ПМТФ, № 1, 1963

К ТЕОРИИ УДАРНЫХ ВОЛН В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Р. В. Дойч
(*Клуж, Румыния*)

В магнитной гидродинамике в отличие от обычной гидродинамики имеется, кроме скорости, порядка скорости звука, и другая скорость порядка альфвеновской скорости, которые характеризуют распространение сигналов. С увеличением напряженности магнитного поля и с уменьшением плотности вещества альфвеновская скорость возрастает; в достаточно сильном магнитном поле в случае разреженного газа альфвеновская скорость может достигать величины порядка скорости света и даже в том случае, когда звуковая скорость будет пренебрежимой по сравнению со скоростью света. Поэтому в магнитной гидродинамике по сравнению с обычной гидродинамикой область, в которой необходимо пользоваться релятивистской магнитной гидродинамикой, будет более широкой.

Ниже изучается структура слабых ударных волн на основе уравнений релятивистской магнитной гидродинамики, содержащих члены, связанные с диссипативными эффектами. Выводятся выражения для изменения термодинамических и электромагнитных величин внутри разрыва. Устанавливается ширина ударной волны в зависимости от диссипативных коэффициентов и величины скачка плотности. Рассматривается также влияние термоэлектрических явлений на структуру ударных волн. Показано, что вследствие термоэлектрических явлений внутри разрыва появляются продольное электрическое поле и соответствующий ему двойной электрический слой. Это явление нерелятивистское, однако имеется явление, вызванное термоэлектрическими явлениями, которое оказывается чисто релятивистским. Оно заключается в том, что внутри разрыва силовые линии магнитного поля отклоняются от плоскости, в которой находятся нормаль к разрыву и магнитные силовые линии перед или за разрывом. Дается зависимость скорости ударных волн от скачка давления Δp с точностью до первого порядка по $\Delta p/p$.

1. В дальнейшем вводятся различные системы координат. Систему, движущуюся вместе с разрывом, обозначим через K. Систему, связанную со средой перед фронтом ударной волны, у которой оси параллельны с осями системы K, обозначим через K°. Введем и собственные системы координат, в которых выражены, в частности, все термодинамические величины.

Будем пользоваться уравнениями релятивистской магнитной гидродинамики, которые содержат и дополнительные члены, связанные с диссипативными процессами. Обозначим эти члены через τ_{ik} и ν_i, тогда тензор энергии импульса и четырехвектор плотности потока вещества можно представить в виде

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{kl} - \frac{1}{4}F_{lm}^2\delta_{ik}\right) + p\delta_{ik} + wu_iu_k + \tau_{ik} \qquad n_i = nu_i + \nu_i \quad (1.1)$$

Здесь F_{ik} — тензор электромагнитного поля, w — тепловая функция единицы собственного объема, u_i — четырехскорость; n — число частиц в единице собственного объема. Вид тензора τ_{ik} и вектора ν_i можно определить из закона возрастания энтропии. Введем в рассмотрение:

уравнения движения

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial n_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.2)$$

уравнения Максвелла

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i, \qquad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0 \quad (1.3)$$

термодинамическое равенство

$$d\frac{w}{n} = \frac{1}{n}dp + Td\frac{s}{n} \tag{1.4}$$

Тогда из уравнений (1.1) легко получить

$$u_i \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{u_i j_l}{c} F_{li} - T\frac{\partial (su_i)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \nu_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = 0 \qquad \left(\mu = \frac{1}{n}(w - Ts)\right) \tag{1.5}$$

где T — температура, s — энтропия единицы собственного объема, μ — релятивистский химический потенциал вещества, c — скорость света, j_i — компоненты четырехвектора электрического тока.

В собственной системе координат удовлетворяются (и поэтому в любой системе отсчета должны удовлетворяться) тензорные уравнения

$$u_i \nu_i = 0, \qquad u_i \tau_{ik} = 0, \qquad u_i j_i = -\rho_0 c \tag{1.6}$$

где ρ_0 — плотность электрического заряда в собственной системе.

Поэтому уравнение (1.5) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(su_i - \frac{\mu}{T}\nu_i\right) = \frac{j_l F_l}{T} - \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\mu}{T} - \frac{\tau_{ik}}{T}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \qquad \left(F_l = \frac{1}{c}F_{li}u_i\right) \tag{1.7}$$

Слева стоит четырехдивергенция потока энтропии, поэтому это выражение должно дать закон возрастания энтропии. Правая часть уравнения (1.7) должна быть положительной. Векторы j_l, ν_i и тензор τ_{ik} можно разлагать в ряд по F_l, $\partial\mu T^{-1}/\partial x_i$, $\partial u_i/\partial x_k$. С точностью до первого порядка можно писать

$$j_l = A_{li}F_i + B_{li}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\mu}{T} + C_{lik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad \nu_l = A^{\circ}_{li}F_i + B^{\circ}_{li}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\mu}{T} + C^{0}_{lik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{1.8}$$

$$\tau_{lm} = \alpha_{lmi}F_i + \beta_{lmi}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\mu}{T} + \gamma_{lmik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

Будем определять тензоры A, A°, B, B°, C, C°, α, β, γ при условиях:

а) Среда предполагается изотропной.

б) Выражения (1.8) при подстановке в (1.7) должны обеспечить положительность правой части.

в) Условия (1.6) должны выполняться в любой инерциальной системе.

г) При переходе к пределу $u_\alpha \to 0$ уравнения (1.8) должны совпадать с соответствующими нерелятивистскими уравнениями.

д) При отсутствии электропроводности выражения (1.8) должны дать известные релятивистские выражения для непроводящей среды [1].

При этих условиях коэффициенты выражений (1.8) определяются однозначно, и в результате получаем

$$j_i = \sigma c F_i + \sigma\alpha \frac{T^2}{W}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\mu}{T} + u_i u_l \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\mu}{T}\right] + cu_i\rho_0$$

$$\nu_i = -\sigma\alpha\frac{T}{W}F_i - \frac{\gamma}{c}\left(\frac{T}{W}\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\mu}{T} + u_i u_l \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\mu}{T}\right] \qquad \left(W = \frac{w}{n}\right) \tag{1.9}$$

$$\tau_{ik} = -c\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + u_k u_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + u_i u_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right) - \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right) c\,(u_i u_k + \delta_{ik})\frac{\partial u_l}{\partial x_l}$$

$$(\gamma = \varkappa + \sigma\alpha^2 T)$$

Здесь σ — коэффициент электропроводности; α — коэффициент, характеризующий термоэлектрические явления; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности; η, ζ — два коэффициента вязкости (все коэффициенты выбраны в соответствии с их нерелятивистским определением); W — тепловая функция в среднем для одной частицы.

В силу соотношений (1.9) уравнение (1.7) можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(su_i - \frac{\mu}{T}\nu_i\right) = \frac{j_i^2 + c^2\rho_0^2}{\sigma c T} + \frac{\varkappa}{c}\left(\frac{T}{W}\right)^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\mu}{T}\right)^2 + \left(u_l\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\mu}{T}\right)^2\right] +$$
$$+\frac{\eta c}{T}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) + \left(u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2\right] + \frac{c}{T}\left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 \qquad (1.10)$$

2. Уравнения (1.9) относятся к любой системе. Выбираем оси системы K таким образом, чтобы ось x была направлена по нормали к разрыву; скорость потока вещества v_∞ при $x = -\infty$ будет параллельна оси x; вектор напряженности постоянного однородного внешнего магнитного поля расположен в плоскости xy и образует с осью x угол ϑ.

В такой системе исходные уравнения упрощаются, так как

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Из уравнений Максвелла (1.3) имеем

а) В силу $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$

$$H_x = H_{x0} = \text{const} \qquad (2.1)$$

б) Как известно из нерелятивистской теории, внутри разрыва имеются электрические токи. Поэтому при переходе от одной системы к другой, четвертый компонент четырехвектора тока может отличаться от нуля. В дальнейшем будем требовать только, чтобы вдали от разрыва ($x^\circ = -\infty$, $x^\circ = \infty$) в системе K° было удовлетворено условие электронейтральности и определять компоненту j_4 при помощи уравнения $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ согласно (1.9), пользуясь выражением (2.3) (2.2)

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{dE_x}{dx} = -\frac{4\pi i}{c}j_4 = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(u_x E_x - \frac{u_z v_\infty}{c}H_{y0}\right) - \frac{4\pi i\sigma\alpha}{c}\frac{T^2}{W}u_x u_4\frac{d}{dx}\frac{\mu}{T} + 4\pi i u_4\rho_0$$

в) Из уравнений $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ находим

$$E_y = \text{const} = E_{y0}, \qquad E_z = \text{const} = E_{z0}$$

Для определения E_{y0}, E_{z0} предположим, что при $x^\circ = -\infty$ в системе K° были удовлетворены условия $H_z^\circ = 0$, $E_x^\circ = E_y^\circ = E_z^\circ = 0$. В этом случае получаем

$$E_y = 0, \qquad E_z = -\frac{v_\infty H_{y0}}{c} \qquad (2.3)$$

В дальнейшем нижний индекс 0 означает величины при $x = -\infty$.

г) Согласно уравнениям $\operatorname{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\,\mathbf{j}$ имеем

$$j_x = 0, \qquad j_y = -\frac{c}{4\pi}\frac{dH_z}{dx}, \qquad j_z = \frac{c}{4\pi}\frac{dH_y}{dx}$$

Имея в виду уравнения (1.9), из этих соотношений получим

$$\sigma\alpha\frac{T^2}{W}(1 + u_x^2)\frac{d}{dx}\frac{\mu}{T} + \sigma(-iu_4E_x + u_yH_z - u_zH_y) + cu_x\rho_0 = 0 \qquad (2.4)$$

$$\sigma\alpha\frac{T^2}{W}u_xu_y\frac{d}{dx}\frac{\mu}{T} + \sigma(u_zH_x - u_xH_z) + cu_y\rho_0 = -\frac{c}{4\pi}\frac{dH_z}{dx} \qquad (2.5)$$

$$\sigma\alpha\frac{T^2}{W}u_xu_z\frac{d}{dx}\frac{\mu}{T} + \sigma\left(\frac{iu_4v_\infty H_{y0}}{c} + u_xH_y - u_yH_x\right) + cu_z\rho_0 = \frac{c}{4\pi}\frac{dH_y}{dx} \qquad (2.6)$$

д) Уравнения (1.2) системы K имеют вид

$$T_{xi} = \text{const}, \qquad n_x = \text{const}$$

Подставляя сюда выражения для T_{xi} и n_x, получаем

$$\frac{1}{8\pi}(H_y^2 - H_{y0}^2) + p - p_0 + Wnu_x^2 - \frac{W_0 n_0 v_\infty^2}{c^2\theta_0^2} = c\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)(1 + u_x^2)\frac{du_x}{dx} \tag{2.7}$$

$$-\frac{H_{x0}}{4\pi}(H_y - H_{y0}) + Wnu_x u_y = c\eta(1 + u_x^2)\frac{du_y}{dx} + c\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)u_x u_y\frac{du_x}{dx} \tag{2.8}$$

$$-\frac{H_{x0}}{4\pi}H_z + \frac{v_\infty H_{y0}}{4\pi c}E_x + Wnu_x u_z = c\eta(1 + u_x^2)\frac{du_z}{dx} + c\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)u_x u_z\frac{du_x}{dx} \tag{2.9}$$

$$\frac{iv_\infty H_{y0}}{4\pi c}(H_y - H_{y0}) + Wnu_x u_4 - \frac{iW_0 n_0 v_\infty}{c\,\theta_0^2} = c\,\eta(1 + u_x^2)\frac{du_4}{dx} +$$

$$+ c\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)u_x u_4\frac{du_x}{dx} \tag{2.10}$$

$$n_x = nu_x + i\sigma\alpha\frac{T}{cW}u_4E_x - \sigma\alpha\frac{T}{cW}(u_yH_z - u_zH_y) - \frac{\Upsilon}{c}\left(\frac{T}{W}\right)^2(1 + u_x^2)\frac{d}{dx}\frac{\mu}{T} = \frac{n_0 v_\infty}{c\,\theta_0}$$

$$\left(\theta_0 = \sqrt{1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}}\right) \tag{2.11}$$

Имея в виду, что в рассматриваемом случае удовлетворено уравнение (2.4), выражение (2.11) можно писать в виде

$$nu_x = J + \frac{\varkappa}{c}\left(\frac{T}{W}\right)^2(1 + u_x^2)\frac{d}{dx}\frac{\mu}{T} \qquad \left(J = \frac{n_0 v_\infty}{c\,\theta_0}\right) \tag{2.12}$$

3. На основе уравнений (2.1) — (2.12) будем изучать структуру слабых плоских ударных волн. Будем пока выбирать независимым переменным $V = 1/n$. Так как ударная волна предполагается слабой, то можно записать $V = V_0 + \delta V$ (где $V_0 = 1/n_0$) и разлагать величины v_y, v_z, H_y, H_z и E_x в ряд по δV. Как в случае нерелятивистской теории [1-3], здесь также имеет место то обстоятельство, что с дифференцированием по x порядок малости увеличивается на единицу. Для решения рассматриваемой задачи достаточно ограничиться членами до второго порядка и искать решение в виде

$$v_y = a_1\delta V + b_1(\delta V)^2 + c_1\frac{dV}{dx}, \qquad v_z = a_3\delta V + b_3(\delta V)^2 + c_3\frac{dV}{dx}$$

$$H_y = H_{y0} + a_2\delta V + b_2(\delta V)^2 + c_2\frac{dV}{dx}, \qquad H_z = a_4\delta V + b_4(\delta V)^2 + c_4\frac{dV}{dx} \tag{3.1}$$

$$E_x = a_5\delta V + b_5(\delta V)^2 + c_5\frac{dV}{dx}$$

Здесь

$$v_y = u_y\theta c, \qquad v_z = u_z\theta c, \qquad \theta^2 = 1 - (u_x\theta)^2 - \frac{v_y^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2}$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i можно определить из системы уравнений (2.1) — (2.12). Однако уравнения (2.2), (2.4), (2.5) и (2.6) являются линейно зависимыми согласно (1.6). Поэтому в дальнейшем отбросим из них уравнение (2.4).

В выражениях (3.1) опущены все члены выше второго порядка, поэтому и в основных уравнениях следует также произвести соответствующие упрощения. В этом случае имеем более простые уравнения:

$$-\frac{v_\infty H_{y0}}{c} v_z + JVc\theta E_x = \frac{c^2\theta_0}{4\pi\sigma}\frac{dE_x}{dx} - \frac{\alpha JcV_0T^2}{W_0}\frac{d}{dx}\frac{\mu}{T} \qquad (3.2)$$

$$H_{x0}v_z - JVc\theta H_z = -\frac{c^2\theta_0}{4\pi\sigma}\frac{dH_z}{dx} \qquad (3.3)$$

$$Jc(V\theta H_y - V_0\theta_0 H_{y0}) - H_{x0}v_y = \frac{c^2\theta_0}{4\pi\sigma}\frac{dH_y}{dx} - \frac{\varkappa V_0}{\theta_0}\left(\frac{T}{W}\right)^2\frac{d}{dx}\frac{\mu}{T} \qquad (3.4)$$

$$p - p_0 + \frac{1}{8\pi}(H_y^2 - H_{y0}^2) + WV\left[J + \frac{\varkappa}{c\theta_0^2}\left(\frac{T}{W}\right)^2\frac{d}{dx}\frac{\mu}{T}\right]^2 -$$

$$- W_0V_0J^2 = \frac{Jc}{\theta_0^2}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\frac{dV}{dx} \qquad (3.5)$$

$$-\frac{H_{x0}}{4\pi}(H_y - H_{y0}) + \frac{WJ}{c\theta}v_y = \frac{\eta}{\theta_0^3}\frac{dv_y}{dx} \qquad (3.6)$$

$$-\frac{H_{x0}}{4\pi}H_z + \frac{J\theta_0V_0H_{y0}}{4\pi}E_x + \frac{WJ}{c\theta}v_z = \frac{\eta}{\theta_0^3}\frac{dv_z}{dx} \qquad (3.7)$$

$$\frac{JV_0\theta_0H_{y0}}{4\pi}(H_y - H_{y0}) + J\left(\frac{W}{\theta} - \frac{W_0}{\theta_0}\right) = -\frac{\varkappa W_0}{c\theta_0^3}\left(\frac{T}{W}\right)^2\frac{d}{dx}\frac{\mu}{T} -$$

$$-\frac{\eta c}{\theta_0^4}\frac{d\theta}{dx} + \frac{cJ^3V_0}{\theta_0}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\frac{dV}{dx} \qquad (3.8)$$

Здесь отброшены и члены с ρ_0, так как ρ_0 будет третьего порядка по Δp [см. (5.7)]. Для определения коэффициентов в выражениях (3.1) используем уравнения (3.2) — (3.4), (3.6) и (3.7). В результате:

$$a_1 = \frac{Jc\theta_0^3H_{y0}H_{x0}}{4\pi D}, \qquad a_2 = \frac{J^2\theta_0^2W_0H_{y0}}{D}, \qquad \begin{array}{l} a_3 = a_4 = a_5 = 0, \\ b_3 = b_4 = b_5 = 0, \end{array} \qquad b_1 \neq 0$$

$$b_2 = \frac{J^2W_0H_{y0}\theta_0^2}{D^2}\left\{\frac{H_{x0}^2}{4\pi W_0}\left(\frac{\partial W}{\partial V}\right)_S - \frac{J^2\theta_0^2V_0H_{x0}^2}{8\pi} + \frac{J^2\theta_0^2W_0}{2}\left(\frac{3}{\theta_0^2} - 1\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{H_{x0}^2H_{y0}^2\theta_0^4V_0J^2}{32\pi^2 D}\right\}$$

$$c_1 \neq 0, \qquad c_2 = -\frac{\eta H_{x0}}{D\theta_0^3}a_1 - \frac{JW_0c}{4\pi\sigma D}a_2 - \frac{\varkappa JW_0H_{y0}V_0}{cD}\left(\frac{T}{W}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_S\frac{\mu}{T} \qquad (3.9)$$

$$c_3 = \frac{\alpha H_{y0}J^2c\theta_0V_0^2T}{4\pi W_0^2D_1}\left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_S\frac{\mu}{T}, \quad c_4 = \frac{\alpha H_{y0}H_{x0}JV_0T^2}{4\pi W_0^2D_1}\left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_S\frac{\mu}{T}, \quad c_5 = \frac{\alpha T^2D}{\theta W_0^2D_1}\left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_S\frac{\mu}{T}$$

$$D = \frac{H_{x0}^2}{4\pi} - J^2V_0W_0, \qquad D_1 = J^2V_0 - \frac{H_{x0}^2}{4\pi W_0} + (1 - \theta_0^2)\frac{H_{y0}^2}{4\pi W_0}, \qquad S = sV$$

Из того, что величина c_5 отлична от нуля следует, что в системе K, а также и в системе K° имеется внутри разрыва электрическое поле, которое направлено по оси x, и его величина определяется коэффициентом α. Это явление не является чисто релятивистским. Оно связано с уравнением (2.4), согласно которому $j_x = 0$, но при $\alpha \neq 0$ появляются и в нерелятивистском рассмотрении электрические поля, зависящие линейно от градиента температуры. С тем, что $\alpha \neq 0$ связано также и то обстоятельство, что согласно $c_4 \neq 0$ и $c_3 \neq 0$ внутри разрыва магнитные силовые линии, а также линии тока отклоняются от плоскости xy. Однако при $x = \infty$ и $x = -\infty$ они находятся в плоскости, параллельной xy, а это означает, что, кроме скачка плотности, температуры и т. д. внутри разрыва магнитные силовые линии и линии тока перескакивают из одной плоскости, параллельной плоскости xy, в другую, также параллельную плоскости xy.

В такой системе координат, где $\mathbf{H} \parallel \mathbf{v}$ при $x = -\infty$, для E_x' находим

$$E_x' = -\frac{\alpha T^2}{W\theta_0\vartheta_0}\frac{dV}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_S\frac{\mu}{T} \qquad \left(\vartheta_0^2 = 1 - \frac{v_\infty^2 H_{y0}^2}{c^2 H_{x0}^2}\right) \tag{3.10}$$

Переход вещества через фронт ударной волны необратим, поэтому энтропия объема V увеличивается от S_0 до $S_0 + \delta S$. Как в обычной релятивистской гидродинамике [4], естественно предполагать δS второго порядка по δp (изменение давления) и с точностью до второго порядка по δp

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S\delta p + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_S(\delta p)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p\delta S \tag{3.11}$$

$$W = W_0 + \delta W = W_0 + T\delta S + V\delta p + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S(\delta p)^2 \tag{3.12}$$

Воспользуемся уравнениями (3.5) и (3.8); с учетом (3.11), (3.12), а также разложения (3.1) эти уравнения можно представить в виде

$$\left[\frac{1}{\theta_0^2} + \left(\frac{H_{y0}}{4\pi}a_2 + J^2W_0\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S\right]\delta p + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{H_{y0}}{4\pi}a_2 + J^2W_0\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_S + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4\pi}\left(H_{y0}b_2 + \frac{a_2^2}{2}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S J^2V_0\right](\delta p)^2 + \left[\left(\frac{H_{y0}}{4\pi}a_2 + J^2W_0\right)\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p + \right.$$
$$\left. + J^2V_0T\right]\delta S + \left\{\left[\frac{H_{y0}}{4\pi}c_2 - \frac{Jc}{\theta_0^2}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\right]\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S + \right.$$
$$\left. + \frac{2\varkappa JW_0V_0}{c\theta_0^2}\left(\frac{T}{W}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)_S\frac{\mu}{T}\right\}\frac{dp}{dx} = 0 \tag{3.13}$$

$$\left[\frac{1}{\theta_0^2} + \left(\frac{H_{y0}}{4\pi}a_2 + J^2W_0\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S\right]\delta p + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{H_{y0}}{4\pi}a_2 + J^2W_0\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_S + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{H_{y0}}{4\pi}b_2 + \frac{J^2\theta_0^2W_0}{2V_0} + \frac{a_1^2W_0}{2c^2\theta_0^2V_0}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S^2 + \left(\frac{3}{2}J^2V_0 + \frac{1}{2V_0}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S\right](\delta p)^2 +$$
$$+ \left[\left(\frac{H_{y0}a_2}{4\pi} + J^2W_0\right)\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p + \frac{T}{V_0\theta_0^2}\right]\delta S + \left\{\left[\frac{H_{y0}}{4\pi}c_2 - \frac{Jc}{\theta_0^2}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\right]\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S + \right.$$
$$\left. + \frac{\varkappa W_0}{JV_0c\theta_0^2}\left(\frac{T}{W}\right)^2(1 + 2V_0^2J^2)\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)_S\frac{\mu}{T}\right\}\frac{dp}{dx} = 0 \tag{3.14}$$

Коэффициент первого члена в (3.13) и (3.14) должен быть первого порядка по скачку Δp. Это значит, что при $\Delta p \to 0$

$$\left(\frac{H_{y0}}{4\pi}a_2 + J^2W_0\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S + \frac{1}{\theta_0^2} \to 0 \tag{3.15}$$

Подставляя сюда a_2 согласно (3.9) и

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = -\frac{V_0^2c^2}{W_0v_0^2}$$

(где v_0 — скорость звука) имеем уравнение для скорости возможных ударных волн [5–8]. Из (3.13) и (3.14), с учетом (3.15), получаем

$$\delta S = -\frac{\varkappa T}{JW_0\theta_0^2c}\frac{dp}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)_S\frac{\mu}{T} \tag{3.16}$$

Подставляя (3.16) в (3.13), находим для δp следующее уравнение:

$$\left[\frac{1}{\theta_0^2} + \left(\frac{H_{y0}a_2}{4\pi} + J^2W_0\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S\right]\delta p + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{H_{y0}}{4\pi}a_2 + W_0J^2\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_S + \frac{1}{4\pi}\times\right.$$
$$\left.\times\left(H_{y0}b_2 + \frac{a_2^2}{2}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S^2 + \frac{3}{2}J^2V_0\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S\right](\delta p)^2 + \left\{\left[\frac{H_{y0}}{4\pi}c_2 - \frac{Jc}{\theta_0^2}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S - \frac{\varkappa T}{JcW_0\theta_0^2}\left[\left(\frac{H_{y0}}{4\pi}a_2 + J^2W_0\right)\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p - J^2V_0T\right]\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)_S\frac{\mu}{T}\right\}\frac{dp}{dx} = 0 \tag{3.17}$$

Подставляя сюда выражения коэффициентов a_2, b_2, c_2 из (3.9), а также термодинамические соотношения

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{V}{c_0}\sqrt{\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_p}\right)\frac{T}{W}} = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p, \qquad \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_S = V\left[1-\frac{S}{V}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S\right]$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial V}\right)_S = -\frac{Wc_0^2}{V} \qquad \left(c_0=\frac{v_0}{c}\right) \tag{3.18}$$

получаем

$$[(1-c_0^2)v^4-(U^2+c_0^2-U_x^2c_0^2)v^2+U_x^2c_0^2]\,\delta p+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{wc_0^4(U_x^2-v^2)(1+v^2)}{V_0}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_S-\frac{3(1+v^2)}{w(U^2-v^2)}\left[c_0^2U_x^2U_y^2+c_0^2(U_x^2-v^2)^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-v^2U_y^2\right]\right\}(\delta p)^2+\frac{v}{w}\left\{\frac{(1+v^2)c}{(U_x^2-v^2)}\left[\eta U_x^2U_y^2+\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\left(U_x^2-v^2\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta U_y^2v^2w}{c(U_x^2-v^2)}+\frac{\varkappa T(1+v^2)(U^2-v^2)c_0^2}{c}\left(1-\frac{1}{c_0}\sqrt{\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_p}\right)\frac{W}{T}}\right)^2\right\}\frac{dp}{dx}=0 \tag{3.19}$$

где

$$\beta=\frac{c^2}{4\pi\sigma},\qquad v=\frac{v_\infty}{c\theta_0},\qquad U_x^2=\frac{H_{x0}^2}{4\pi w},\qquad U_y^2=\frac{H_{y0}^2\theta_0^2}{4\pi w},\qquad U^2=U_x^2+U_y^2$$

4. При $x=-\infty$ и $x=\infty$ имеем $dp/dx=0$ и поэтому для скачка давления найдем

$$\Delta p=\frac{2Vw(U^2-v^2)}{(1+v^2)R}[(1-c_0^2)v^4-(U^2+c_0^2-U_x^2c_0^2)v^2+U_x^2c_0^2] \tag{4.1}$$

$$R=3V[c_0^2U_x^2U_y^2+c_0^2(U_x^2-v^2)^2-v^2U_y^2]-w^2c_0^4(U_x^2-v^2)(U^2-v^2)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_S$$

Уравнение (4.1) определяет связь между Δp и скоростью распространения волн. Оно является приблизительным. Поэтому будем его употреблять для определения скорости слабых ударных волн как функции от амплитуды с точностью до первого порядка по Δp. При $\Delta p=0$ получаем уравнение, соответствующее нулевому приближению

$$(1-c_0^2)v_1^4-(U^2+c_0^2-U_x^2c_0^2)v_1^2+U_x^2c_0^2=0$$

которое совпадает с уравнением (3.15).

Из (4.1) для скорости распространения волн v_∞ имеем в первом приближении по Δp

$$v_\infty^2=\frac{v_1^2c^2}{1+v_1^2}\left(1+\frac{R\Delta p}{2wV(U^2-v_1^2)[2(1-c_0^2)v_1^2-(U^2+c_0^2-U_x^2c_0^2)]v_1^2}\right) \tag{4.2}$$

Рассмотрим быструю ударную волну, распространяющуюся в нерелятивистской плазме, плотность которой так мала, что $U\sim 1$. Медленная волна, так как здесь $c_0\ll 1$, будет нерелятивистской, а для быстрой волны имеем

$$v_\infty^2=\frac{U^2c^2}{1+U^2}\left(1+\frac{3\Delta p}{2(1+U^2)wc_0^2}\right) \tag{4.3}$$

Это выражение верно для любого U, если только $U^2\gg c_0^2$. В частности, при $c_0^2\ll U^2\ll 1$ из (4.3) получаем известное выражение для зависимости скорости нерелятивистских быстрых волн от амплитуды [3].

5. После интегрирования уравнения (3.19) находим

$$\delta p=\frac{\Delta p}{2}\left(1+\operatorname{th}\frac{x}{l}\right) \tag{5.1}$$

где ширина ударной волны

$$l = \frac{4vV\,(U^2 - v^2)}{R\Delta p\,(1+v^2)} \left\{ \frac{(1+v^2)\,c}{U_x^{\,2} - v^2} \left[\eta U_x^{\,2} U_y^{\,2} + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\left(U_x^{\,2} - v^2\right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta w U_y^{\,2} v^2}{c\,(U_x^{\,2} - v^2)} + \frac{\varkappa T \Lambda^2 (1+v^2)(U^2 - v^2)\,c_0^2}{c} \right\} \tag{5.2}$$

$$\Lambda = 1 - \frac{1}{c_0}\sqrt{\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_p}\right)\frac{W}{T}}$$

В частности, когда $c_0^{\,2} \ll 1$ и $c_0^{\,2} \ll U^2$, имеем

$$l = \frac{4c_0^2 c}{3U\Delta p}\left\{(1+U^2)\left[\eta\cos^2\vartheta + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\sin^2\vartheta\right] + \frac{\beta w}{c^2}\right\} \tag{5.3}$$

Величина l относится к системе K. В системе K° ширина ударной волны равна

$$l^\circ = l\theta_0 = \frac{l}{\sqrt{1 + v_\infty^{\,2}}} \tag{5.4}$$

Здесь следует отметить, что термоэлектрические явления, как и в нерелятивистском рассмотрении [3], не влияют на ширину l, а также на изменение энтропии внутри разрыва. Из (3.16), (3.18) и (5.1) для δS имеем

$$\delta S = -\frac{\varkappa V^2 \Lambda (1+v^2)(\Delta p)^2}{2vc_0 W \lambda \operatorname{ch}^2(x/l)} \qquad (\lambda = l\Delta p) \tag{5.5}$$

Как показано выше, одновременно со скачком давления V, H и т. д. внутри разрыва появляется продольное электрическое поле, которое в системе координат K и K° согласно (3.1), (3.9) и (5.1) равно

$$E_x = -\frac{\alpha T \Lambda \sqrt{1+v^2}\,(v^2 - U_x^{\,2})(\Delta p)^2}{2w\lambda\,(v^2 - U_x^{\,2} + v^2 U_y^{\,2})\operatorname{ch}^2(x/l)} \tag{5.6}$$

Согласно (2.2) и (5.6) внутри разрыва появляется электрический двойной слой, плотность заряда которого в системе, связанной с ударной волной, равна

$$\rho = -\frac{\alpha T \Lambda \sqrt{1+v^2}\,(v^2 - U_x^{\,2})\operatorname{th}(x/l)(\Delta p)^3}{4\pi w \lambda^2 (v^2 - U_x^{\,2} + v^2 U_y^{\,2})\operatorname{ch}^2(x/l)} \tag{5.7}$$

Так как $j_x = 0$, отсюда плотность зарядов в системе K°

$$\rho^\circ = \frac{\rho}{\theta_0} = \rho\sqrt{1+v^2}$$

Как показано выше, при $\alpha \neq 0$ магнитные силовые линии и линии тока, которые вдали от разрыва перед и за фронтом ударной волны, находятся в плоскости, параллельной xy и внутри разрыва переходят от одной плоскости в другую, также параллельную xy. Величину этого скачка можно легко определить. Как следует из (1.2), для системы координат, связанной с разрывом, можно писать

$$\operatorname{div}\mathbf{n} = 0 \tag{5.8}$$

где $\mathbf{n}$ — трехмерный вектор потока вещества с компонентами

$$n_x = J, \qquad n_y = \frac{v_y}{c\theta V}, \qquad n_z = \frac{v_z}{c\theta V}$$

Поэтому линии тока, соответствующие вектору $\mathbf{n}$, будут непрерывными. Их дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{n_x} = \frac{dy}{n_y} = \frac{dz}{n_z} \tag{5.9}$$

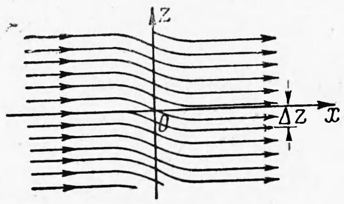
Из (3.1), (3.9), (3.18) и (5.1) можно найти функции $n_y = n_y(x)$, $n_z = n_z(x)$. Подставляя эти выражения в (5.9), после интегрирования находим следующий результат.

а) В плоскости xy получаем известную картину из нерелятивистской теории, соответствующую слабому отклонению токовых линий от прежнего направления.

б) В плоскости xz, однако, имеет место вышеупомянутый эффект. Интегрируя уравнения (5.9), находим для проекции линий тока на плоскость xz следующее семейство кривых (фигура):

$$z - z_0 = \frac{\xi \Delta p}{2}\left(1 + \operatorname{th}\frac{x}{l}\right), \qquad \xi = \frac{\alpha T \Lambda U_y^2 (1 + v^2)\, v}{H_{y0} w (v^2 - U_x^2 + v^2 U_y^2)} \tag{5.10}$$

где z_0 — координата z линии тока при $x = -\infty$. Подставляя $x = \infty$ в (5.10), получаем для скачка линий тока



$$\Delta z = \xi \Delta p \tag{5.11}$$

Таким же образом можно изучать деформацию магнитных силовых линий. Имея в виду уравнение $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, получаем аналогичную картину и для магнитных силовых линий. Для z координат силовых линий находим также уравнение (5.10), а для скачка выражение (5.11). Этот эффект будет релятивистским, так как ξ обращается в нуль при $v \to 0$, пропорционально первому порядку v. Оно связано с термоэлектрическими явлениями. Изучая в нерелятивистской теории влияние термоэлектрических эффектов на структуру ударных волн, получаем полное соответствие с вышесказанными результатами, например, для E_x, H_z и v_z имеем

$$E_x = \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \frac{dp}{dx}, \qquad H_z = 0, \qquad v_z = 0 \tag{5.12}$$

Уравнения (5.10) и (5.11) относятся к системе К. В системе К° компонента H_x остается неизменной, а $H_z^0 = H_z / \theta_0 = H_z\sqrt{1 + v^2}$. Поэтому в системе координат К° скачок $\Delta z^0 = \Delta z \sqrt{1 + v^2}$. Однако для линий тока такое выражение теряет смысл, так как в системе К° согласно $\operatorname{div} \mathbf{n}^\circ \neq 0$ линии тока будут непрерывными.

В заключение автор благодарит В. П. Силина за руководство работой, за советы и замечания.

Поступила 1 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
2. Сиротина Е. П., Сыроватский С. И. Структура ударных волн слабой интенсивности в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1960, т. 39, вып. 3, стр. 746.
3. Дойч Р. В. Структура слабых ударных волн в плазме. ЖЭТФ, 1962, т. 43, вып. 2, стр. 667.
4. Жумартбаев М. Т. О поглощении звука и ширине ударных волн в релятивистской гидродинамике. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 4, стр. 1000.
5. Халатников И. М. О магнитогидродинамических волнах и магнитных тангенциальных разрывах в релятивистской гидродинамике. ЖЭТФ, 1957, т. 32, вып. 5, стр. 1102.
6. Zumino B. Some Questions in Relativistic Hydromagnetics. Phys. Rev., 1957, т. 108, вып. 5, стр. 1116.
7. Harris E. G. Relativistic Magnetohydrodynamics. Phys. Rev., 1957, т. 108, вып. 6, стр. 1357.
8. Ахиезер И. А., Половин Р. В. К теории релятивистских магнитогидродинамических волн. ЖЭТФ, 1959, т. 36, вып. 6, стр. 1845.