

УДК 624.073

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЬЦЕВЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Н. В. Пустовой, К. А. Матвеев, Д. В. Моховнев

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск

Предполагается, что ортотропия материала пластин является прямоугольной либо полярной и внешняя сжимающая или растягивающая равномерно распределенная нагрузка приложена к пластине по ее внутренней границе. Исследование устойчивости выполнено методом Ритца на основе энергетических критериев Алфутова — Балабуха и Брайана. Представлены графики критических значений параметра внешней нагрузки и форм потери устойчивости в зависимости от размеров пластин.

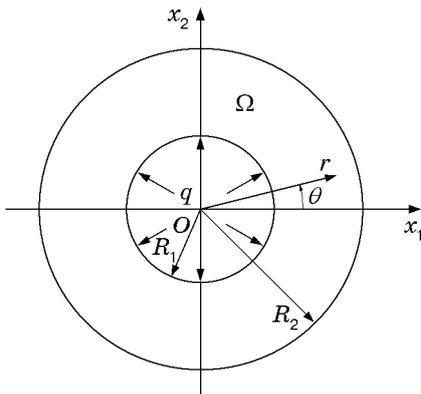


Рис. 1

Постановка задачи. Отнесем пластину к декартовой системе координат так, чтобы ее срединная плоскость совпадала с координатной плоскостью $x_1 O x_2$. Примем, что пластина изготовлена из ортотропного материала и нагружена в своей плоскости «мертвой» нагрузкой q (рис. 1). Пластина, деформируемая лишь продольными силами, может находиться в плоском состоянии равновесия, характеризуемом отсутствием прогибов ее срединной поверхности. При некотором значении внешней нагрузки возможно существование изогнутой формы равновесия. Это критическое значение внешней нагрузки находится чаще всего на основе энергетических критериев устойчивости [1–4]. Так, при

дополнительном требовании минимальности внешней нагрузки задача устойчивости ортотропной пластины эквивалентна задаче об определении экстремалей функционала Алфутова — Балабуха [1–4]:

$$I[w, \varphi, \Phi] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_{ijkl} w_{,ij} w_{,kl} dx_1 dx_2 + \frac{h}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^c w_{,i} w_{,j} dx_1 dx_2 - h \int_{\Omega} b_{ijkl} \sigma_{ij}^c \sigma_{kl}^+ dx_1 dx_2, \quad (1)$$

$$i, j, k, l = 1, 2.$$

Здесь D_{ijkl} — тензор изгибных жесткостей пластины; b_{ijkl} — тензор упругих постоянных материала пластины; h — толщина пластины; $w(x_1, x_2)$ — функция прогибов пластины, которая должна удовлетворять кинематическим краевым условиям; $\sigma_{ij}^c = \delta_{ijkl} \varphi_{,kl}$ — статически допустимые докритические напряжения; $\sigma_{ij}^+ = \delta_{ijkl} \Phi_{,kl}$ — дополнительные напряжения, возникающие в срединной плоскости пластины при переходе от плоской формы равновесия к изогнутой; $\varphi(x_1, x_2)$ и $\Phi(x_1, x_2)$ — соответствующие функции напряжений [1–4]; $\delta_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl}$; δ_{ij} , δ_{kl} , δ_{ik} , δ_{jl} — символы Кронекера; после запятой указаны индексы переменных, по которым выполняется частное дифференцирование.

Из вариационного уравнения $\delta I = 0$ следуют уравнение устойчивости и статические краевые условия при изгибе, уравнения совместности деформаций и условия неразрывности контуров для плоского и изогнутого состояний. Критическое значение функционала (1)

не будет зависеть от вида статически допустимого напряженного состояния σ_{ij}^c только в том случае, когда напряжения σ_{ij}^+ удовлетворяют уравнению [2–4]

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^+ w_{,i} w_{,j} dx_1 dx_2 - \int_{\Omega} b_{ijkl} \sigma_{ij}^+ \sigma_{kl}^+ dx_1 dx_2 = 0. \quad (2)$$

Таким образом, при решении задач устойчивости на основе функционала (1) с учетом выполнения уравнения (2) нет необходимости точно определять докритическое напряженное состояние. В качестве такого состояния можно использовать любое статически допустимое, в том числе решение задачи для случая изотропной пластины. Далее, если область Ω , занятая пластиной, является канонической, то для решения вариационной задачи (1), (2) может быть применен метод Ритца.

К исследованию устойчивости кольцевых пластин. Обезразмеренные функционал (1) и условие (2) в полярной системе координат (рис. 1) примут вид

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^{\xi} \bar{D}_{ijkl} v_{ij} v_{kl} \rho d\rho d\theta + \frac{\lambda}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^{\xi} \bar{\sigma}_{ij}^c \vartheta_i \vartheta_j \rho d\rho d\theta - \lambda \int_0^{2\pi} \int_1^{\xi} \bar{b}_{ijkl} \bar{\sigma}_{ij}^c \bar{\sigma}_{kl}^+ \rho d\rho d\theta, \quad (3)$$

$i, j, k, l = 1, 2;$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^{\xi} \bar{\sigma}_{ij}^+ \vartheta_i \vartheta_j \rho d\rho d\theta - \int_0^{2\pi} \int_1^{\xi} \bar{b}_{ijkl} \bar{\sigma}_{ij}^+ \bar{\sigma}_{kl}^+ \rho d\rho d\theta = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2. \quad (4)$$

Здесь

$$v_{11} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \rho^2}, \quad v_{12} = v_{21} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} \right), \quad v_{22} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2}; \quad \vartheta_1 = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \rho}, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta};$$

$\rho = r/R_1$ — безразмерный радиус-вектор; $\xi = R_2/R_1$; $\bar{w} = w/R_1$; $\bar{b}_{ijkl} = b_{ijkl}/\sqrt{b_{1111}b_{2222}}$; $\bar{D}_{ijkl} = D_{ijkl}/\sqrt{D_{1111}D_{2222}}$; $\bar{\sigma}_{ij}^+ = \sigma_{ij}^+/\sqrt{b_{1111}b_{2222}}$; $\bar{\sigma}_{ij}^c = \sigma_{ij}^c/q$; D_{ijkl} , b_{ijkl} , σ_{ij}^+ , σ_{ij}^c — компоненты соответствующих тензоров в ортонормированном базисе полярной системы координат; $\lambda = qhR_1^2/\sqrt{D_{1111}D_{2222}}$ — параметр внешней нагрузки.

Полагаем, что пластина изготовлена из материала с прямоугольной ортотропией. В качестве статически допустимого докритического напряженного состояния использовано напряженное состояние для изотропной пластины [5]. Функция напряжений $\bar{\Phi}(\rho, \theta)$ задана в виде ряда

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\rho, \theta) = & A \left[\rho - (2\xi + 1) \left(\frac{\rho - 1}{\xi - 1} \right)^2 + (\xi + 1) \left(\frac{\rho - 1}{\xi - 1} \right)^3 \right] \cos \theta + \\ & + B \left[\rho - (2\xi + 1) \left(\frac{\rho - 1}{\xi - 1} \right)^2 + (\xi + 1) \left(\frac{\rho - 1}{\xi - 1} \right)^3 \right] \sin \theta + C \left[1 - 3 \left(\frac{\rho - 1}{\xi - 1} \right)^2 + 2 \left(\frac{\rho - 1}{\xi - 1} \right)^3 \right] + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\rho - 1)(\rho^{-1} - 1)(\rho - \xi)(\rho^{-1} - \xi^{-1}) \rho^m [C_{mn} \cos(n - 1)\theta + D_{mn} \sin n\theta], \quad (5) \end{aligned}$$

где A , B , C , C_{mn} , D_{mn} — произвольные постоянные. Ряд (5) является полным и удовлетворяет краевым условиям [2–4]

$$\bar{\Phi}(\xi, \theta) = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\xi} = 0, \quad \bar{\sigma}_{11}^+(1, \theta) = \bar{\sigma}_{12}^+(1, \theta) = 0, \quad \bar{\Phi}(1, \theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + C.$$

Если внутренний контур пластины зашпелен, а внешний свободен от нагрузок, то функцию прогибов можно представить в виде

$$\bar{w}(\rho, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\rho - 1)(\rho^{-1} - 1)\rho^m [A_{mn} \cos(n - 1)\theta + B_{mn} \sin n\theta]. \quad (6)$$

После подстановки рядов (5), (6) в функционал (3) и интегральное условие (4) и вычисления соответствующих интегралов задача устойчивости сводится к задаче на условный экстремум для функции $\bar{I}[A, B, C, A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}]$, которая решалась методом неопределенных множителей Лагранжа [2–4]. Условия стационарности приводят к обобщенной задаче на собственные значения относительно параметра нагрузки. Выбрав из спектра собственных значений наименьшее положительное и наибольшее отрицательное, получим критические значения параметра нагружения $\lambda_{кр}$ при сжатии ($q > 0$) и растяжении ($q < 0$) соответственно.

Для пластины, изготовленной из материала с постоянной цилиндрической ортотропией, докритическое напряженное состояние определяется точно [5]. Поэтому решение задачи устойчивости в этом случае целесообразно искать с использованием функционала Брайана [1–4]

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^{\xi} \bar{D}_{ijkl} v_{ij} v_{kl} \rho d\rho d\theta + \frac{\lambda}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^{\xi} \bar{\sigma}_{ij}^0 \vartheta_i \vartheta_j \rho d\rho d\theta, \quad i, j, k, l = 1, 2. \quad (7)$$

Для пластины, зашпеленной на внешнем контуре и свободной от нагрузок на внутреннем, функцию прогибов можно представить в виде ряда

$$\bar{w}(\rho, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (\rho - \xi)(\rho^{-1} - \xi^{-1})\rho^m \cos(n - 1)\theta. \quad (8)$$

После подстановки ряда (8) в функционал (7) и вычисления соответствующих интегралов задача устойчивости сводится к задаче на безусловный экстремум для функции $\bar{I}_1[A_{mn}]$. Условия стационарности $\partial \bar{I}_1 / \partial A_{mn} = 0$ приводят к однородной линейной относительно параметров A_{mn} системе уравнений. Критическим является наименьшее положительное значение параметра внешней нагрузки $\lambda_{кр}$, при котором система имеет нетривиальное решение.

Некоторые результаты. При численной реализации изложенного выше метода в рядах для функций прогибов и напряжений удерживалось такое количество слагаемых (менее 40), которое обеспечивало определение критического значения параметра нагрузки с точностью до трех значащих цифр. Расчеты выполнены для пластин, изготовленных из стеклотекстолита, стеклопластика, боропластика. На рис. 2–5 номера кривых соответствуют следующим значениям механических характеристик материалов: 1 — $E_1 = 2,15 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 1,98 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0,401 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0,14$, $\nu_{21} = 0,152$ для стеклотекстолита; 2 — $E_1 = 6,25 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 2,12 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0,90 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0,073$, $\nu_{21} = 0,215$ для стеклопластика; 3 — $E_1 = 21,1 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 2,11 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0,85 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0,35$, $\nu_{21} = 0,035$ для боропластика.

На рис. 2, 3 представлены зависимости параметра критической нагрузки от отношения радиусов для пластины с прямоугольной ортотропией, внутренняя кромка которой зашпелена, а внешняя свободна от нагрузок. Рис. 2 соответствует действию нагрузки $q < 0$ (растяжение), рис. 3 — действию нагрузки $q > 0$ (сжатие). На рис. 4, 5 представлены аналогичные результаты (для $q < 0$ и $q > 0$ соответственно) в предположении, что ортотропия указанных материалов является цилиндрической (внутренняя кромка пластины свободна,

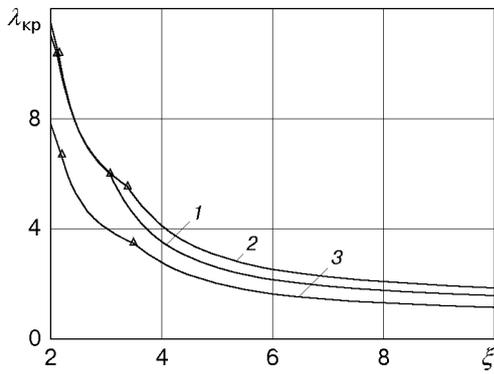


Рис. 2

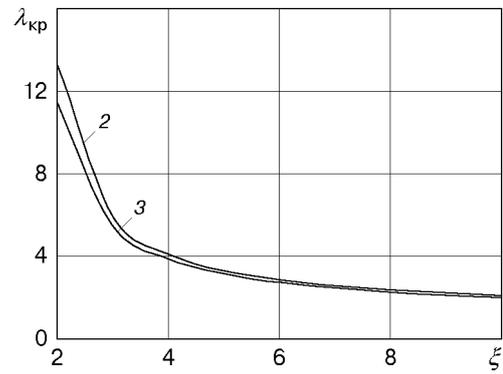


Рис. 3

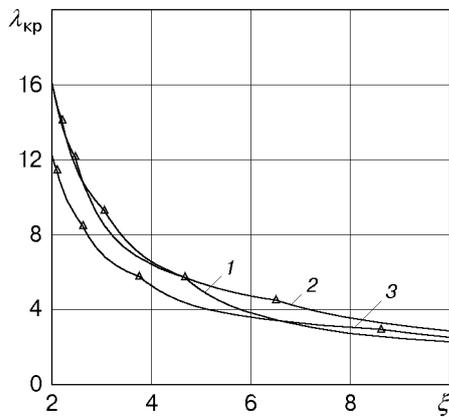


Рис. 4

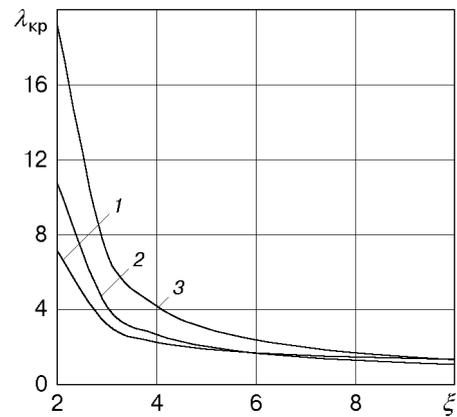


Рис. 5

внешняя закреплена). В случае потери устойчивости при растяжении ($q < 0$) с изменением ξ форма потери устойчивости пластин меняет число узловых диаметров. В точках перехода от одной формы к другой кривые имеют излом (треугольники на рис. 2, 4). Примеры таких форм представлены на рис. 6 ($a - \xi = 3$; $b - \xi = 4$) для кольцевой ортотропной пластины из боропластика со свободной внешней кромкой и закрепленной внутренней. При сжимающих нагрузках формы потери устойчивости не имеют узловых диаметров, кроме того, цилиндрически ортотропные пластины выпучиваются осесимметрично.

Представленные результаты показывают эффективность предложенного энергетического критерия. Данный подход может быть распространен на другие варианты нагружения и закрепления пластин и обобщен на случай неоднородности упругих характеристик материала.

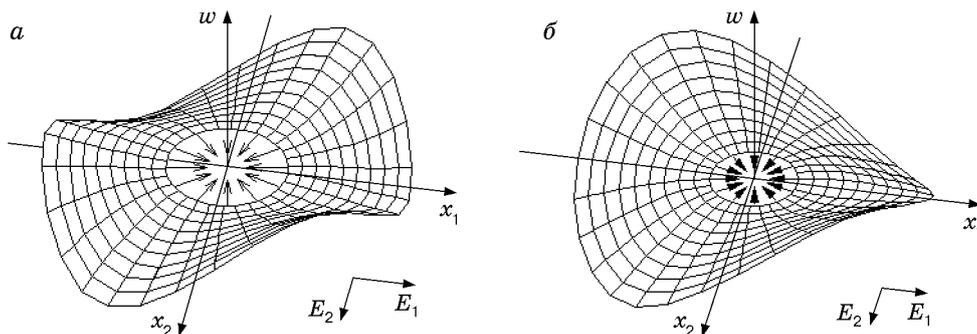


Рис. 6

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991.
2. **Матвеев К. А.** О вариационных принципах теории упругой устойчивости пластин. Расчет локально нагруженных анизотропных пластин // Науч. вестн. Новосиб. гос. техн. ун-та. 1996. № 2. С. 43–55.
3. **Пустовой Н. В., Матвеев К. А.** Основы расчета на устойчивость деформируемых систем. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. техн. ун-та, 1997.
4. **Матвеев К. А., Моховнев Д. В., Савельев А. В.** К исследованию общей и локальной устойчивости ортотропных пластин // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 2. С. 127–139.
5. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.

Поступила в редакцию 7/VII 1999 г.
