

УДК 539.214+539.374

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ОДНОМЕРНОЙ ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ С УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ ПРИ ЕЕ РАСПРОСТРАНЕНИИ В УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Д. В. Кулаева

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mail: lk@iacp.dvo.ru

Приведено решение краевой задачи теории больших упруговязкопластических деформаций о развитии вязкопластического течения в тяжелом слое материала, находящемся на наклонной плоскости и подвергнутом нагружению на свободной поверхности с последующим мгновенным снятием нагружающих усилий. Такое разрывное изменение краевых условий вызывает распространение в среде поверхности разрывов напряжений, называемой волной разгрузки. Рассмотрено отражение волны от упруговязкопластической границы и ее движение после отражения от закрепленной плоскости и свободной поверхности.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения, волна разгрузки.

Поверхности разрывов деформаций в упругопластических средах разделяются на волны нагрузки и разгрузки. В [1] приведен обзор работ, посвященных исследованию особенностей распространения таких разрывов. В [2–6] изучались условия существования и закономерности распространения поверхностей разрывов деформаций в средах с упругими и пластическими свойствами. Экспериментально подтверждается [2], что при учете вязкости в процессе пластического течения не возникает поверхностей разрывов, кроме тех, которые продвигаются со скоростями, равными скоростям распространения упругих возмущений [7, 8]. В процессе вязкопластического течения материала при учете его упругого отклика на краевые воздействия предполагается наличие в нем значительных деформаций, поэтому данное течение может рассматриваться лишь в рамках модели больших упруговязкопластических деформаций.

Динамические задачи о разгрузке среды с большими необратимыми деформациями решались в [9, 10]. Рассматривались автомодельный случай разгрузки [9] и неавтомодельная задача [10] в случае, когда развитое вязкопластическое течение в тяжелом слое несжимаемого упруговязкопластического материала, расположенном на наклонной плоскости, было вызвано воздействием нагружающих усилий на свободной границе при сдвиге слоя вниз по наклонной плоскости. Плоскость разрыва напряжений возникала после их мгновенного снятия, когда область вязкопластического течения занимала весь слой материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-08-98506-р-восток-а).

© Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Кулаева Д. В., 2012

В настоящей работе решается аналогичная задача для случая сдвига слоя вверх по наклонной плоскости. В отличие от ранее рассмотренного случая мгновенная разгрузка материала происходит, когда в слое наряду с областью развитого вязкопластического течения имеется область обратимого деформирования. Вследствие наличия упруговязкопластической границы в слое происходит взаимодействие волны разгрузки с этой областью.

1. Исходные соотношения используемой модели деформирования. Для решения данной задачи используем предложенную ранее математическую модель больших упругопластических деформаций [11], обобщенную для случая учета вязких свойств материалов [12]. Одним из основных предположений в данной модели является неизменность необратимых деформаций в процессах разгрузки, а также независимость термодинамического потенциала (внутренняя энергия, свободная энергия) от этих деформаций.

Согласно описанному в [11, 12] подходу кинематику деформирования в прямоугольной системе координат Эйлера x_i зададим зависимостями

$$\begin{aligned} d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{ks} e_{sj}, \\ \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} ((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik}) e_{kj} + e_{ik} (\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj})), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik} \varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \\ \frac{Dn_{ij}}{Dt} &= \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \\ r_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij} (\varepsilon_{sk}, e_{sk}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь d_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси; e_{ij} , p_{ij} — их обратимые и необратимые составляющие; D/Dt — объективная производная тензоров по времени, которая записана для произвольного тензора n_{ij} ; u_i , v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; ε_{ij}^p — компоненты тензора скоростей пластических деформаций.

Наличие нелинейной части z_{ij} в тензоре вращений r_{ij} (в [11] зависимость $z_{ij}(\varepsilon_{sk}, e_{sk})$ записана полностью) обусловлено требованием неизменности тензора необратимых деформаций в процессах разгрузки ($\varepsilon_{ij}^p = 0$). При этом компоненты тензора необратимых деформаций p_{ij} изменяются так же, как при жестком перемещении тела.

Напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями и согласно законам термодинамики в случае несжимаемой среды связаны с ними зависимостями [13]

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}), & p_{ij} \equiv 0, \\ -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}), & p_{ij} \neq 0. \end{cases}$$

Здесь p , p_1 — добавочные гидростатические давления. Принято условие, что внутренняя энергия не зависит от уровня и распределения необратимых деформаций. Тогда, считая среду изотропной, упругий потенциал W представим в виде

$$\begin{aligned} W &= -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \dots, \\ J_k &= \begin{cases} L_k, & p_{ij} \equiv 0, \\ I_k, & p_{ij} \neq 0, \end{cases} \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik} d_{ki}, \\ I_1 &= e_{kk} - \frac{1}{2} e_{sk} e_{ks}, \quad I_2 = e_{st} e_{ts} - e_{sk} e_{kt} e_{ts} + \frac{1}{4} e_{sk} e_{kt} e_{tn} e_{ns} \end{aligned}$$

(μ , b , χ — упругие постоянные среды).

Будем считать, что необратимые деформации в материале накапливаются при достижении напряженным состоянием поверхности нагружения, которая в силу принципа максимума Мизеса является пластическим потенциалом. В качестве такой поверхности будем использовать условие пластичности Треска, обобщенное на случай деформирования с учетом вязких свойств материалов [14], в виде

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p|, \quad (1.2)$$

где k — предел текучести; η — вязкость; σ_i — компоненты главных напряжений; ε_k^p — главные значения тензора скоростей пластических деформаций.

Скорости необратимых деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0.$$

2. Упругое равновесие и квазистатическое вязкопластическое течение. Рассмотрим равновесие тяжелого слоя толщиной h несжимаемого упруговязкопластического материала, расположенного на наклонной плоскости (рис. 1). Граничные условия такой краевой задачи упругого равновесия имеют вид

$$u|_{x_1=h} = 0, \quad \sigma_{11}|_{x_1=0} = -\sigma, \quad \sigma_{12}|_{x_1=0} = \xi, \quad (2.1)$$

где $u = u_2(x_1)$ — единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений; σ , ξ — задаваемые постоянные.

Используя уравнения равновесия

$$\sigma_{11,1} + \rho g_1 = \sigma_{21,1} + \rho g_2 = 0, \quad g_1 = g \cos \varphi, \quad g_2 = g \sin \varphi,$$

где ρ — плотность материала; g — ускорение свободного падения; φ — угол наклона плоскости (см. рис. 1), получим распределения напряжений и перемещений в слое

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \xi - \rho g_2 x_1, & \sigma_{22} &= -\rho g_1 x_1 - \sigma + (\xi - \rho g_2 x_1)^2 / \mu, \\ \sigma_{11} = \sigma_{33} &= -\rho g_1 x_1 - \sigma, & u &= F(\xi), \quad F(\xi) = \rho g_2 (h^2 - x_1^2) / (2\mu) - \xi (h - x_1) / \mu. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В то время как постоянная σ в (2.2) может быть произвольной, в частности равной нулю, значения постоянной ξ ограничены условиями выхода напряженных состояний (2.2) на поверхность нагружения (1.2), т. е. необходимо учитывать, что $\xi_* \leq \xi \leq \xi^*$. При этом $\xi_* < 0$, а $\xi^* > 0$. Данные критические значения ξ следуют из условия (1.2). При $\xi_* \leq \xi < 0$

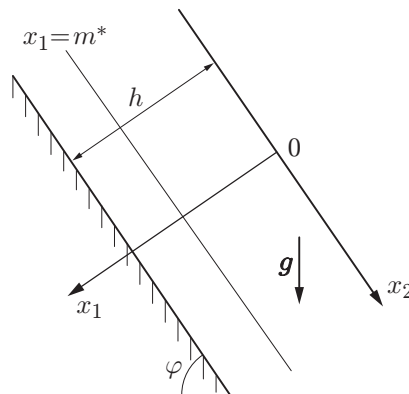


Рис. 1. Расположение слоя на наклонной плоскости

(сдвиг вниз по наклонной плоскости) согласно условию пластичности на плоскости $x_1 = h$ получаем

$$\sigma_{12}|_{x_1=h} = -k.$$

В случае если $0 < \xi \leq \xi^*$ (сдвиг вверх по наклонной плоскости), условие пластичности

$$\sigma_{12}|_{x_1=0} = k \quad (2.3)$$

выполняется на плоскости $x_1 = 0$. Далее рассматривается второй случай. Согласно условию (2.3) для ξ^* и параметров напряженно-деформированного состояния в этом предельном случае имеем

$$\begin{aligned} \xi^* &= k, & \sigma_{12} &= k - \rho g_2 x_1, & \sigma_{11} &= \sigma_{33} = -\rho g_1 x_1 - \sigma, \\ \sigma_{22} &= -\rho g_1 x_1 - \sigma + (k - \rho g_2 x_1)^2 / \mu, & u &= F(k), \\ e_{12} &= -\rho g_2 x_1 / (2\mu) + k / (2\mu), & e_{11} &= -3e_{12}^2 / 2, & e_{22} &= e_{12}^2 / 2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В соотношениях (2.2), (2.4) и далее оставлены только старшие нелинейные слагаемые. Эти соотношения являются начальными условиями дальнейшего процесса пластического течения при увеличении со временем нагружающих усилий

$$\sigma_{11}|_{x_1=0} = -c_2(t), \quad \sigma_{12}|_{x_1=0} = c_1(t). \quad (2.5)$$

Функция $c_2(t)$, как и постоянная σ , может быть произвольной, так как σ_{11} не оказывает влияния на процесс пластического течения. При этом $c_1(0) = \xi^*$.

Начиная с момента времени $t = 0$ область вязкопластического течения ограничена плоскостями $0 \leq x_1 \leq m(t)$. Область $m(t) \leq x_1 \leq h$ остается в упругом состоянии, т. е. поверхность $m(t)$ является движущейся границей области вязкопластического течения. Параметры напряженно-деформированного состояния в любой момент времени $t = t_1 > 0$ определяются интегрированием уравнений равновесия с использованием краевых условий (2.1), (2.5) и условия пластичности в виде

$$\sigma_{12} = k + \eta \varepsilon_{12}^p. \quad (2.6)$$

На упругопластической границе $x_1 = m(t)$ выполняются условия равенства компонент напряжений, перемещений и производных $\partial u / \partial x_1$ и $\partial u / \partial t = du / dt = v$, позволяющие найти функции интегрирования. Таким образом, решением задачи являются следующие зависимости:

— в области обратимого деформирования $m(t) \leq x_1 \leq h$

$$u = F(c_1(t_1)); \quad (2.7)$$

— в области вязкопластического течения $0 \leq x_1 \leq m(t)$

$$\begin{aligned} u &= F(c_1(t_1)) - \rho g_2 t (x_1 - m)^2 / \eta, & p_{11} &= -2p_{12}(e_{12} + p_{12}), \\ p_{12} &= \rho g_2 t \eta^{-1} (m - x_1), & p_{22} &= 2e_{12} p_{12}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Значение $m_1 = m(t_1)$, определяющее упругопластическую границу и соответствующее приложенной нагрузке $c_1(t_1)$, находится с помощью условия равенства нулю скорости пластической деформации ε_{12}^p (2.6) при $x_1 = m_1$, где

$$m_1 = (c_1(t_1) - k) / (\rho g_2).$$

Напряжения в обеих областях определены соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{33} = -\rho g_1 x_1 + c_2(t_1), & \sigma_{12} &= -\rho g_2 x_1 + c_1(t_1), \\ \sigma_{22} &= -\rho g_1 x_1 + c_2(t_1) + (c_1(t_1) - \rho g_2 x_1)^2 / \mu. \end{aligned} \quad (2.9)$$

3. Динамика разгрузки. Полагаем, что в некоторый момент времени $t = t^*$ $c_1(t^*) < k + h\rho g_2$ и нагрузка на плоскости $x_1 = 0$ мгновенно снимается:

$$\sigma_{12} = 0. \quad (3.1)$$

Таким образом, в начальный момент разгрузки область деформирования разделяется границей $m^* = m(t^*)$ на область обратимого деформирования

$$m^* \leq x_1 \leq h \quad (3.2)$$

и область продолжающегося вязкопластического течения $0 \leq x_1 \leq m^*$ (см. рис. 1). Начиная с момента времени $t = t^*$ от плоскости $x_1 = 0$ к плоскости $x_1 = m^*$ движется поверхность $x_1 = G(t - t^*)$, отделяющая область разгрузки

$$0 \leq x_1 \leq G(t - t^*) \quad (3.3)$$

от области продолжающегося пластического течения

$$G(t - t^*) \leq x_1 \leq m^*$$

(ниже показано, что $G = \sqrt{\mu/\rho}$).

Согласно уравнению переноса для тензора необратимых деформаций (1.1) в условиях разгрузки ($\varepsilon_{ij}^p = 0$) компоненты тензора необратимых деформаций изменяются так же, как при жестком перемещении тела. Из кинематических зависимостей

$$\varepsilon_{11}^p = \frac{dp_{11}}{dt} + 2p_{12}(r_{21} + \varepsilon_{12}^p), \quad \varepsilon_{12}^p = \frac{dp_{12}}{dt} = \frac{\partial p_{12}}{\partial t}, \quad \varepsilon_{22}^p = \frac{dp_{22}}{dt} + 2p_{12}(r_{12} + \varepsilon_{12}^p),$$

имеющих место в рассматриваемом случае, следует, что компонента необратимых деформаций p_{12} не изменяется в области разгрузки. Распределение p_{12} по слою в области пластического течения задается согласно третьей зависимости (2.8). В момент времени, когда до p_{12} доходит поверхность $x_1 = G(t - t^*)$, она перестает изменяться в каждой точке области разгрузки (3.3). Таким образом, в области (3.3) в любой момент времени p_{12} — функция только координаты x_1 , не зависящая от времени.

Из формулы (2.8) следует, что в области разгрузки

$$p_{12} = \rho g_2 \eta^{-1} (m^* - x_1)(x_1 G^{-1} + t^*).$$

С учетом зависимости $\sigma_{12} = \mu(\partial u / \partial x_1 - 2p_{12})$ из уравнения движения среды получаем уравнение для нахождения компоненты вектора перемещений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{1}{G^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho g_2 \left(\frac{2}{\eta} \left(t^* + \frac{2x_1}{G} - \frac{m^*}{G} \right) + \frac{1}{\mu} \right). \quad (3.4)$$

Согласно равенству (3.1) и требованию непрерывности компонент перемещений на границе $x_1 = G(t - t^*)$ краевыми условиями для уравнения (3.4) являются условия

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \frac{2\rho g_2 m^* t^*}{\eta}, \quad u \Big|_{x_1=G(t-t^*)} = F(c_1(t^*)) - \frac{\rho g_2 t (x_1 - m)^2}{\eta}. \quad (3.5)$$

Решение уравнения (3.4) имеет вид

$$u = \frac{\rho g_2 G^2}{4} \alpha \beta \left(\frac{1}{\eta} \left(2t^* + \beta - \alpha - \frac{2m^*}{G} \right) + \frac{1}{\mu} \right) + f(\alpha) + g(\beta),$$

$$\alpha = t - \frac{x_1}{G}, \quad \beta = t + \frac{x_1}{G}.$$

Для нахождения функций $f(\alpha)$ и $g(\beta)$ необходимо использовать краевые условия (3.5) и исходные переменные. В результате получаем

$$u = \frac{k}{\mu} (G(t - t^*) - h) + \frac{\rho g_2}{2\mu} (h^2 - x_1^2 + 2m^*(G(t - t^*) - h)) + \frac{\rho g_2}{\eta} \left(-\frac{2x_1^3}{3G} + \frac{G^2}{12} (t^* - t)^3 + \right. \\ \left. + \frac{x_1^2}{2} \left(3 \frac{m^*}{G} - \frac{3}{2} t^* - \frac{1}{2} t \right) + m^*(2t^*x_1 - tm^*) + \frac{Gm^*}{2} (t - t^*)^2 \right), \quad (3.6) \\ \sigma_{12} = \rho g_2 x_1 \left(\frac{\mu}{\eta} \left(\frac{1}{2} (t^* - t) + \frac{m^*}{G} \right) - 1 \right).$$

В области обратимого деформирования (3.2) также справедливы зависимости (2.7) и (2.9).

4. Отражение волны разгрузки от упругопластической границы и дальнейшие колебания слоя. Полученное решение (3.6) справедливо до момента времени $t = t_2 = t^* + m^*G^{-1}$. В момент времени $t = t_2$ поверхность $x_1 = G(t - t^*)$ достигает упругопластической границы $x_1 = m^*$. Следовательно, начиная с момента времени $t = t_2$ от плоскости $x_1 = m^*$ к плоскостям $x_1 = 0$ и $x_1 = h$ движутся поверхности $x_1 = m^* - G(t - t_2)$ и $x_1 = m^* + G(t - t_2)$ соответственно. С этого момента область $0 \leq x_1 \leq m^*$ является областью с накопленными неизменяющимися необратимыми деформациями.

В области обратимого деформирования (3.2) уравнение для нахождения перемещений принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{1}{G^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\rho g_2}{\mu}. \quad (4.1)$$

Решением уравнения (4.1) является функция

$$u = \rho g_2 (G^2 t^2 - x^2) / (4\mu) + f_1(\alpha) + g_1(\beta). \quad (4.2)$$

Для решения задачи об отражении волны разгрузки от упругопластической границы необходимо найти функции $f(\alpha)$, $g(\beta)$, $f_1(\alpha)$, $g_1(\beta)$ в зависимостях (3.4), (4.2), используя условия непрерывности перемещений на поверхностях $x_1 = m^* + G(t - t_2)$ и $x_1 = m^* - G(t - t_2)$, полученные из соотношений (2.7) и (3.6):

$$u|_{x_1=m^*+G(t-t_2)} = \frac{k}{\mu} (x - h) + \frac{\rho g_2}{2\mu} (2m^*(x_1 - h) - x_1^2 + h^2), \\ u|_{x_1=m^*-G(t-t_2)} = \frac{k}{\mu} (G(t - t_2) + m^* - h) + \frac{\rho g_2}{2\mu} ((m^* - h)^2 + 4m^*G(t - t_2) - G^2(t - t_2)^2) + \\ + \frac{\rho g_2}{\eta} \left(m^{*2}(t_2 - t) + m^*G(t - t_2)^2 + G^2 \left(\frac{1}{3} t^3 - 2t^2 t_2 + 3t t_2^2 - \frac{4}{3} t_2^3 \right) \right)$$

и условия совпадения перемещений (3.4), (4.2) с их производными $\partial u / \partial x_1$ на упругопластической границе $x_1 = m^*$.

Решение задачи в области $m^* - G(t - t_2) \leq x_1 \leq m^*$ получаем в следующем виде:

$$u = \frac{k}{\mu} (G(t - t_2) + m^* - h) + \frac{\rho g_2}{2\mu} (h^2 - x_1^2 + 2m^*(G(t - t_2) + m^* - h)) + \\ + \frac{\rho g_2}{8\eta} \left(G(m^* + x_1)(t_2 - t)^2 + \frac{1}{G} (17m^*x_1^2 + 3m^{*3} - 5x_1^3 - 15m^{*2}x_1) + \right. \\ \left. + \frac{G^2}{12} (t_2 - t)^3 - (m^{*2} + x_1^2)(t + 7t_2) + 2m^*x_1(9t_2 - t) \right), \quad (4.3)$$

$$\sigma_{12} = \rho g_2 \left(\frac{\mu}{8\eta G} (G(t_2 - t)^2 + m^* + x_1)^2 - x_1 \right).$$

В области обратимого деформирования $m^* \leq x_1 \leq m^* + G(t - t_2)$ имеем

$$\begin{aligned} u = & \frac{k}{\mu} (G(t - t_2) + m^* - h) + \frac{\rho g_2}{2\mu} (h^2 - x_1^2 + 2m^*(G(t - t_2) + m^* - h)) + \\ & + \frac{\rho g_2}{8\eta} \left(G(m^* + x_1)(t_2 - t)^2 + \frac{m^* x_1}{G} (m^* + x_1) + \frac{1}{3G} (x_1^3 - 7m^{*3}) + \right. \\ & \left. + \frac{G^2}{3} (t_2 - t)^3 - (m^* + x_1)^2 (t - t_2) \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Так же как и в области $m^* - G(t - t_2) \leq x_1 \leq m^*$, напряжения определяются зависимостью (4.3).

Решения (4.3), (4.4) справедливы до момента времени $t = t_3$, когда либо плоскость $x_1 = m^* + G(t - t_2)$ совпадет с плоскостью $x_1 = h$, либо плоскость $x_1 = m^* - G(t - t_2)$ достигнет плоскости $x_1 = 0$. Выберем для определенности нагрузку $c_1(t^*)$ таким образом, чтобы быстрее выполнилось первое условие. В этом случае начиная с момента времени $t = t_3 = t^* + hG^{-1}$ от плоскости $x_1 = h$ к плоскости $x_1 = m^*$ движется поверхность $x_1 = h - G(t - t_3)$. Решением уравнения (4.1) при первом краевом условии (2.1) и условии непрерывности перемещений на поверхности $x_1 = h - G(t - t_3)$, следующем из первой зависимости (4.4) при $t_2 = t_3 + (m^* - h)G^{-1}$ и $x_1 = h - G(t - t_3)$, являются функции

$$\begin{aligned} u = & \frac{k}{\mu} (h - x_1) + \frac{\rho g_2}{2\mu} (h^2 - x_1^2 + 2m^*(h - x_1)) + \\ & + \frac{\rho g_2}{\eta} \left((x_1 - h) \left(m^* \left(t_3 - t + \frac{m^*}{G} \right) + \frac{G}{4} (t - t_3)^2 - \frac{1}{4G} x_1 h \right) + \frac{1}{12G} (x_1^3 - h^3) \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\sigma_{12} = -k - \rho g_2 (x_1 + m^*) + \frac{\rho g_2 \mu}{\eta} \left(m^* \left(t_3 - t + \frac{m^*}{G} \right) + \frac{G}{4} (t - t_3)^2 + \frac{1}{4G} (x_1 - h)^2 \right).$$

Решения (4.3), (4.5) справедливы до момента времени $t = t_4$, в который поверхность $x_1 = m^* - G(t - t_2)$ совпадет с плоскостью $x_1 = 0$. Начиная с этого момента от плоскости $x_1 = 0$ к плоскости $x_1 = m^*$ движется поверхность $x_1 = G(t - t_4)$. Краевыми условиями для уравнения (3.3) являются первое условие (3.5) и условие непрерывности компонент перемещений на поверхности $x_1 = G(t - t_4)$, полученное из первого соотношения (4.3) при $t_2 = t_4 - m^*G^{-1}$ и $x_1 = G(t - t_4)$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} u = & \frac{k}{\mu} (G(t - t_4) + 2m^* - h) + \frac{\rho g_2}{2\mu} (h^2 - x_1^2 + 2m^*(G(t - t_4) + 2m^* - h)) + \\ & + \frac{\rho g_2}{\eta} \left(\frac{2}{3G} (2m^{*3} - x_1^3) + \frac{1}{G} (3x_1^2 m^* - 4m^{*2} x_1) - t_4 (x_1 - m^*)^2 \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\sigma_{12} = -\rho g_2 x_1.$$

Решения (4.5), (4.6) справедливы до момента времени $t = t_5$, в который плоскость $x_1 = h - G(t - t_3)$ совпадет с плоскостью $x_1 = m^*$. Изменение перемещений в процессе разгрузки показано на рис. 2. Выбраны следующие значения постоянных: $\varphi = 60^\circ$, $\rho g_2 h / \mu = 0,36 \cdot 10^{-5}$, $kh / (\eta v_0) = 7,95 \cdot 10^{-6}$ ($v_0 = \sqrt{k/\rho}$), $k/\mu = 0,0007$. Перемещения u/h на рис. 2 приведены в момент начала процесса разгрузки $\tau^* = g_2 t / v_0 = 720$ и в моменты времени τ_2, \dots, τ_5 . В данном решении значение m^*/h равно 0,6. При другом значении m^*/h решения в области обратимого деформирования и в области с накопленными необратимыми деформациями не изменятся; изменятся значения времени t_2, \dots, t_5 и, возможно, последовательность приведенных решений.

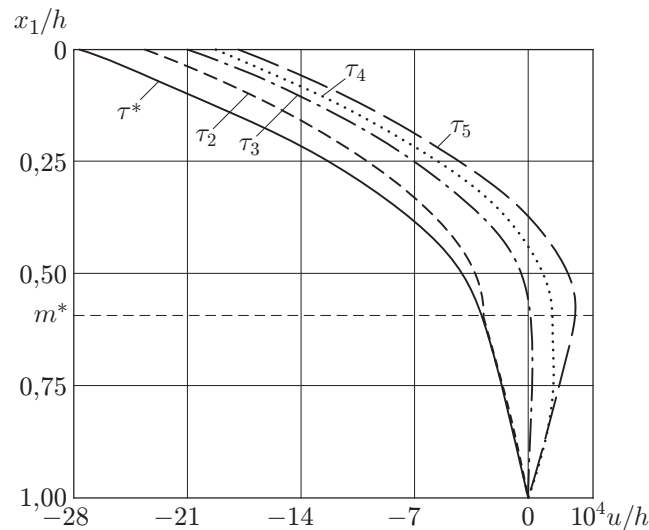


Рис. 2. Изменение перемещений в процессе разгрузки

Таким образом, основным условием в модели, позволившем построить замкнутое решение, является предположение о неизменности тензора необратимых деформаций при разгрузке, согласно которому неоднородное волновое уравнение (3.4) можно записать в качестве следствия уравнения движения. Представляет интерес исследование явления быстрого затухания интенсивности волны разгрузки при ее распространении в области с накопленными необратимыми деформациями. Плоскостью разрывов напряжений является только исходная волна разгрузки $x_1 = G(t - t^*)$, а для последующих волн разгрузки $x_1 = m^* - G(t - t_2)$ и $x_1 = G(t - t_4)$ согласно (3.6), (4.3) и (4.3), (4.6) соответственно напряжения непрерывны, т. е. данные плоскости уже являются волнами разрывов ускорений. При этом плоскости разрывов $x_1 = m^* + G(t - t_2)$ и $x_1 = h - G(t - t_3)$, распространяющиеся в области, где необратимые деформации отсутствуют, остаются ударными волнами (плоскостями разрывов напряжений).

В заключение заметим, что получение полного аналитического решения рассмотренной задачи определено возможностью записи уравнения движения за волной разгрузки в перемещениях. Для волн нагрузки такая возможность отсутствует, поэтому исследование этих поверхностей разрывов оказывается более сложным. Для того чтобы получить достаточно простое решение и исследовать главные качественные особенности процесса разгрузки, было принято предположение о малости обратимых деформаций по сравнению с необратимыми. Поэтому скорость распространения волны разгрузки оказалась постоянной и, как ожидалось, равной скорости распространения деформаций в линейной теории упругости [8]. Нелинейные эффекты, возникающие при распространении поверхностей разрывов, являющихся волнами разгрузки, также требуют отдельного изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А., Шапиро Г. С. Распространение возмущений в нелинейно-упругой и неупругой среде // Изв. АН СССР. Отд.-ние техн. наук. 1955. № 2. С. 68–89.
2. Мандель Ж. Пластические волны в неограниченной трехмерной среде // Механика. 1963. № 5. С. 119–141.
3. Быковцев Г. И., Кретьова Л. Д. О распространении ударных волн в упругопластических средах // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 106–116.

4. **Друянов Б. А.** Обобщенные решения динамической теории пластичности и термопластичности // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 5. С. 1073–1075.
5. **Садовский В. М.** К теории распространения упругопластических волн в упрочняющихся средах // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 166–172.
6. **Садовский В. М.** Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука. Физматлит, 1997.
7. **Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д.** О распространении волн в упруговязкопластической среде // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 4. С. 111–123.
8. **Безгласный П. А., Вервейко Н. Д.** О распространении ударных волн в упруговязкопластической среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1971. № 5. С. 71–76.
9. **Буренин А. А., Дудко О. В., Манцыбора А. А.** О распространении обратимых деформаций по среде с накопленными необратимыми деформациями // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 162–170.
10. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Лушпей А. В.** Переходный процесс торможения прямолинейного вязкопластического течения при мгновенном снятии нагружающих усилий // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 4. С. 663–669.
11. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.** Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
12. **Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В.** О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестн. ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87–93.
13. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С.** Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 143–151.
14. **Знаменский В. А., Ивлев Д. Д.** Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.

Поступила в редакцию 10/III 2011 г.
