УДК 519.6

Сходимость метода адаптации сеток Н.С. Бахвалова для сингулярно возмущенных краевых задач*

И.А. Блатов, Е.В. Китаева

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, ул. Льва Толстого, 23, Самара, 443010
E-mails: blatow@mail.ru (Блатов И.А.), el_kitaeva@mail.ru (Китаева Е.В.)

Блатов И.А., Китаева Е.В. Сходимость метода адаптации сеток Н.С. Бахвалова для сингулярно возмущенных краевых задач // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 47–59.

Рассматривается метод конечных элементов Галеркина для несамосопряженных краевых задач на сетках Бахвалова. С помощью метода галеркинских проекций доказана сходимость последовательности расчетных сеток в случае неизвестной границы пограничного слоя. Приводятся численные примеры.

DOI: 10.15372/SJNM20160104

Ключевые слова: *сингулярно возмущенная краевая задача, галеркинский проектор, сетка Бахвалова, алгоритмы адаптации.*

Blatov I.A., Kitaeva E.V. Convergence of the adapting grid method of Bakhvalov's type for singularly perturbed boundary value problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 1. — P. 47–59.

We consider the Galerkin finite element method for non-self-adjoint boundary value problems on Bakhvalov's grids. Using the Galerkin projections method the convergence of a sequence of computational grids with an unknown boundary of the boundary layer has been proved. Numerical examples are presented.

Keywords: *singularly perturbed boundary value problem, Galerkin projection, Bakhvalov's grid, adaptation algorithms.*

1. Введение

Метод галеркинских проекций [1] является универсальным методом доказательства асимптотически неулучшаемых априорных оценок погрешности проекционно-сеточных методов (ПСМ). Метод успешно применялся и для сингулярно возмущенных краевых задач (СВКЗ) [2]. При применении ПСМ к решению задач с особенностями, в частности СВКЗ, широко применяется метод адаптивных подвижных сеток [3]. Однако, несмотря на обширную литературу (см., например, [4] и библиографию там же), вопросы теоретического обоснования сходимости подвижных сеток к предельному разбиению существенно менее изучены. Для разностных методов эти вопросы изучались в [5, 6], см. также библиографию в [7]. В [7] было показано, что в основу доказательства сходимости алгоритмов адаптации для задач с симметричным оператором на сетках Шишкина может быть положен метод галеркинских проекций. В настоящей статье этот метод применяется к несамосопряженным СВКЗ, в которых коэффициенты уравнений могут содержать функции типа пограничного слоя, в случае использования сеток Бахвалова.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-06584).

2. Постановки задач и предварительные сведения

Введем обозначения. Через ε обозначим малый положительный параметр. Через C, C_1, C_2, ... будем обозначать положительные константы, не зависящие от ε и разбиения отрезка $[0,1]$. $C^k[a,b]$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ краевые задачи:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv -\varepsilon u_\varepsilon'' + p(t,\varepsilon)u_\varepsilon' + q(t,\varepsilon)u_\varepsilon = f(t), \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0, \tag{1}$$

$$M_\varepsilon v_\varepsilon \equiv -\varepsilon v_\varepsilon'' + (p(t,\varepsilon)v_\varepsilon)' + q(t,\varepsilon)v_\varepsilon = g(t), \quad v_\varepsilon(0) = v_\varepsilon(1) = 0. \tag{2}$$

Предположение 1. Предположим, что $p(t,\varepsilon) \in C^4[0,1]$, $q(t,\varepsilon) \in C^2[0,1]$, $f(t) \in C[0,1]$, $g(t) \in C[0,1]$, причем

$$\begin{gathered} \left|q^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C(1 + \varepsilon^{-i}\exp(p_0(t-1)/\varepsilon))), \quad i = 0,1,2, \quad 0 < C_1 \le p_0 \le C_2, \\ p(t,\varepsilon) \ge p_0 > 0, \quad \left|p^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C(1 + \varepsilon^{-i}\exp(p_0(t-1)/\varepsilon))), \quad i = 0,1,2,3,4. \end{gathered} \tag{3}$$

При сделанных предположениях в [8] было установлено следующее утверждение.

Лемма 1. *Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существуют единственные решения $u_\varepsilon(t)$, $v_\varepsilon(t)$ задач* (1), (2), *причем справедливы оценки*

$$\left|u_\varepsilon^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C(1 + \varepsilon^{-i}\exp(p_0(t-1)/\varepsilon))), \quad i = 0,1. \tag{4}$$

Если $p(t,\varepsilon)$, $q(t,\varepsilon)$, $f(t)$ — гладкие функции класса C^2, ограниченные вместе с производными до второго порядка равномерно по ε, то эти оценки справедливы и для $i = 2$.

Перейдем к описанию ПСМ. Разбиение Δ отрезка $[0,1]$ выберем по известной методике Бахвалова [9]. Пусть $\phi_\varepsilon = 1 - (2\varepsilon/p_0)|\ln\varepsilon|$, $\psi_\varepsilon = \phi_\varepsilon + 2(1-\varepsilon)/p_0$. Определим функцию $\chi(y)$ формулой

$$\chi(y) = \begin{cases} y, & y \in [0,\phi_\varepsilon], \\ 1 + \dfrac{2\varepsilon}{p_0}\ln\left\{\dfrac{p_0}{2}\left[y - \phi_\varepsilon + \dfrac{2\varepsilon}{p_0}\right]\right\}, & y \in [\phi_\varepsilon,\psi_\varepsilon]. \end{cases} \tag{5}$$

Очевидно, что $\chi(y) \in C^1[0,\psi_\varepsilon]$ и взаимно однозначно переводит $[0,\psi_\varepsilon]$ в $[0,1]$. Искомое разбиение определим в виде $\Delta = \chi(\Delta_\tau)$, где Δ_τ — вспомогательное разбиение отрезка $[0,\psi_\varepsilon]$. Определим его. Пусть $\phi_\varepsilon = \tau_n$. На отрезке $[\phi_\varepsilon,\psi_\varepsilon]$ положим $\tau_i = \tau_{i-1} + (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)/n$, $i = n+1, n+2, \ldots, 2n$, а на отрезке $[0,\phi_\varepsilon]$ положим $\tau_i = \tau_{i+1} - \phi_\varepsilon/n$, $i = n-1$, $n-2, \ldots, 1, 0$. Здесь n — некоторое натуральное число. Будем предполагать, что

$$\varepsilon|\ln(\varepsilon)| \le C/n. \tag{6}$$

Узлы искомого разбиения Δ имеют вид

$$t_i = \chi(\tau_i), \quad i = 0,\ldots,2n.$$

Построенное разбиение равномерно с шагом $h = h_i = t_{i+1} - t_i$ на $[0,\phi_\varepsilon]$. Из определения разбиения вытекает, что

$$0 < C_1\varepsilon|\ln(\varepsilon)| \le h_n \le C_2\varepsilon|\ln\varepsilon|, \tag{7}$$

$$\frac{2\varepsilon}{p_0}(i-n+2)^{-1} \le h_i \le \frac{2\varepsilon}{p_0}(i-n)^{-1}, \quad i \ge n+1. \tag{8}$$

Действительно, для $i \ge n+1$, применяя формулу конечных приращений, имеем

$$\begin{aligned} h_i = t_{i+1} - t_i = \chi(\tau_{i+1}) - \chi(\tau_i) &= \frac{2\varepsilon}{p_0}\left\{ \ln\left(\frac{p_0}{2}\left[\tau_{j+1} - \phi_\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{p_0}\right]\right) - \ln\left(\frac{p_0}{2}\left[\tau_j - \phi_\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{p_0}\right]\right)\right\} \\ &= \frac{2\varepsilon}{p_0}\left\{ \ln\left(\tau_{j+1} - \phi_\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{p_0}\right) - \ln\left(\tau_j - \phi_\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{p_0}\right)\right\} \\ &= \frac{2\varepsilon}{p_0}\left\{ \ln\left((j-n+1)\frac{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}{n} + \frac{2\varepsilon}{p_0}\right) - \ln\left((j-n)\frac{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}{n} + \frac{2\varepsilon}{p_0}\right)\right\} \\ &= \frac{2\varepsilon}{p_0}\frac{1}{(j-n+\theta_j)\frac{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}{n} + \frac{2\varepsilon}{p_0}}\frac{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}{n} = \frac{2\varepsilon}{p_0}\frac{1}{(j-n+\theta_j) + \frac{2\varepsilon n}{(\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)p_0}}, \end{aligned}$$

где $0 < \theta_j < 1$. Отсюда в силу (6) при малых ε следует (8). Аналогично получаем (7).

Приближенные решения u_n, v_n задач (1), (2) будем искать в пространстве пробных функций

$$E = \{u \in C[0,1] : u(0) = u(1) = 0, \quad u(t) = A_i + B_i(t - t_i), \ t \in [t_i, t_{i+1}], \ i = 0, 1, \ldots, 2n-1\}.$$

Введем пространство, которое будем называть пространством тестовых функций. Пусть

$$f_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ 0, & t \bar{\in} [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{9}$$

$$f_{n+1}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_n, t_{n+1}], \\ (t_{n+2} - t)/(t_{n+2} - t_{n+1}), & t \in [t_{n+1}, t_{n+2}], \\ 0, & t \notin [t_n, t_{n+2}], \end{cases} \tag{10}$$

$$f_i(t) = \begin{cases} (t - t_{i-1})/(t_i - t_{i-1}), & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ (t_{i+1} - t)/(t_{i+1} - t_i), & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0, & t \notin [t_{i-1}, t_{i+1}], \quad i = n+2, n+3, \ldots, 2n-1. \end{cases} \tag{11}$$

Тестовое пространство определим как линейную оболочку функций $f_i(t)$.

Рассматриваемый метод для задачи (1) состоит в отыскании такой функции $u_n(t) \in E$, что

$$-\varepsilon u_n'(t_i + 0) + \varepsilon u_n'(t_{i-1} + 0) + (pu_n' + qu_n, f_i) = (f, f_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

$$\varepsilon u_n'(t_n + 0) + (\varepsilon u_n', f_{n+1}') + (pu_n' + qu_n, f_{n+1}) = (f, f_{n+1}), \tag{13}$$

$$(\varepsilon u_n', f_i') + (pu_n' + qu_n, f_i) = (f, f_i), \quad i = n+2, n+3, \ldots, 2n-1. \tag{14}$$

Здесь $(,)$ означает скалярное произведение в $L_2[0,1]$. Аналогично ставится ПСМ-задача для (2).

Замечание 1. В монографии [10, с. 43–45] показано, что разрешимость задачи метода Галеркина и сходимость приближенных решений определяется свойствами главной части оператора исходной задачи. Для нежестких задач — это члены, содержащие старшие производные. В случае сингулярно возмущенной задачи при условии (6) главной частью оператора задачи на $[0,\phi_\varepsilon]$ является член $p(t)u'_\varepsilon$, а на $[\phi_\varepsilon,1]$, как обычно, является член $-\varepsilon u''_\varepsilon$, поскольку там $h_i \le C\varepsilon$. Поэтому на $[0,\phi_\varepsilon]$ тестовые функции — это базисные функции образа пространства непрерывных ломаных при действии оператора дифференцирования, а на $[\phi_\varepsilon,1]$ тестовые функции выбираются традиционным образом. При этом члены вида $\varepsilon u_\varepsilon(t_i+0)$ в (12) получаются при вычислении выражений вида $\varepsilon(u', f'_i)$, в котором f'_i понимается в смысле теории обобщенных функций (как разность δ-функций).

В [8] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Найдутся такие числа* $\varepsilon_0>0$, n_0 *— натуральное,* $\gamma_0>0$, $C_1>0$, *что для всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $n\ge n_0 : \varepsilon|\ln(\varepsilon)|\le \dfrac{\gamma_0}{n}$ *существуют единственные решения* $u_n(t)$ *задачи* (12)–(14) *и* $v_n(t)$ *соответствующей задачи для* (2), *причем*

$$\|u_n-u_\varepsilon\|_{C[0,1]}\le C_1\inf_{u\in E}\|u-u_\varepsilon\|_{C[0,1]}, \tag{15}$$

$$\|v_n-v_\varepsilon\|_{C[0,1]}\le C_1\inf_{u\in E}\|v-v_\varepsilon\|_{C[0,1]}. \tag{16}$$

Если $p(t,\varepsilon)$, $q(t,\varepsilon)$, $f(t)$ *— достаточно гладкие функции, ограниченные в* $C[0,1]$ *равномерно по* ε *вместе со своими производными до второго порядка, то*

$$\|u_n-u_\varepsilon\|_{C[0,1]}\le C_1/n^2, \qquad \|v_n-v_\varepsilon\|_{C[0,1]}\le C_1/n^2. \tag{17}$$

3. Адаптация сетки и основной результат

Рассмотрим теперь алгоритм адаптации расчетной сетки в случае неизвестной границы пограничного слоя.

Предположение 2. Для алгоритмов адаптации предположим, что $p(t,\varepsilon)=p(t)$, $q(t,\varepsilon)=q(t)$ — не зависящие от ε функции, а решения задач Коши $p(t)u'_0+q(t)u_0=f(t)$, $u_0(0)=0$ и $(p(t)v_0)'+q(t)v_0=f(t)$, $v_0(0)=0$ отличны от нуля при $t=1$.

В этом случае главный член погранслойной составляющей асимптотического разложения [11] имеет вид $-u_0(1)e^{p_0\frac{t-1}{\varepsilon}}$.

Определение 1. Будем говорить, что $\phi=\phi(\varepsilon,n)$ есть n-граница пограничного слоя, если справедлива оценка $\max_{t\in[0,\phi]} e^{p_0\frac{t-1}{\varepsilon}}\le \dfrac{1}{n^2}$.

Определение 2. Число $\tilde\phi=\tilde\phi(\varepsilon,n)=\sup_\phi \phi(\varepsilon,n)$ будем называть точной n-границей пограничного слоя.

Очевидно, что

$$\tilde\phi = 1-\frac{2}{p_0}\varepsilon\ln n. \tag{18}$$

Будем предполагать, что нам известно расположение пограничного слоя (окрестность точки $t=1$), но неизвестна его точная n-граница (или же параметр p_0). Приведем алгоритм приближенного отыскания этой n-границы.

Замечание 2. Из (6), (18) следует, что

$$t_{n+1} = \chi(\tau_{n+1}) = 1 + \frac{2\varepsilon}{p_0} \ln\left(\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon\right) = \tilde{\phi} + O(\varepsilon). \tag{19}$$

Поэтому, если $\tilde{\phi}$ ищется с точностью $O(\varepsilon)$, то можно положить $\tilde{\phi} \approx t_{n+1}$.

Замечание 3. Для рассматриваемых в данной статье задач граница пограничного слоя известна и определяется значением $p(1)$. Однако в случае нелинейных задач или же жестких линейных систем высоких порядков (см. например, [11]) такая информация недоступна либо требует отыскания границ спектра несимметричных матриц высоких порядков. Приведенный ниже алгоритм легко обобщается на такие задачи, а целью данной статьи является строгое теоретическое исследование его свойств для модельных несамосопряженных задач.

Шаг 1. Задаем некоторое достаточно большое $p^0 \geq p_0$. Полагаем $k = 0$.

Шаг 2. Определяем разбиение Δ_{n,p^k} как сетку Бахвалова, в построении которой параметр p_0 заменяем на p^k.

Шаг 3. Находим решение $u_{n,p^k}(t)$ на сетке Δ_{n,p^k}.

Шаг 4. Полагаем $p^{k+1} = p^k - \tau_k$, где τ_k выбирается так, чтобы $t_{n+1,k} - t_{n+1,k+1} = \varepsilon \ln\ln n$.

Шаг 5. Находим решение $u_{n,p^{k+1}}(t)$ на сетке $\Delta_{n,p^{k+1}}$.

Шаг 6. Вычисляем $\mu_k = \|u_{n,p^{k+1}}(t) - u_{n,p^k}(t)\|_{C[t_{n+1,k+1},t_{n+1,k}]}$, где $t_{n+1,k}$ — узел разбиения Δ_{n,p^k}.

Шаг 7. Если $k = 0$, то $k := k + 1$ и переход к шагу 2, иначе к шагу 8.

Шаг 8. Если $\mu_k > \dfrac{\ln n}{n^2}$, то $k := k + 1$ и переход к шагу 2, иначе $\tilde{\phi} \approx t_{n+1,k+1}$ и конец алгоритма.

Теорема 2. *Найдутся такие числа $\varepsilon_0 > 0$, n_0 — натуральное, $\gamma_0 > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $C_3 > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $n \geq n_0 : \varepsilon|\ln(\varepsilon)| \leq \frac{\gamma_0}{n}$ алгоритм Шаг 1–Шаг 8 закончит свою работу при $k < C_1 \dfrac{\ln n}{\ln\ln n}$, причем будут справедливы оценки:*

$$|\tilde{\phi} - t_{n+1,k+1}| \leq C_2 \varepsilon \ln\ln n, \tag{20}$$

$$\|u_{n,p^{k+1}}(t) - u_\varepsilon(t)\|_{C[0,1]} \leq C_3 \frac{\ln n}{n^2}. \tag{21}$$

Замечание 4. Теорема 2 сформулирована для задачи (1). Аналогичный результат справедлив и для задачи (2).

4. Метод галеркинских проекций и доказательство основного результата

В [8] теорема 1 была доказана на основе представления решения задачи (1) (и аналогично задачи (2))в виде

$$u_n = P_\varepsilon^n u_\varepsilon, \tag{22}$$

где P_ε^n — оператор, ставящий в соответствие решению задачи (1) решение задачи (12)–(14). Этот оператор называется галеркинским проектором [1].

Пусть $E_\varepsilon = \{u \in C[0,1] : u' \in L_\infty[0,t_n], u(0) = u(1) = 0\}$ — пространство с нормой $\|u\|_\varepsilon = \varepsilon\|u'\|_{L_\infty[0,t_n]} + \|u\|_{C[0,1]}$, D_ε — подмножество функций из E_ε, имеющих кусочно-непрерывные справа ограниченные на $[0,1]$ производные с конечным числом точек разрыва первого рода. Пусть $NE = \{(\varepsilon,n)\}$ — множество пар, удовлетворяющих условиям теоремы 1. В [8] было показано, что для пар $(\varepsilon,n) \in NE$ галеркинский проектор P_ε^n существует, является линейным в E_ε оператором с областью определения D_ε.

Определение 3. Метод Галеркина (12)–(14) будем называть квазиоптимальным на NE, если найдется такая константа $C > 0$, что для любой пары $(k,\varepsilon) \in NE$ галеркинский проектор существует, и справедливо неравенство $\|P_\varepsilon^n\|_{E_\varepsilon \to E_\varepsilon} \le C$.

В [8] была доказана квазиоптимальность метода Галеркина (12)–(14) для задачи (1) и аналогичного метода для задачи (2). Из квазиоптимальности и аппроксимационных свойств пространств E_ε^n непосредственно следует теорема 1.

Замечание 5. В [8] была доказана равномерная ограниченность галеркинских проекторов для сетки Бахвалова с параметром p_0. Однако в случае гладких, не зависящих от ε коэффициентов уравнений (1), (2), при значении параметра $p^k : 0 < C_1 \le p^k \le C_2$ доказательство совершенно аналогично, а все константы в оценках можно считать не зависящими от параметра p^k.

В данной статье, опираясь на квазиоптимальность, докажем теорему 2.

Вначале изучим аппроксимационные свойства пространства E_ε^n. Если вместо p_0 при построении разбиения Δ используется другой параметр p^k, то соответствующее пространство обозначим $E_\varepsilon^n(p^k)$. Узлы соответствующего разбиения Δ_{n,p^k} обозначим $t_{i,k}$.

Лемма 2. *Пусть $p^k \ge p_0 > 0$ — параметр, определяющий сетку Бахвалова из алгоритма адаптации, а функция $u_\varepsilon(t)$ удовлетворяет оценкам (4) при $i = 0,1,2$. Тогда найдется такая функция $\tilde u \in E_\varepsilon^n(p^k)$, что*

$$\|\tilde u(t) - u_\varepsilon(t)\|_\varepsilon \le C_1\left(n^{-2} + e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}\right). \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $\tilde u(t)$ — кусочно-линейная функция, интерполирующая $u_\varepsilon(t)$ в узлах сетки Δ_{n,p^k}. Тогда при $t \in [t_{i,k}, t_{i+1,k}]$, применяя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) - \tilde u(t) &= u_\varepsilon(t) - u(t_{i,k}) - \frac{u_\varepsilon(t_{i+1,k}) - u_\varepsilon(t_{i,k})}{t_{i+1,k} - t_{i,k}}(t - t_{i,k}) \\ &= \int_{t_{i,k}}^t (t-s)u_\varepsilon''(s)\,ds - \frac{t - t_{i,k}}{t_{i+1,k} - t_{i,k}}\int_{t_{i,k}}^t (t_{i+1,k} - s)u_\varepsilon''(s)\,ds. \end{aligned} \tag{24}$$

Далее для $i \le n$ в силу (4)–(7) при $t \in [t_{i,k}, t_{i+1,k}]$ имеем

$$\begin{aligned} \left|\int_{t_{i,k}}^t (t-s)u_\varepsilon''(s)\,ds\right| &\le C\int_{t_{i,k}}^t (t-s)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e^{p_0\frac{s-1}{\varepsilon}}\right)ds \le C\int_{t_{n-1,k}}^{t_{n+1,k}} (t_{n+1,k} - s)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e^{p_0\frac{s-1}{\varepsilon}}\right)ds \\ &= \frac{C}{2}(t_{n+1,k} - t_{n-1,k})^2 + \frac{C}{\varepsilon}\int_{t_{n-1,k}}^{t_{n+1,k}} \frac{t_{n+1,k} - s}{\varepsilon}e^{p_0\frac{s - t_{n+1,k}}{\varepsilon}}\,ds \cdot e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \\ &\le C_1\left(n^{-2} + e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Из (24), (25) вытекает оценка

$$\|\tilde{u}(t) - u_\varepsilon(t)\|_{C[t_{i,k},t_{i+1,k}]} \le C_1\left(n^{-2} + e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}\right), \quad i \le n. \tag{26}$$

Аналогично с учетом (6) доказывается оценка

$$\varepsilon\|\tilde{u}'(t) - u'_\varepsilon(t)\|_{C[t_{i,k},t_{i+1,k}]} \le C_1\left(n^{-2} + e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}\right), \quad i \le n. \tag{27}$$

Пусть $i \in [n+1, 2n-1]$. Тогда из оценок погрешности лагранжевой интерполяции, (4), (8) (где p_0 заменяется на p^k) и условия $p^k \ge p_0$ имеем

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}(t) - u_\varepsilon(t)\|_{C[t_{i,k},t_{i+1,k}]} &\le Ch_i^2\left(1 + \varepsilon^{-2}\, e^{p_0\frac{t_{i+1,k}-1}{\varepsilon}}\right) = Ch_i^2\left(1 + \varepsilon^{-2}\, e^{-\frac{p_0}{\varepsilon}\sum\limits_{j=i+2}^{2n-1} h_j}\right)\\
&\le C_1\frac{\varepsilon^2}{(i-n)^2}\left(1 + \varepsilon^{-2}\, e^{-\frac{p_0}{\varepsilon}\sum\limits_{j=i+2}^{2n-1}\frac{2}{p^k}\frac{\varepsilon}{j-n+2}}\right)\\
&\le C_2\frac{\varepsilon^2}{(i-n)^2}\left(1 + \varepsilon^{-2}\, e^{-2(\ln(n+1)-\ln(i-n+2))}\right)\\
&= C_2\frac{\varepsilon^2}{(i-n)^2}\left(1 + \varepsilon^{-2}\frac{(i-n+2)^2}{(n+1)^2}\right)\\
&\le C_3(\varepsilon^2 + n^{-2}) \le C_4 n^{-2}, \quad i \ge n+1.
\end{aligned} \tag{28}$$

Аналогично с учетом условия (6) доказывается оценка

$$\varepsilon\|\tilde{u}'(t) - u'_\varepsilon(t)\|_{C[t_{i,k},t_{i+1,k}]} \le C_1\left(n^{-2} + e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}\right), \quad i \ge n+1. \tag{29}$$

Из (26)–(29) вытекает (23). □

Доказательство (теоремы 2). Алгоритм адаптации, суть которого состоит в процессе подбора параметра p^k, продолжает свою работу до тех пор, пока имеет место оценка

$$\mu_k > \frac{\ln n}{n^2} \tag{30}$$

(см. Шаг 8 алгоритма). Доказательство проведем в два этапа. На первом этапе будет показано, что оценки (30) достаточно для достижения точной границы пограничного слоя $\tilde{\phi}$. На втором этапе рассматривается вопрос о том, не произойдет ли в процессе реализации алгоритма переход точной границы погранслоя при уменьшении параметра p^k.

Этап I. Зафиксируем $k \geq 1$.

Лемма 3. *Пусть* $p^{k+1} \geq p_0 > 0$. *Тогда найдутся такие константы* $C_3 > 0$, $C > 0$, $n_0 \in N$, *что при* $\varepsilon n \leq C$, $n \geq n_0$ *будет справедливо неравенство*

$$\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon(t)\|_{C[t_{n+1,k+1}, t_{n+1,k}]} \geq C_3 e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}. \tag{31}$$

Доказательство. Поскольку $t_{n+1,k} - t_{n+1,k+1} = \varepsilon \ln\ln n$, то достаточно доказать оценку

$$\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon(t)\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]} \geq C_3 e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}, \tag{32}$$

где константа $C_1 > 0$ такова, что $[t_{n+1,k} - C_1\varepsilon, t_{n+1,k}] \subset [t_{n,k}, t_{n+1,k}]$, C_1 не зависит от ε, n. Такая C_1 найдется в силу условия (7). Докажем (32). Обозначим $\tau = \frac{t-1}{\varepsilon}$.

Асимптотическое разложение [11] решения $u_\varepsilon(t)$ имеет вид

$$u_\varepsilon(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \Pi\, u_0\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \Pi\, u_1\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^2) = u_{\varepsilon,1}(t) + \Pi\, u_{\varepsilon,1}(t) + R(t,\varepsilon),$$

где $u_i(t) \in C_2[0,1]$, $\Pi\, u_i(\tau) \in C_2(-\infty, 0]$ не зависят от ε, $\Pi\, u_0(\tau) = -u_0(1)e^{p_0\tau}$, $\Pi\, u_1(\tau) = Q(\tau)e^{p_0\tau}$, где $Q(\tau)$ — полином, $\|R(t,\varepsilon)\|_{C[0,1]} \leq C\varepsilon^2$. Пусть $u_{\mathrm{I}}(t), u_{\mathrm{I},1}(t)$, $\Pi\, u_{\mathrm{I}}(t)$, $R_{\mathrm{I}}(t)$ — линейные интерполянты функций $u_\varepsilon(t)$, $u_{\varepsilon,1}(t)$, $\Pi\, u_{\varepsilon,1}(t), R(t,\varepsilon)$ на отрезке $[t_{n+1,k} - C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]$. В силу гладкости интерполируемых функций и оценок погрешности линейной интерполяции будем иметь

$$\|u_{\mathrm{I},1}(t) - u_{\varepsilon,1})\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]} \leq C\varepsilon^2, \qquad \|R(t,\varepsilon) - R_{\mathrm{I}}(t,\varepsilon)\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]} \leq C\varepsilon^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\|u_{n,p^k} - u_\varepsilon(t)\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]} &\geq \inf_{a,b\in R} \|at + b - u_\varepsilon\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]} \\
&= \inf_{a,b\in R} \|at + b - (u_{\mathrm{I}} - u_\varepsilon)\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]} \\
&= \inf_{a,b\in R} \|at + b - (u_{\mathrm{I},1} - u_{\varepsilon,1}) - (\Pi\, u_{\mathrm{I}} - \Pi\, u_{\varepsilon,1}) - \\
&\qquad\qquad (R(t,\varepsilon) - R_{\mathrm{I}}(t,\varepsilon))\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]} \\
&\geq \inf_{a,b\in R} \Big(\|at + b - (\Pi\, u_{\mathrm{I}} - \Pi\, u_{\varepsilon,1})\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]} - C\varepsilon^2\Big) \\
&= \inf_{a,b\in R} \Big(\|at + b - (\Pi\, u_{\mathrm{I}} - \Pi\, u_{\varepsilon,1})\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]}\Big) - C\varepsilon^2 \\
&= \inf_{a,b\in R} \Big(\|at + b - \Pi\, u_{\varepsilon,1}\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]}\Big) - C\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{33}$$

Но при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&\inf_{a,b\in R} \Big(\|at + b - \Pi\, u_{\varepsilon,1}\|_{C[t_{n+1,k}-C_1\varepsilon, t_{n+1,k}]}\Big) \\
&\qquad = \inf_{a,b\in R} \left(\left\|a\tau + b - (-u_0(1) + \varepsilon Q(\tau))e^{p_0\tau}\right\|_{C\left[\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon} - C_1, \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}\right]}\right) \\
&\qquad \geq C_3 \inf_{a,b\in R} \left(\left\|a\tau + b - (-u_0(1))e^{p_0\tau}\right\|_{C\left[\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon} - C_1, \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}\right]}\right).
\end{aligned} \tag{34}$$

Для завершения доказательства установим вспомогательное

Предложение 3. *Пусть $M > 0$, $p_0 > 0$, α, β — константы, $\beta - \alpha \geq M$. Тогда найдется такая константа $m > 0$, зависящая только от M, p_0, что справедливо неравенство*

$$\inf_{a,b \in R} \left(\|a\tau + b - e^{p_0 \tau}\|_{C[\alpha,\beta]} \right) \geq m e^{p_0 \beta}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \inf_{a,b \in R} \left(\|a\tau + b - e^{p_0 \tau}\|_{C[\alpha,\beta]} \right) &= e^{p_0 \beta} \inf_{a,b \in R} \left(\|a\tau + b - e^{p_0(\tau - \beta)}\|_{C[\alpha,\beta]} \right) \\ &= e^{p_0 \beta} \inf_{a,b \in R} \left(\|at + b - e^{p_0 t}\|_{C[\alpha-\beta,0]} \right) \\ &\geq e^{p_0 \beta} \inf_{a,b \in R} \left(\|at + b - e^{p_0 t}\|_{C[-M,0]} \right). \end{aligned}$$

Но $m = \inf_{a,b \in R} \left(\|at + b - e^{p_0 t}\|_{C[-M,0]} \right) > 0$, так как иначе было бы $e^{p_0 t} \equiv at + b$, причем m зависит только от M, p_0. Предложение доказано. $\square$

Из предложения 3 и (34), учитывая также, что $u_0(1) \neq 0$, имеем

$$\begin{aligned} \inf_{a,b \in R} \left(\|at + b - \Pi\, u_{\varepsilon,1}\|_{C[t_{n+1,k} - C_1 \varepsilon, t_{n+1,k}]} \right) &\geq C_5 m \left\| u_0(1) e^{p_0 \tau} \right\|_{C\left[\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon} - C_1, \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}\right]} \\ &\geq C_6 e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{35}$$

Наконец, в силу условия $p_{k+1} \geq p_0 > 0$ будет $t_{n+1,k} = t_{n+1,k+1} + \ln\ln n \geq t_{n+1} + \ln\ln n$, откуда с учетом замечания 2 и (18):

$$\begin{aligned} e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} &\geq e^{p_0 \frac{t_{n+1}-1}{\varepsilon}} e^{p_0 \ln\ln n} = e^{p_0 \frac{\tilde{\phi} + O(\varepsilon) - 1}{\varepsilon}} (\ln n)^{p_0} = e^{O(1)} e^{p_0 \frac{\tilde{\phi} - 1}{\varepsilon}} (\ln n)^{p_0} \\ &= e^{O(1)} e^{-2\ln n} (\ln n)^{p_0} \geq C_7 n^{-2} (\ln n)^{p_0}. \end{aligned} \tag{36}$$

Из (33)–(36) вытекает (31). $\square$

Пусть $p^{k+1} \geq p_0 > 0$, $\tilde{u}$ — функция из леммы 2. Тогда в силу квазиоптимальности, замечания 5 и леммы 2 имеем

$$\begin{aligned} \|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} &\leq \|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\|_\varepsilon = \|P_\varepsilon^n u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq \|P_\varepsilon^n u_\varepsilon - \tilde{u}\|_\varepsilon + \|\tilde{u} - u_\varepsilon\|_\varepsilon \\ &= \|P_\varepsilon^n (u_\varepsilon - \tilde{u})\|_\varepsilon + \|\tilde{u} - u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq \|(P_\varepsilon^n\|_{E_\varepsilon^n \to E_\varepsilon^n} + 1)\|\tilde{u} - u_\varepsilon\|_\varepsilon \\ &\leq (C+1)\|\tilde{u} - u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq C_8 \left(n^{-2} + e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \right). \end{aligned} \tag{37}$$

Тогда в силу (31), (37), поскольку при $p_{k+1} \geq p_0$ с учетом (36) $e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \geq C n^{-2}$, получаем

$$C_9 e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \leq \|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\|_{C[t_{n+1,k+1}, t_{n+1,k}]} \leq C_{10} e^{p_0 \frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}. \tag{38}$$

Аналогично (37) имеем

$$\|u_{n,p^{k+1}} - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq C_{11} \left(n^{-2} + e^{p_0 \frac{t_{n+1,k+1}-1}{\varepsilon}} \right). \tag{39}$$

Оценим величину μ_k, вычисляемую на Шаге 6 алгоритма адаптации. С учетом (38), (39):

$$\begin{aligned}\mu_k &= \|u_{n,p^{k+1}} - u_{n,p^k}\|_{C[t_{n+1,k+1},t_{n+1,k}]}\\ &\geq \|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\|_{C[t_{n+1,k+1},t_{n+1,k}]} - \|u_{n,p^{k+1}} - u_\varepsilon\|_{C[t_{n+1,k+1},t_{n+1,k}]}\\ &\geq C_9 e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} - C_{11}\left(n^{-2} + e^{p_0\frac{t_{n+1,k+1}-1}{\varepsilon}}\right). \end{aligned}\tag{40}$$

Но так как $t_{n+1,k} = t_{n+1,k+1} + \ln\ln n$, то с учетом (36) из (40) при достаточно большом n получим

$$\mu_k \geq C_{12}\, e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}. \tag{41}$$

Наконец, из (36), (38), (39) вытекает, что $\mu_k \leq C_{13}\, e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}$. Поэтому с учетом (41) при $p^{k+1} \geq p_0 > 0$ будет

$$C_{11}\, e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \leq \mu_k \leq C_{12}\, e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}}. \tag{42}$$

Остановка алгоритма произойдет, если будет $\mu_k \leq \dfrac{\ln n}{n^2}$, что в силу (42) означает, что

$$e^{p_0\frac{t_{n+1,k}-1}{\varepsilon}} \leq C_{13}\frac{\ln n}{n^2}, \tag{43}$$

откуда с учетом замечания 2 имеем

$$t_{n+1,k} \leq 1 - \frac{2}{p_0}\varepsilon\ln n + \frac{\varepsilon}{p_0}(\ln C_{14} + \ln\ln n) = \tilde{\phi} + \frac{2}{p_0}\varepsilon(\ln C_{14} + \ln\ln n) + O(\varepsilon).$$

Таким образом, алгоритм не завершит свою работу, пока не будет выполнена оценка

$$t_{n+1,k} \leq \tilde{\phi} + \frac{2}{p_0}\varepsilon\ln\ln n + O(\varepsilon). \tag{44}$$

Этап II. Поскольку граница погранслоя $t_{n+1,k}$ сдвигается с шагом $\varepsilon\ln\ln n$, а точная граница имеет вид $\tilde{\phi} = 1 - \dfrac{2}{p_0}\varepsilon\ln n$, то она будет достигнута не более чем за $O\left(\dfrac{\ln n}{\ln\ln n}\right)$ шагов с точностью (44). Докажем, что после достижения границы алгоритм остановит свою работу. Действительно, пусть $t_{n+1,k} \leq \tilde{\phi}$. При этом $t_{n+1,k} = \tilde{\phi} + O(\varepsilon\ln\ln n)$. Тогда в силу леммы 2, того, что $e^{p_0\frac{\tilde{\phi}-1}{\varepsilon}} = n^{-2}$, и квазиоптимальности будет иметь место оценка

$$|\mu_k| \leq \|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq \|u_{n,p^k} - u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq Cn^{-2}.$$

Но критерий выхода имеет вид $\mu_k \leq \dfrac{\ln n}{n^2}$, и при достаточно больших n он будет выполнен.

Докажем оценку (21). В силу (39), (43) и условия $t_{n+1,k+1} = t_{n+1,k} - \varepsilon\ln\ln n$ имеем

$$\|u_{n,p^{k+1}} - u_\varepsilon\|_{C[0,1]} \leq C_{11}\left(n^{-2} + e^{p_0\frac{t_{n+1,k+1}-1}{\varepsilon}}\right) \leq C\frac{\ln n}{n^2}.$$

Теорема 2 доказана. □

5. Численные примеры

Рассмотрим две линейные задачи:

$$-\varepsilon u'' + u' + u = 1, \qquad u(0) = u(1) = 0, \tag{45}$$

$$-\varepsilon v'' + (p(t,\varepsilon)v)' = p(t,\varepsilon), \quad v(0) = v(1) = 0, \tag{46}$$

где $p(t,\varepsilon) = 1 + e^{\frac{t-1}{\varepsilon}}\left(0.5 + e^{\frac{t-1}{\varepsilon}}\right)^{-1}$.

Начальное значение параметра сетки p^0, при котором начинался процесс адаптации, для обеих задач приняли равным 10, а шаг его изменения выбран таким, что разность $t_{n+1,k} - t_{n+1,k+1} = \varepsilon \ln\ln n$, т. е.

$$p^{k+1} = \frac{2p^k \ln\left(\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon\right)}{2\ln\left(\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon\right) - p^k \ln\ln n}.$$

Результаты расчетов представлены в таблицах 1 и 2. В табл. 1 представлены данные для задачи (45), а в табл. 2 — для (46): ε — малый параметр из постановки исходной задачи, n — параметр, определяющий число узлов расчетной сетки, p^k — значение, при котором прекращается выполнение алгоритма на k-й итерации, k — номер итерации, на которой алгоритм адаптации заканчивает работу, $\Delta t = |\tilde{\phi} - t_{n+1,k+1}|$ — погрешность приближенного значения точной границы пограничного слоя.

Таблица 1

n	$\varepsilon = 10^{-3}$		$\varepsilon = 10^{-4}$	
	p^k	Δt	p^k	Δt
$k = 4$				
16	1.19105987705427	0.00088951104911	1.19615120602892	0.00009093275481
$k = 5$				
32	0.99547168728069	0.00003153065260	1.00262456857185	0.00000181445016
64	1.03143622185818	0.00025350975372	1.04379328663531	0.00003489793646
128	1.07027343140011	0.00063716206700	1.09181775283100	0.00008160748703
	$k = 5$		$k = 6$	
256	1.10467448487700	0.00105087715974	0.96998860181910	0.00003431350182
	$k = 6$		$k = 6$	
512	0.95898765009500	0.00053358007753	1.01268268491564	0.00001562556698

Таблица 2

n	$\varepsilon = 10^{-3}$		$\varepsilon = 10^{-4}$	
	p^k	Δt	p^k	Δt
$k = 4$				
16	1.19105987705427	0.00088951104911	1.19615120602892	0.00009093275481
32	1.21412395846338	0.00122244040293	1.22263462293137	0.00012621805263
$k = 5$				
64	1.03143622185818	0.00025350975372	1.04379328663531	0.00003489793646
128	1.07027343140011	0.00063716206700	1.09181775283100	0.00008160748703
	$k = 5$		$k = 6$	
256	1.10467448487700	0.00105087715974	0.96998860181910	0.00003431350182
	$k = 6$		$k = 6$	
512	0.95898765009500	0.00053358007753	1.01268268491564	0.00001562556698

Данные вычислительных экспериментов согласуются с теоретическими результатами. Из таблиц видно, что, двигаясь с шагом $\varepsilon \ln\ln n$, точка $t_{n+1,k}$ достигает точной границы погранслоя $\tilde{\phi}$ с погрешностью, удовлетворяющей оценке (20), после чего алгоритм заканчивает работу.

Литература

1. **Natterer F.** Uniform convergence of Galerkin method for splines on highly nonuniform meshes // Math. Comput. — 1977. — Vol. 31. — P. 457–468.
2. **Blatov I.A., Strygin V.V.** On best possible order of convergence estimates in the collocation method and Galerkin's method for singularly perturbed boundary value problems for systems of first order ordinary differential equations // Math. Comput. — 1999. — Vol. 68. — P. 683–715.
3. **Liseikin V.D.** Grid Generation Methods. — Berlin: Springer-Verlag, 1999.
4. **Гильманов А.Н.** Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. — М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 2000.
5. **Шишкин Г.И.** Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных краевых задач на локально переизмельчаемых сетках. Уравнение конвекции-диффузии // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2000. — Т. 40, № 5. — С. 680–691.
6. **Шишкин Г.И.** Сеточная аппроксимация параболических уравнений конвекции–диффузии на априорно адаптирующихся сетках; равномерно сходящиеся схемы // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2008. — Т. 48, № 6. — С. 1014–1033.
7. **Блатов И.А., Добробог Н.В.** Условная равномерная сходимость алгоритмов адаптации в методе конечных элементов для сингулярно возмущенных задач // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 9. — С. 1350–1368.
8. **Блатов И.А.** О проекционном методе для сингулярно возмущенных краевых задач // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1990. — Т. 30, № 7. — С. 1031–1045.
9. **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 841–859.
10. **Марчук Г.И., Агошков В.И.** Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981.
11. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 24 февраля 2015 г.,
в окончательном варианте 18 мая 2015 г.

Литература в транслитерации

1. **Natterer F.** Uniform convergence of Galerkin method for splines on highly nonuniform meshes // Math. Comput. — 1977. — Vol. 31. — P. 457–468.
2. **Blatov I.A., Strygin V.V.** On best possible order of convergence estimates in the collocation method and Galerkin's method for singularly perturbed boundary value problems for systems of first order ordinary differential equations // Math. Comput. — 1999. — Vol. 68. — P. 683–715.
3. **Liseikin V.D.** Grid Generation Methods. — Berlin: Springer-Verlag, 1999.
4. **Gil'manov A.N.** Metody adaptivnykh setok v zadachakh gazovoy dinamiki. — M.: Nauka, FIZMATLIT, 2000.

5. **Shishkin G.I.** Setochnaya approksimatsiya singulyarno vozmushchennykh kraevykh zadach na lokal'no pereizmel'chaemykh setkakh. Uravnenie konvektsii-diffuzii // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2000. — T. 40, № 5. — S. 680–691.

6. **Shishkin G.I.** Setochnaya approksimatsiya parabolicheskikh uravneniy konvektsii–diffuzii na apriorno adaptiruyushchikhsya setkakh; ravnomerno skhodyashchiesya skhemy // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2008. — T. 48, № 6. — S. 1014–1033.

7. **Blatov I.A., Dobrobog N.V.** Uslovnaya ravnomernaya skhodimost' algoritmov adaptatsii v metode konechnykh elementov dlya singulyarno vozmushchennykh zadach // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2010. — T. 50, № 9. — S. 1350–1368.

8. **Blatov I.A.** O proektsionnom metode dlya singulyarno vozmushchennykh kraevykh zadach // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1990. — T. 30, № 7. — S. 1031–1045.

9. **Bakhvalov N.S.** K optimizatsii metodov resheniya kraevykh zadach pri nalichii pogranichnogo sloya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1969. — T. 9, № 4. — S. 841–859.

10. **Marchuk G.I., Agoshkov V.I.** Vvedenie v proektsionno-setochnye metody. — M.: Nauka, 1981.

11. **Vasil'eva A.B., Butuzov V.F.** Asimptoticheskoe razlozhenie resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy. — M.: Nauka, 1973.