УДК 532.5.032

МЕДЛЕННОЕ ОБТЕКАНИЕ ПОЛОГО ПОРИСТОГО ШАРА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

А. С. Верещагин[*,**], С. В. Долгушев[*]

[*] Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск

[**] Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

E-mails: vereshchag@itam.nsc.ru, dolg@itam.nsc.ru

Решена задача обтекания полой пористой сферы потоком вязкой несжимаемой жидкости в приближении Стокса, в котором фильтрационное течение через оболочку шара подчиняется закону Дарси. Рассчитана сила, действующая на шар со стороны жидкости, рассмотрены предельные случаи. Построена функция тока.

Ключевые слова: обтекание, вязкая жидкость, аналитическое решение, фильтрация, полая частица.

Введение. Задачи о движении жидкости вблизи твердых проницаемых сфер или сферических оболочек возникают в различных областях науки и медицины, в промышленности, метеорологии и т. д. Примерами таких задач являются обтекание пористых частиц катализатора в реакторах с плотным слоем этих частиц или псевдоожижением, течение анализируемой по составу жидкой или газообразной смеси в колонке хроматографа, выпадение осадков в виде снега, оседание частиц ила на дно водоема, а также сгустков крови при проведении медицинских анализов и т. д. Поскольку в указанных случаях движение жидкости происходит с очень малой скоростью ($\mathrm{Re} \ll 1$), при описании течения вне твердой пористой среды обычно используются уравнения Стокса, а внутри пористой среды — уравнения фильтрации различных моделей (в основном модели Дарси).

Теоретические исследования течений вблизи пористых проницаемых тел вращения начаты более 50 лет назад [1–3] и продолжаются в настоящее время при уточнении моделей течения и условий на границах раздела фаз, а также при совершенствовании методов решения задач для различных условий внешнего потока. В работе [4] теоретические исследования, выполненные в этом направлении в течение последних 30 лет, разделены на три группы:

1) применение закона Дарси для описания течения в пористой среде и уравнений вязкой жидкости (уравнений Навье — Стокса в различных приближениях) в свободном потоке при условиях неразрывности нормальной составляющей скорости и давления на внешней поверхности пористой сферы (или оболочки) и отсутствия скольжения (тангенциальная составляющая скорости равна нулю) [5–9];

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 12 и комплексного проекта СО РАН — NSC № 143, а также при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МК-4276.2010.1).

2) применение тех же модельных уравнений для описания внешнего и внутреннего течений с несколько измененными граничными условиями: вместо условия отсутствия скольжения вдоль границ раздела фаз допускается наличие ненулевой касательной составляющей скорости, которая определяется в ходе решения задачи [10–14];

3) применение закона Бринкмана для описания течения в пористой среде и уравнений вязкой жидкости (уравнений Навье — Стокса в различных приближениях) в свободном потоке при выполнении условий неразрывности всех составляющих скорости, давления и напряжений на внешней поверхности пористой сферы (или оболочки) [4, 15–17].

В перечисленных выше работах задача о низкоскоростном обтекании пористых сфер и оболочек решалась аналитически. Имеются примеры численного решения этой задачи с использованием полных уравнений Навье — Стокса и Бринкмана с граничными условиями, указанными в п. **3**. Результаты таких расчетов, проведенных в работе [18], хорошо согласуются (с точностью до 10 %) с экспериментальными значениями для коэффициента сопротивления пористых сфер в [19].

Модель течения жидкости в пористой среде Бринкмана [20] является обобщением модели Дарси на случаи умеренных и больших значений коэффициента проницаемости пористой среды: при малых значениях этой величины она переходит в модель Дарси, при больших (отсутствие твердой фазы) — в уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в приближении Стокса.

Рассмотрим более подробно некоторые наиболее существенные результаты, полученные в указанных выше работах. В [5, 9] на основе подхода 1 представлены формулы для компонент скорости, давления и коэффициента сопротивления при обтекании проницаемой сферы однородным потоком газа:

$$p = -\frac{3\mu a U\cos\theta}{r^2(2+k/a^2)}, \qquad q_r = \left\{\frac{-3aU}{r(2+k/a^2)}\left[1-\frac{a^2}{3r^2}\left(1+\frac{2k}{a^2}\right)\right]+U\right\}\cos\theta,$$

$$q_\theta = \left\{\frac{3aU}{2r(2+k/a^2)}\left[1+\frac{a^2}{3r^2}\left(1+\frac{2k}{a^2}\right)\right]-U\right\}\sin\theta,$$

$$P = -\frac{3\mu r U\cos\theta}{2a^2+k}, \quad Q_r = \frac{3kU\cos\theta}{2a^2+k}, \quad Q_\theta = -\frac{3kU\sin\theta}{2a^2+k}, \quad D = \frac{6\pi a U\mu}{1+k/(2a^2)}.$$

Здесь строчными буквами обозначены параметры течения вне пористого тела, соответствующими прописными — параметры течения внутри пористого тела; p, q — давление и скорость соответственно; индексы r, θ соответствуют радиальной и угловой составляющим вектора; D — коэффициент сопротивления; a — радиус пористой сферы; U — скорость однородного набегающего потока; μ — динамическая вязкость жидкости; k — коэффициент проницаемости материала сферы.

В [5] отмечено, что коэффициент сопротивления пористой сферы равен соответствующему значению этого параметра для непроницаемой сферы, имеющей радиус, уменьшенный в $1+k/(2a^2)$ раз.

В [9] получены аналогичные выражения для параметров потока и коэффициента сопротивления, а также формула для скорости гравитационного осаждения частиц, приведены линии тока внутри и вне пористой сферы.

В работе [8] рассматриваемая задача решена при условии ненулевой тангенциальной составляющей скорости на поверхности частицы: ставилось условие совпадения значений этой величины по обе стороны поверхности раздела сред. В данном случае решение принимает вид

$$p = -\frac{3\mu a U\cos\theta}{r^2(2+3k/a^2)}, \qquad q_r = \left\{\frac{-3aU}{r(2+3k/a^2)}\left[1-\frac{a^2}{3r^2}\left(1+\frac{2k}{a^2}\right)\right]+U\right\}\cos\theta,$$

$$q_\theta = \Big\{\frac{3aU}{2r(2+3k/a^2)}\Big[1+\frac{a^2}{3r^2}\Big(1+\frac{2k}{a^2}\Big)\Big] - U\Big\}\sin\theta,$$

$$P = -\frac{3\mu r U\cos\theta}{2a^2+3k}, \quad Q_r = \frac{3kU\cos\theta}{2a^2+3k}, \quad Q_\theta = -\frac{3kU\sin\theta}{2a^2+3k}, \quad D = \frac{6\pi a U\mu}{1+3k/(2a^2)}.$$

Несмотря на то что в работе [5] использовалось граничное условие на поверхности сферы $q_\theta(a,\theta) = Q_\theta(a,\theta) = 0$, вопрос о его справедливости для общего случая задачи обтекания пористых тел остался нерешенным. В [5] предполагалось, что это условие может применяться при малых значениях коэффициента проницаемости k. В работах [21, 22] экспериментально, а в [23] теоретически показано, что при решении задачи с использованием модели потока в пористой среде Дарси более подходящими являются такие соотношения, в которых тангенциальная составляющая скорости имеет разрыв:

$$\frac{\partial u_\theta(a,\theta)}{\partial r} = \frac{\alpha}{\sqrt{k}}\,[u_\theta(a,\theta) - U_\theta(a,\theta)] \tag{1}$$

($0{,}25 < \alpha < 10{,}00$ — параметр, зависящий от материала пористой среды). С помощью этой модели граничных условий получены решения задач обтекания пористой сферы потоком с линейным сдвигом скорости [14] и потоком произвольной структуры [12, 13] в виде аналитических выражений для параметров течения, коэффициента сопротивления и скорости осаждения частиц в поле силы тяжести.

В настоящее время наиболее распространенным подходом к решению задач обтекания пористых частиц или их осаждения в жидкости под действием силы тяжести является подход 3. С использованием этого подхода получены важные для приложений результаты, как аналитические [4, 15–17], так и численные [18].

Для указанного класса задач представляет интерес изучение течений вблизи полых проницаемых сферических оболочек, используемых в технологических процессах в качестве микрореакторов и разделителей газов. В работе [7] с использованием модели Дарси впервые получено решение этой задачи при одном неопределенном параметре для очень тонкой оболочки (см. также [10, 11]). Очень подробно данная задача рассмотрена в работе [4], в которой в рамках подхода 3 получены аналитические формулы для параметров течения, коэффициента сопротивления, рассмотрены асимптотические случаи оболочки нулевой толщины и сплошной пористой сферы. Сравнение решений, полученных с использованием подходов 2, 3, а также с помощью различных граничных условий, проведено в работе [16].

При решении задач обтекания полых сферических частиц (микросфер), например задачи о микросферах, используемых в качестве полых сферических мембран для обогащения гелиеносного газа гелием [24], необходимо более подробно описать силы, действующие на частицы в потоке жидкости и газа.

Задача стационарного обтекания полого пористого шара с граничным условием прилипания. Рассмотрим задачу стационарного обтекания полого пористого шара потоком вязкой несжимаемой жидкости с внешним радиусом b и радиусом полости a. Скорость потока на бесконечности будем полагать равной v_∞ (рис. 1), μ, ρ — динамическая вязкость и плотность жидкости.

Введем сферическую систему координат (r, θ, ε). Тогда можно считать, что искомые параметры течения — радиальная составляющая скорости v_r, нормальная составляющая скорости v_θ и давление в жидкости p — являются функциями только параметров r и θ. Также можно пренебречь азимутальной составляющей скорости v_ε.

Предположим, что свободное течение описывается в рамках приближения Стокса [25], которое справедливо для течений с числами Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$ ($\mathrm{Re} = 2bv_\infty\rho/\mu$), а фильтрационное течение в стенке шара подчиняется закону Дарси [26].

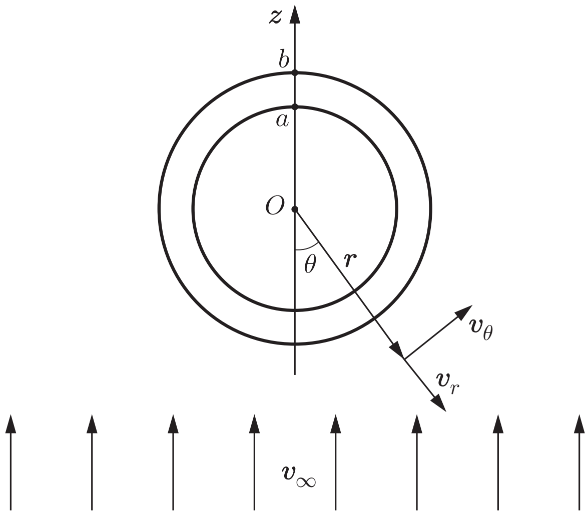

Рис. 1. Схема микросферы, обтекаемой потоком жидкости

Уравнения свободного течения имеют вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\,v_r + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\,v_\theta = 0,\\
\mu\Big(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\,\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r^2}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial r},\\
\mu\Big(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin\theta}\Big) = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial p}{\partial \theta},\\
0 < r < a, \qquad r > b, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Уравнения фильтрационного течения имеют вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\,V_r + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\,V_\theta = 0,\\
V_r = -\frac{k}{\mu}\,\frac{\partial P}{\partial r}, \qquad V_\theta = -\frac{k}{\mu}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial P}{\partial \theta},\\
a \leqslant r \leqslant b, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где V_r — радиальная составляющая скорости фильтрации; V_θ — нормальная составляющая скорости фильтрации; P — давление. Далее параметры течения в полости шара обозначаются v_r^i, v_θ^i, p^i, вне шара — v_r^e, v_θ^e, p^e.

Зададим условия на границах между областями свободного и фильтрационного течений, которые представляют собой условия прилипания вязкой жидкости на границе с твердым телом и условие непрерывности давления:

— при $r = a$

$$
v_r^i = V_r, \qquad v_\theta^i = 0, \qquad p^i = P; \tag{4}
$$

— при $r = b$

$$
v_r^e = V_r, \qquad v_\theta^e = 0, \qquad p^e = P, \tag{5}
$$

а также условие на бесконечности

$$
v_r^e \to -v_\infty \cos\theta, \qquad v_\theta^e \to v_\infty \sin\theta. \tag{6}
$$

Согласно [25] общее решение (2) имеет вид

$$v_r = \Big(\frac{C_1}{r^3} + \frac{C_2}{r} + C_3 + C_4 r^2\Big)\cos\theta, \qquad v_\theta = \Big(\frac{C_1}{2r^3} - \frac{C_2}{2r} - C_3 - 2C_4 r^2\Big)\sin\theta,$$
$$p = \mu\Big(\frac{C_2}{r^2} + 10 C_4 r\Big)\cos\theta. \tag{7}$$

При $r > b$ с учетом условия на бесконечности (6) из уравнений (7) получаем выражения для искомых параметров

$$v_r^e = \Big(\frac{C_1}{r^3} + \frac{C_2}{r} - v_\infty\Big)\cos\theta, \quad v_\theta^e = \Big(\frac{C_1}{2r^3} - \frac{C_2}{2r} + v_\infty\Big)\sin\theta, \quad p^e = \mu\,\frac{C_2}{r^2}\,\cos\theta. \tag{8}$$

Из соотношений (7) следует, что с учетом ограниченности физических параметров при $r = 0$ решение в полости шара при $r < a$ имеет вид

$$v_r^i = (C_7 + C_8 r^2)\cos\theta, \qquad v_\theta^i = (-C_7 - 2C_8 r^2)\sin\theta, \quad p^i = 10\mu C_8 r\cos\theta. \tag{9}$$

В [9] приведено решение рассматриваемой задачи в области фильтрационного течения

$$V_r = -C_6(k/\mu)\cos\theta, \quad V_\theta = C_6(k/\mu)\sin\theta, \quad P = (C_5/r^2 + C_6 r)\cos\theta. \tag{10}$$

Разрешая шесть граничных условий (4), (5) относительно шести неизвестных констант C_1, C_2, C_5, C_6, C_7, C_8, получаем выражения

$$C_1 = -\frac{b^3(-a^3 + b^3 + 2(5a + b)k)}{-2a^3 + 20ka + 2b^3 + bk}\,v_\infty, \qquad C_2 = \frac{3}{2}\,b\Big(1 - \frac{bk}{-2a^3 + 20ka + 2b^3 + bk}\Big)v_\infty,$$
$$C_5 = \frac{3ab(a^2 - 10k)}{2a^3 - 2b^3 - (20a + b)k}\,\mu v_\infty, \qquad C_6 = \frac{3b}{-2a^3 + 20ka + 2b^3 + bk}\,\mu v_\infty, \tag{11}$$
$$C_7 = -\frac{6bk}{-2a^3 + 20ka + 2b^3 + bk}\,v_\infty, \qquad C_8 = \frac{3bk}{a^2(-2a^3 + 20ka + 2b^3 + bk)}\,v_\infty.$$

Сила, действующая на шар в потоке жидкости, рассчитывается по формуле [25]

$$W = 2\pi b^2 \int_0^\pi (\tau_{r\theta}\sin\theta - \sigma_{rr}\cos\theta)\sin\theta\,d\theta, \tag{12}$$

где $\sigma_{rr} = -p^e + 2\mu\,\partial v_r^e/\partial r$, $\tau_{r\theta} = \mu((\partial v_r^e/\partial\theta)/r + \partial v_\theta^e/\partial r - v_\theta^e/r)$ — нормальная и касательная компоненты напряжения на границе шара при $r = b$.

В данном случае с учетом (8), (11) получаем

$$W = 6\pi b\mu v_\infty\Big(1 - \frac{bk}{-2a^3 + 20ka + 2b^3 + bk}\Big). \tag{13}$$

При этом выражение для коэффициента сопротивления C_D имеет вид

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}\Big(1 - \frac{\beta}{2 - 2\gamma^3 + 20\gamma\beta + \beta}\Big), \tag{14}$$

где $\mathrm{Re} = 2b\rho v_\infty/\mu$ — число Рейнольдса; $\gamma = a/b$ — безразмерная характеристика толщины стенки сферы; $\beta = k/b^2$ — безразмерная характеристика проницаемости стенки сферы.

При проницаемости, близкой к нулю ($k \to 0$, $a < b$), формула (13) переходит в классическую формулу Стокса [25].

В предположении очень тонкой стенки ($a \to b$, $k > 0$) формулы (13), (14) имеют вид

$$W = \frac{120}{21}\,\pi b\mu v_\infty, \qquad C_D = \frac{160}{7}\,\frac{1}{\mathrm{Re}} \approx \frac{22{,}9}{\mathrm{Re}}.$$

Следует отметить, что в рассматриваемом случае сила не зависит от проницаемости. Это обусловлено тем, что в данной постановке задачи бесконечно тонкой стенкой является окружность радиусом b, на которой обращается в нуль касательная компонента скорости, а радиальная компонента непрерывна. Иными словами, жидкость мгновенно проникает внутрь шара.

В предположении, что радиус полости стремится к нулю ($a \to 0$), формула (13) совпадает с формулой, полученной в [9] для случая обтекания проницаемого шара.

Согласно [25] выражение для функции тока имеет вид (формула справедлива во всей исследуемой области)

$$\psi(r,\theta) = 2\pi r^2 \int\limits_0^\theta v_r \sin\theta \, d\theta. \tag{15}$$

После интегрирования выражений для скорости (8)–(10) с учетом (11) выражение (15) принимает вид

$$\psi(r,\theta) = \begin{cases} \pi\Big(\dfrac{(b-r)^2(b+2r)(a^3-10ak)}{(-2a^3+20ka+2b^3+bk)r} - \\ \qquad -\dfrac{b(b^5+(2k-3r^2)b^3+2r^3b^2+kr^3)}{(-2a^3+20ka+2b^3+bk)r}\Big) v_\infty \sin^2\theta, & r > b, \\ -\pi \dfrac{3bk}{-2a^3+20ka+2b^3+bk} v_\infty r^2 \sin^2\theta, & a \leqslant r \leqslant b, \\ -\pi \dfrac{3bk(2a^2-r^2)}{-2a^3+2b^3+20ak+bk} \dfrac{r^2}{a^2} v_\infty \sin^2\theta, & r < a. \end{cases} \tag{16}$$

На рис. 2 показаны линии тока в плоскости xz. Из соотношений (16) следует, что в области $a \leqslant r \leqslant b$ поверхностями тока являются плоскости $x = r\sin\theta = \mathrm{const}$. Этот вывод согласуется с картиной течения, представленной на рис. 2.

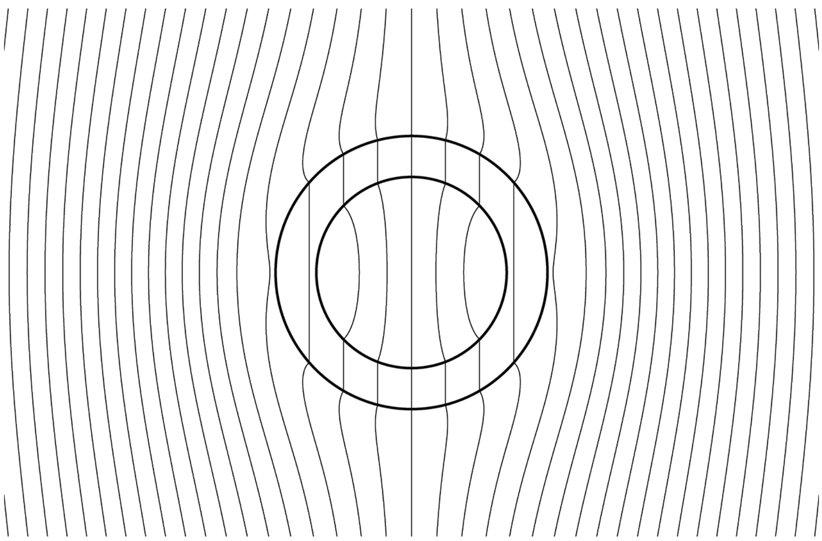

Рис. 2. Линии тока жидкости при выполнении условия прилипания на внешней границе шара

Масса жидкости, попавшей в шар за единицу времени, описывается формулой

$$q_b = 2\pi b^2 \rho \int\limits_0^{\pi/2} v_r^e(b,\theta)\sin\theta\, d\theta. \qquad (17)$$

В данном случае формула (17) принимает вид

$$q_b = -\frac{3\pi k \rho v_\infty}{2(1-\gamma^3) + 20\gamma\beta + \beta}.$$

Задача стационарного обтекания полого пористого шара с граничным условием проскальзывания. Рассмотрим задачу стационарного обтекания полого пористого шара потоком при выполнении условия проскальзывания типа (1).

Решим уравнения (2), (3) с условием на бесконечности (6). В качестве граничных условий на внутренней поверхности шара ($r = a$) используем условие непрерывности радиальной составляющей скорости, условие прилипания жидкости и условие непрерывности давления, аналогичное (4):

$$v_r^i = V_r, \qquad v_\theta^i = 0, \qquad p^i = P. \qquad (18)$$

На внешней границе шара ($r = b$) зададим условие непрерывности радиальной составляющей скорости, условие проскальзывания жидкости типа (1) и условие непрерывности давления

$$v_r^e = V_r, \qquad \frac{\partial v_\theta^e}{\partial r} = \frac{\alpha}{\sqrt{k}}\,(v_\theta^e(b,\theta) - V_\theta(b,\theta)), \qquad p^e = P, \qquad (19)$$

где α — коэффициент, определяющий величину скачка.

Решением задачи в такой математической постановке являются выражения (8)–(10) для функций, зависящих от шести констант C_1, C_2, C_5, C_6, C_7, C_8. Выражения для этих констант получаются после подстановки в граничные условия (18), (19):

$$C_1 = -\frac{b^3(\alpha b - \sqrt{k}\,)(-a^3 + 10ka + b^3)v_\infty}{(40a+3b)k^{3/2} + \alpha b(20a+3b)k + 4(b^3-a^3)\sqrt{k} + 2\alpha b(b^3-a^3)},$$

$$C_2 = \frac{3b(\alpha b + \sqrt{k}\,)(-a^3 + 10ka + b^3)v_\infty}{(40a+3b)k^{3/2} + \alpha b(20a+3b)k + 4(b^3-a^3)\sqrt{k} + 2\alpha b(b^3-a^3)},$$

$$C_5 = -\frac{3ab(\alpha b + \sqrt{k}\,)(a^2 - 10k)\mu v_\infty}{(40a+3b)k^{3/2} + \alpha b(20a+3b)k + 4(b^3-a^3)\sqrt{k} + 2\alpha b(b^3-a^3)},$$

$$C_6 = \frac{3b(\alpha b + \sqrt{k}\,)\mu v_\infty}{(40a+3b)k^{3/2} + \alpha b(20a+3b)k + 4(b^3-a^3)\sqrt{k} + 2\alpha b(b^3-a^3)},$$

$$C_7 = -\frac{6b(\alpha b + \sqrt{k}\,)k v_\infty}{(40a+3b)k^{3/2} + \alpha b(20a+3b)k + 4(b^3-a^3)\sqrt{k} + 2\alpha b(b^3-a^3)},$$

$$C_8 = \frac{3b(\alpha b + \sqrt{k}\,)k v_\infty}{a^2((40a+3b)k^{3/2} + \alpha b(20a+3b)k + 4(b^3-a^3)\sqrt{k} + 2\alpha b(b^3-a^3))}.$$

Аналогично по формуле (12) можно вычислить силу, действующую на шар со стороны потока:

$$W = \frac{12(\alpha b + \sqrt{k}\,)(-a^3 + 10ka + b^3)}{(40a + 3b)k^{3/2} + \alpha b(20a + 3b)k + 4(b^3 - a^3)\sqrt{k} + 2\alpha b(b^3 - a^3)}\, b\mu\pi v_\infty. \tag{20}$$

При этом выражение для коэффициента сопротивления имеет вид

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}\,\frac{(\alpha + \beta^{1/2})(1 - \gamma^3 + 10\gamma\beta)}{\alpha(1-\gamma^3) + 2\beta^{1/2}(1-\gamma^3) + \alpha\beta(10\gamma + 3/2) + \beta^{3/2}(20\gamma + 3/2)}. \tag{21}$$

Рассмотрим предельные случаи характеристик оболочки.

В случае, когда шар непроницаем ($k \to 0$), формула (21) переходит в известную формулу Стокса [25].

В случае, когда размер полости стремится к нулю ($a \to 0$), выражения (20), (21) преобразуются к виду

$$W = \frac{12b^2(\alpha b + \sqrt{k}\,)}{\sqrt{k}\,(4b^2 + 3k) + \alpha(2b^3 + 3kb)}\, b\mu\pi v_\infty, \qquad C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}\,\frac{2(\alpha + \beta^{1/2})}{\beta^{1/2}(4 + 3\beta) + \alpha(2 + 3\beta)}.$$

В случае бесконечно тонкой стенки ($a \to b$) формулы (20), (21) преобразуются к виду

$$W = \frac{120(\alpha b + \sqrt{k}\,)}{23\alpha b + 43\sqrt{k}}\, b\mu\pi v_\infty, \qquad C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}\,\frac{20(\alpha + \beta^{1/2})}{23\alpha + 43\beta^{1/2}}.$$

Функция тока определяется в соответствии с формулой (15):

— при $r > b$

$$\psi(r,\theta) = \pi\Big(\frac{-(\alpha b - \sqrt{k}\,)(-a^3 + 10ka + b^3)b^3}{r\Delta} + \\ + \frac{3(\alpha b + \sqrt{k}\,)(-a^3 + 10ka + b^3)r^2 b}{r\Delta} - r^2\Big) v_\infty \sin^2\theta;$$

— при $a \leqslant r \leqslant b$

$$\psi(r,\theta) = -\pi\,\frac{3b(\alpha b + \sqrt{k}\,)k}{\Delta}\, v_\infty r^2 \sin^2\theta;$$

— при $r < a$

$$\psi(r,\theta) = -\pi\,\frac{3bk(\alpha b + \sqrt{k}\,)(2a^2 - r^2)}{a^2\Delta}\, v_\infty r^2 \sin^2\theta,$$

где $\Delta = (40a + 3b)k^{3/2} + \alpha b(20a + 3b)k + 4(b^3 - a^3)\sqrt{k} + 2\alpha b(b^3 - a^3)$.

Из полученных формул следует, что в случае $r \leqslant b$ выражение для функции тока отличается от формулы (16) только множителем, не зависящим от r, θ. В случае $r > b$ картина течения существенно меняется (рис. 3).

В отличие от режима обтекания с условиями прилипания на внешней границе жидкость входит в сферу практически по касательной.

Масса жидкости, попавшей в шар, рассчитывается по формуле (17), и в данном случае выражение для нее имеет вид

$$q_b = -\frac{3\pi(\alpha + \beta^{1/2})}{(40\gamma + 3)\beta^{3/2} + \alpha\beta(20\gamma + 3) + 4\beta^{1/2}(1-\gamma^3) + 2\alpha(1-\gamma^3)}\, k\rho v_\infty.$$

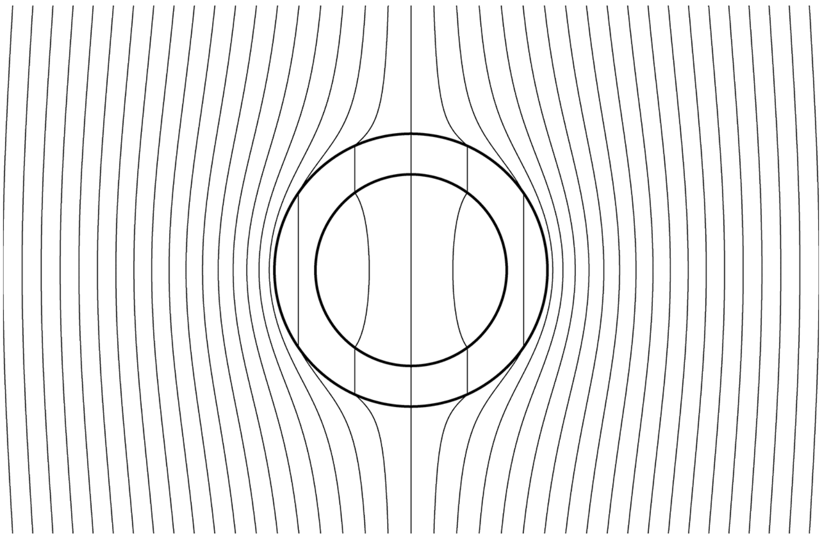

Рис. 3. Линии тока жидкости при выполнении условия скольжения на внешней границе шара

Заключение. Таким образом, решена задача обтекания пористой полой сферы потоком вязкой несжимаемой жидкости в приближении Стокса, в котором фильтрационное течение через оболочку шара подчиняется закону Дарси. Рассмотрены случаи выполнения условия прилипания и условий скольжения на внешней границе шара. В обоих случаях рассчитана сила, действующая на шар со стороны жидкости, построена функция тока и получены формулы для расхода жидкости через поверхность шара.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рахматуллин Х. А.** Обтекание проницаемого тела // Вестн. Моск. ун-та. 1950. № 3. С. 41–55.
2. **Байчоров Х. Я.** Общие положения об обтекании пористого круглого цилиндра плоскопараллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости // Вестн. Моск. ун-та. 1951. № 10. С. 23–33.
3. **Байчоров Х. Я.** Обтекание пористого круглого цилиндра плоскопараллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости при линейном и квадратичном законе фильтрации // Вестн. Моск. ун-та. 1952. № 8. С. 73–89.
4. **Bhatt B. S.** Flow past a porous spherical shell using the Brinkman model // J. Phys. D. Appl. Phys. 1994. V. 27, N 1. P. 37–41.
5. **Joseph D. D., Tao L. N.** The effect of permeability on the slow motion of a porous sphere in a viscous liquid // Z. angew. Math. Mech. 1964. Bd 44, N 8/9. S. 361–364.
6. **Singh M. P., Gupta J. L.** The effect of permeability on the drag of a porous sphere in a uniform stream // Z. angew. Math. Mech. 1971. Bd 51, N 1. S. 27–32.
7. **Леонов А. И.** Медленное стационарное обтекание пористой сферы вязкой жидкостью // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, № 3. С. 564–566.
8. **Yamamoto K.** Flow of viscous fluid at small Reynolds numbers past a porous sphere // J. Phys. Soc. Japan. 1971. V. 31, N 5. P. 1572–1575.
9. **Шаповалов В. М.** Обтекание полупроницаемой частицы вязкой жидкостью // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 4. С. 48–53.

10. **Jones I. P.** Low Reynolds number flow past a porous spherical shell // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1973. V. 73, N 1. P. 231–238.
11. **Verma P. D., Bhatt B. S.** Flow past a porous spherical shell using matched asymptotic technique // J. Mecanique. 1975. V. 14. P. 421–434.
12. **Padmavathi B. S., Amaranth T., Palaniappan D.** Stokes flow about a porous spherical particle // Arch. Mech. 1994. V. 46, N 1/2. P. 191–199.
13. **Padmavathi B. S., Amaranth T.** A solution for the problem of Stokes flow past a porous sphere // Z. angew. Math. Phys. 1993. Bd 44. S. 178–184.
14. **Журов А. Н., Полянин А. Д., Потапов Е. Д.** Обтекание пористой частицы сдвиговым потоком // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 3. С. 113–120.
15. **Neale G., Epstein N.** Creeping flow relative to permeable spheres // Chem. Engng Sci. 1973. V. 28, N 10. P. 1865–1874.
16. **Hsu H. J., Huang L. H., Hsieh P. C.** A re-investigation of the low Reynolds number uniform flow past a porous spherical shell // Intern. J. Numer. Anal. Mech. Geomech. 2004. V. 28. P. 1427–1439.
17. **Srivastava A. C., Srivastava N.** Flow past a porous sphere at small Reynolds numbers // Z. angew. Math. Phys. 2005. Bd 56. S. 821–835.
18. **Nandakumar K., Masliyah J. H.** Laminar flow past a permeable sphere // Canad. J. Chem. Engng. 1982. V. 60, N 2. P. 202–211.
19. **Masliyah J. H., Policar M.** Terminal velocity of porous spheres // Canad. J. Chem. Engng. 1980. V. 58, N 3. P. 299–302.
20. **Brinkman H. C.** A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Sci. Res. 1947. V. A1. P. 27–34.
21. **Beavers G. S., Joseph D. D.** Boundary conditions at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. 1967. V. 30, pt 1. P. 197–207.
22. **Beavers G. S., Sparrow E. M., Magnuson R. A.** Experiments on coupled parallel flows in a channel and boundary porous medium // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engng. 1970. V. 92, N 4. P. 843–848.
23. **Saffman P. G.** On the boundary condition at the surface of a porous medium // Stud. Appl. Math. 1971. V. 50, N 2. P. 93–101.
24. **Верещагин А. С., Верещагин С. Н., Фомин В. М.** Математическое моделирование движения импульса концентрации гелия по колонке, заполненной ценосферами // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 3. С. 92–102.
25. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.; Л.: ОГИЗ: Гостехтеоретиздат, 1948. Ч. 2.
26. **Сулейманов Б. А.** Особенности фильтрации гетерогенных систем. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2006.

Поступила в редакцию 26/IV 2010 г.