] дает хорошее совпадение с экспериментальными результатами по высоте «ножки» Маха, но в силу приближенности модели дает заниженную длину дозвуковой области за «ножкой» Маха [2]. В работе [6] аналитически рассчитывается взаимодействие веера волн разрежения, образованного на задней кромке клина, с отраженной ударной волной и контактным разрывом. После этого уточняется местоположение горловины одномерного сопла для расчета высоты «ножки» Маха по модели [5].

Рассмотрим плоский канал, образованный двумя симметрично расположенными клиньями. Газ со сверхзвуковой скоростью натекает слева. В силу симметричности задачи будем рассматривать только верхнюю полуплоскость с клином ABG и осью симметрии ON (рис. 1). На рис. 1 T — тройная точка, AT — присоединенная ударная волна, TO — прямая ударная волна — «ножка» Маха, TF — косоугольная ударная волна, TE — контактный разрыв, GF — первая характеристика веера волн разрежения, FE — преломленная на ударной волне TF первая характеристика волны разрежения, EN — звуковая линия, 1–4 — области течения газа. Линейные размеры и угловые параметры рассматриваемой задачи: Y_1 — входное полусечение канала, Y_m — высота «ножки» Маха, L — размер клина, Y_* — расстояние от оси симметрии до контактного разрыва, L_* — длина области дозвукового течения, образованной осью симметрии и контактным разрывом, от прямой ударной волны TO до звуковой линии EN , P — расстояние между ударной волной TO и задней кромкой клина BG ($P > 0$, если «ножка» Маха расположена вниз по потоку от задней кромки клина, $P < 0$ — в противном случае). Угловые параметры задачи: θ — угол клина, β — угол присоединенной ударной волны, ε — угол наклона контактного разрыва

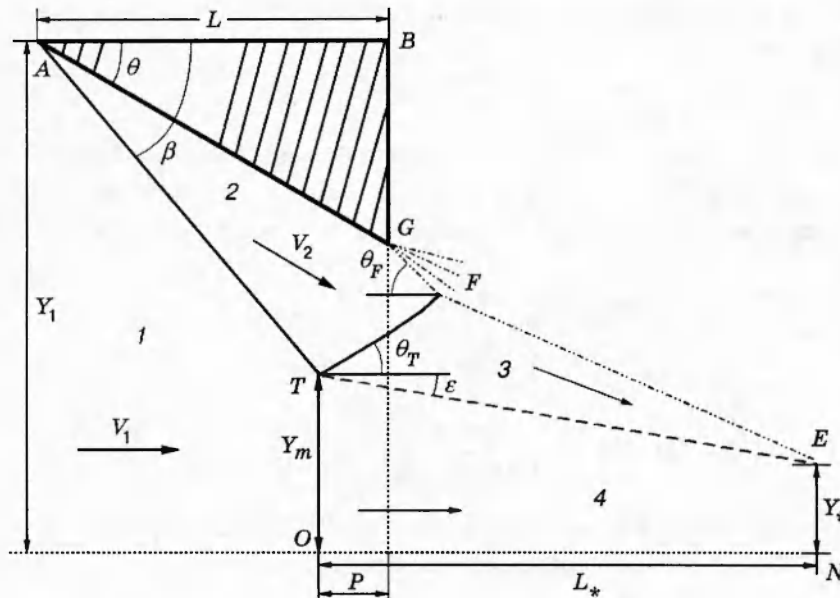


Рис. 1

в точке T , θ_T — угол наклона ударной волны TF в точке T , θ_F — угол между ударной волной TF и характеристикой GF . Кроме того, известны параметры набегающего потока: скорость V_1 , число Маха M_1 и давление P_1 .

В соответствии с рис. 1 расчетная модель основана на следующих предположениях:

1) угол клина больше критического, и реализуется конфигурация с тройной точкой T , при этом угол $\beta > \beta_N$, где β_N определяется из уравнения [7]

$$\operatorname{ctg}^4 \beta_N - \frac{\gamma \mu^2 (\xi + \mu^2) + (1 - \xi)^2}{(\xi + \mu^2)(1 + \xi \mu^2)} \operatorname{ctg}^2 \beta_N - \frac{\gamma (\xi + \mu^2)}{(1 + \xi \mu^2)^2} = 0$$

($\mu^2 = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, $\xi = P_1/P_2$, γ — показатель политропы газа, P_1 и P_2 — давление перед и за косой ударной волной AT соответственно);

2) клин достаточно короток, длина клина L такова, что ударная волна TF не попадает на сторону клина AG ;

3) ударные волны AT и TO прямые, волна TF криволинейная, звуковая линия EN прямая;

4) первая характеристика волны разрежения FE пересекается с контактным разрывом TE в точке E звуковой линии EN .

Пусть в области 1 (рис. 1) заданы параметры клина (длина L и угол θ) и параметры набегающего потока (давление P_1 , скорость V_1 и число Маха M_1).

Решение в области 2 находится аналитически по известным соотношениям [7]. Угол наклона присоединенной ударной волны θ определяется из уравнения

$$\theta = \operatorname{arccctg} \left\{ \left[\frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)} - 1 \right] \operatorname{tg} \beta \right\}. \quad (1)$$

Число Маха M_2 и давление P_2 рассчитываются по формулам

$$M_2 = \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} + \frac{2M_1^2 \cos^2 \beta}{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}}, \quad P_2 = \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) + 1 \right] P_1. \quad (2)$$

Для нахождения угла ε примем обычное условие равенства давлений по обе стороны контактного разрыва:

$$P_{30} = P_{40}.$$

Здесь $P_{40} = \{[2\gamma/(\gamma + 1)](M_1^2 - 1) + 1\}P_1$ — давление за ударной волной TO в области 4; $P_{30} = \{[2\gamma/(\gamma + 1)](M_2^2 \sin^2 \beta_{23} - 1) + 1\}P_2$ — давление за ударной волной TF .

Отсюда найдем угол между ударной волной TF и вектором скорости V_2 в точке T :

$$\beta_{23} = \arcsin \left\{ \frac{1}{M_2} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{P_{30}}{P_2} - 1 \right) + 1} \right\}. \quad (3)$$

Тогда

$$\varepsilon = \theta - \operatorname{arccctg} \left\{ \left[\frac{(\gamma + 1)M_2^2}{2(M_2^2 \sin^2 \beta_{23} - 1)} - 1 \right] \operatorname{tg} \beta_{23} \right\}. \quad (4)$$

Угол θ_T наклона TF к оси x (в точке T) и угол θ_F между первой характеристикой GF волны разрежения и осью x определяются выражениями

$$\theta_T = \beta_{23} - \theta, \quad \theta_F = \arcsin \frac{1}{M_2} + \theta. \quad (5)$$

Область течения газа $TOEN$ (рис. 1) рассмотрим в рамках модели одномерного течения газа в канале переменного сечения.

Течение газа за TF в области 3 является сверхзвуковым. В области 2 течение газа безвихревое, тогда, согласно [8, 9], за ударной волной TF (при малой кривизне TF , что будет показано ниже) в области 3 течение остается безвихревым, т. е. потенциальным. Для такого течения газа, когда заданы условия на характеристике FE и контактной границе TE , известно приближенное аналитическое решение [10], основанное на аппроксимации Христиановича [11] для функции Чаплыгина.

Для решения задачи в области 4 имеем следующую систему уравнений: высота «ножки» Маха

$$\frac{Y_m}{L} = \frac{1}{M_{40}} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{40}^2 \right) \right]^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)} \frac{Y_*}{L}; \quad (6)$$

длина канала

$$\frac{L_*}{L} = \left(\frac{Y_m}{L} - \frac{Y_*}{L} \right) \operatorname{ctg} \varepsilon. \quad (7)$$

После нахождения высоты Y_m/L определим величину P/L , как и в [4], из уравнения

$$\frac{P}{L} = \frac{(Y_t/L - Y_m/L) + (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \beta}, \quad (8)$$

где $Y_t/L = Y_1/L - \operatorname{tg} \theta$.

Из решения в области 4 найдем:

— координаты контактного разрыва TE

$$y/L = Y_m/L - (x/L) \operatorname{tg} \varepsilon \quad (9)$$

(x — расстояние от точки O вдоль оси симметрии);

— давление на TE

$$p = p^* \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_4^2 \right) \right]^{-\gamma/(\gamma - 1)}, \quad (10)$$

где

$$p^* = P_{40} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{40}^2 \right) \right]^{\gamma/(\gamma-1)},$$

— давление на звуковой линии EN ; число Маха M_4 в области 4 находится из уравнения

$$\frac{y}{L} = \frac{1}{M_4} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_4^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \frac{Y_*}{L}; \quad (11)$$

— число Маха на TE со стороны области 3

$$M_3^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p}{p_n} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]. \quad (12)$$

Здесь

$$p_n = P_{30} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{30}^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)};$$

$$M_{30} = \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2\gamma M_2^2 \sin^2 \beta_{23} - (\gamma - 1)} + \frac{2M_2^2 \cos^2 \beta_{23}}{(\gamma - 1)M_2^2 \sin^2 \beta_{23} + 2}}$$

— число Маха за ударной волной TF .

В области 3 введем характеристические переменные ξ и η :

$$\xi = 0,5(\tau + \vartheta), \quad \eta = 0,5(\tau - \vartheta),$$

где $\tau = 1 - h \arctg(z/h) + \arctg z$; $z = \sqrt{(\lambda^2 - 1)/(1 - \lambda^2/h^2)}$; $h = \sqrt{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}$; ϑ — угол наклона вектора скорости к оси x .

Рассмотрим характеристический треугольник TKE (рис. 2), образованный характеристиками TK ($\xi = \xi_1 = \text{const}$) и KFE ($\eta = \eta_1 = \text{const}$). На линии TE из уравнений (9)–(11) определяются функции $\eta = \omega_1(\xi)$ и $\xi = \omega_2(\eta)$, тогда уравнение контактного разрыва TE можно получить в виде

$$x = x_1(\xi) = x_2(\eta), \quad y = y_1(\xi) = y_2(\eta). \quad (13)$$

Решение задачи Коши для области $TKEF$, ограниченной характеристиками TK , KFE и линией тока TE (контактным разрывом), дается формулами [10]

$$x = \frac{\varphi(\xi) + \psi(\eta)}{\text{tg } 2\xi + \text{tg } 2\eta}, \quad \bar{y} = \frac{-\text{tg } 2\eta \cdot \varphi(\xi) + \text{tg } 2\xi \cdot \psi(\eta)}{\text{tg } 2\xi + \text{tg } 2\eta}, \quad (14)$$

где

$$\varphi(\xi) = \frac{[y_1(\xi) - \text{tg } 2\xi \cdot x_1(\xi)][\text{tg } 2\xi + \text{tg } 2\omega_1(\xi)]}{-\text{tg } 2\omega_1(\xi) - \text{tg } 2\xi},$$

$$\psi(\eta) = \frac{[y_2(\eta) + \text{tg } 2\eta \cdot x_2(\eta)][\text{tg } 2\omega_2(\eta) + \text{tg } 2\eta]}{\text{tg } 2\omega_2(\eta) + \text{tg } 2\eta}.$$

Система нелинейных уравнений (1)–(14) дает решение задачи об определении параметров течения с маховской конфигурацией ударных волн, показанной на рис. 1.

Ударная волна TF (рис. 2) строится из условия совместимости решений в областях 2 и 3. По известному полю скорости газа в области 3 и начальному углу θ_T наклона ударной волны в точке T определяется положение криволинейной ударной волны TF . За кривой ударной волной TF течение газа является вихревым. Определим среднюю кривизну K_{TF} ударной волны TF как $K_{TF} = L_{TF}/(2\pi R_{TF})$. Здесь L_{TF} — длина кривой TF ; R_{TF} — средний (по длине кривой TF) радиус окружностей, имеющих в каждой точке TF касание

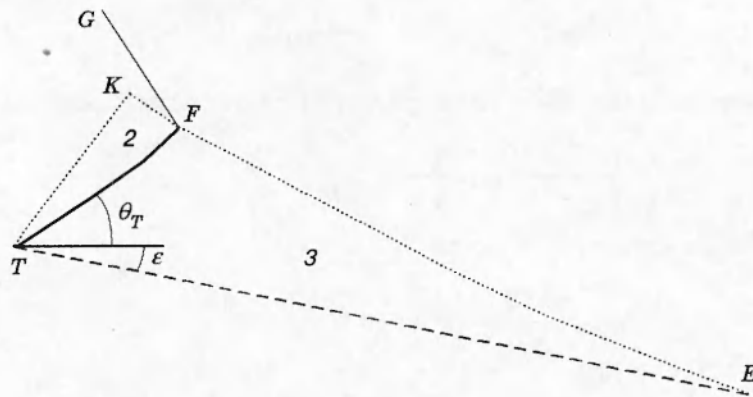


Рис. 2

с кривой TF не ниже второго порядка. Заметим, что для прямой $\bar{K} = 0$, для окружности $\bar{K} = 1$.

В таблице для двух значений M_1 и различных значений угла β (при $Y_t/L = 0,37$ и $\gamma = 1,4$) приведены результаты расчета высоты «ножки» Маха Y_m/w , длины L_*/L дозвуковой области 4 по данной модели и модели [4]. В последней графе приведены значения средней кривизны \bar{K}_{TF} , вычисленные по данной модели. Видно, что средняя кривизна K_{TF} ударной волны TF является малой. Основное отклонение от угла θ_T происходит вблизи точки F . Это связано с тем, что давление на контактном разрыве TE резко падает вблизи звуковой точки E [8]. При малой кривизне скачка и слабой ударной волне, согласно [12], завихренность течения за скачком является величиной третьего порядка малости по сравнению с возмущениями скорости газа. Поэтому с достаточной степенью точности течение в области 3 можно считать безвихревым, т. е. потенциальным.

На рис. 3 сравниваются экспериментальные результаты [1] (значки) и расчетные (линии) для приведенной высоты «ножки» Маха, здесь $w = L/\cos\theta$. Эксперименты [1] и расчеты проводились при $\gamma = 1,4$ и $Y_t/L = 0,37$. Расчеты по модели [4] при этих параметрах

M_1	β , град	Y_m/w	Y_m/w (модель [4])	Различие, %	L_*/L	L_*/L (модель [4])	Различие, %	K_{TF}
5	31,0	0,0030	0,0029	3,45	0,2154	0,1910	12,77	0,0040
	32,0	0,0186	0,0180	3,33	0,2310	0,2049	12,74	0,0040
	33,0	0,0360	0,0349	3,15	0,2483	0,2203	12,71	0,0040
	34,0	0,0554	0,0539	2,78	0,2674	0,2375	12,59	0,0041
	35,0	0,0773	0,0754	2,52	0,2884	0,2565	12,44	0,0042
	36,0	0,1020	0,0998	2,20	0,3118	0,2777	12,28	0,0042
	37,0	0,1299	0,1275	1,18	0,3373	0,3013	11,95	0,0043
10	25,4	0,00075	0,0004	90,00	0,0830	0,0403	106,0	0,0030
	26,4	0,0058	0,0032	81,25	0,0978	0,0500	95,60	0,0031
	27,4	0,0122	0,0072	69,44	0,1117	0,0606	84,32	0,0032
	28,4	0,0201	0,0124	62,10	0,1274	0,0724	75,97	0,0032
	29,4	0,0297	0,0190	56,32	0,1444	0,0853	69,28	0,0032
	30,4	0,0409	0,0272	50,37	0,1620	0,0994	62,98	0,0033
	31,4	0,0542	0,0373	45,31	0,1815	0,1150	57,83	0,0034

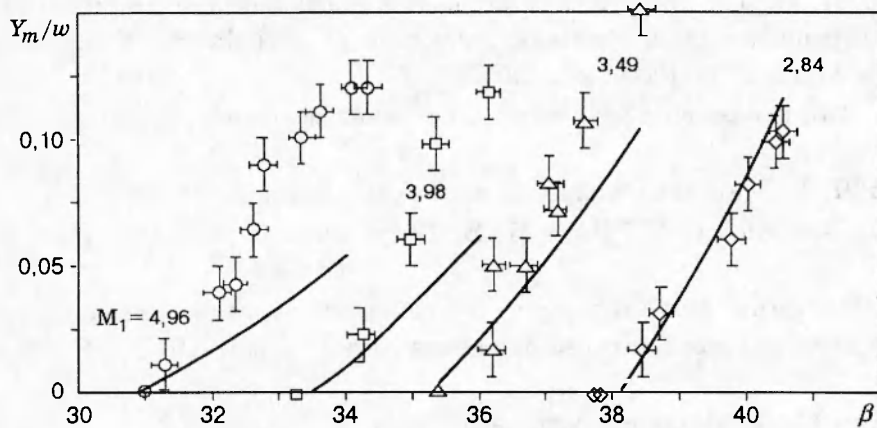


Рис. 3

(рис. 3) дают очень близкие результаты по высоте «ножки» Маха (см. таблицу). Различие результатов, полученных по данной модели и модели [4], наблюдается в значениях длины L_*/L дозвуковой области 4, различие значений высоты «ножки» Маха существенно лишь при больших числах Маха.

Сравнение результатов расчетов по предложенной модели и модели [4] показало (см. таблицу), что при умеренных числах Маха ($M_1 < 10$) различие значений Y_m/w порядка нескольких процентов. Расчеты по нашей модели и модели [4] дают близкие результаты при использовании начальных условий, приведенных в работе [1]. Различие значений L_*/L при $M_1 < 10$ порядка 12%. При $M_1 = 10$ различие значений Y_m/w для моделей составляет от 50 до 90%, а значений L_*/L — от 50 до 100%.

Из результатов прямого численного моделирования течения [2] в рассматриваемой геометрии (см. рис. 1) видно, что длина L_*/L больше, чем рассчитанная по модели [4], и близка к рассчитанной по предложенной модели.

Сравнение с экспериментальными данными [1] (рис. 3) показало хорошее совпадение расчетных и экспериментальных результатов при $M_1 = 2,84$ и $3,49$. При $M_1 = 3,98$ и $4,96$ результаты расходятся при увеличении угла β . Причина этого в приближенности предложенной модели: при больших значениях M_1 необходимо учитывать неоднородность течения газа в области 4, а также вязкость на контактном разрыве TE (см. рис. 1). Заметим, что при $M_1 = 3,98$ и $4,96$ данная модель дает высоту «ножки» Маха на $2 \div 4\%$ больше, чем модель [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Hornung H. B., Robinson M. L. Transition from regular to Mach reflection of shock waves. Pt 2. The steady-flow criterion // J. Fluid Mech. 1982. V. 123. P. 155–164.
2. Ivanov M. S., Gimelshein S. F., Beylich A. E. Hysteresis effect in stationary reflection of shock waves // Phys. Fluids. 1995. V. 7, N 4. P. 685–687.
3. Chpoun A., Ben-Dor G. Numerical confirmation of the hysteresis phenomenon in the regular to the Mach reflection transition in steady flows // Shock Waves. 1995. V. 5. P. 199–203.
4. Azevedo D. J., Liu C. S. Engineering approach to the prediction of shock patterns in bounded high-speed flows // AIAA J. 1993. V. 31, N 1. P. 83–90.
5. Azevedo D. J., Liu C. S., Rae W. J. Prediction of inviscid stagnation pressure losses in supersonic inlet flows // AIAA J. 1990. V. 28, N 10. P. 1834–1836.

6. **Li H., Ben-Dor G.** The wave configuration of a Mach reflection in steady flows: analytical solution and dependence on downstream influences // 20th Intern. Symp. on Shock Waves, Pasadena, July 23–28, 1995. Pasadena, 1995. P. 77–78.
7. **Курант Р., Фридрихс К.** Сверхзвуковые течения и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
8. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
9. **Кочин Н. Е., Кибель А. И., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2.
10. **Гриб А. А., Рябинин А. Г.** К вопросу о приближенном интегрировании уравнений плоского установившегося сверхзвукового движения газа // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100, № 3. С. 425–428.
11. **Христианович С. А.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1981.
12. **Бай Ши-и.** Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила в редакцию 30/IX 1996 г.
