

УДК 539.3

**ДВЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОВЕДЕНИЯ ОБРАЗЦОВ  
СУЛЬФИДНОЙ РУДЫ ПРИ ДВУХОСНОМ СЖАТИИ**

**А. И. Чанышев<sup>1,2</sup>, И. М. Абдулин<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,*

*E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет экономики и управления,  
ул. Каменская, 56, 630099, г. Новосибирск, Россия*

Строятся две паспортные зависимости поведения сульфидной руды с использованием тензорного базиса. Определяются направления в тензорном пространстве, где эти функции носят универсальный характер, т. е. не зависят от вида нагружения. С помощью указанных зависимостей описывается дилатансия горных пород и их сопротивление при растяжении и сжатии.

*Математические модели деформирования, разрушения горных пород, собственный тензорный базис, экспериментальные данные, сульфидная руда*

DOI: 10.15372/FTPRPI20180604

Традиционно в механике горных пород основным инструментом для исследований является закон Гука с двумя вещественными константами: модулем Юнга и коэффициентом Пуассона. В [1, 2] приводятся значения этих параметров для исследуемых горных пород. С помощью закона Гука решаются задачи о напряженно-деформированном состоянии массива пород вокруг выработок [3, 4], делаются прогнозы относительно устойчивости тех или иных сооружений [5, 6]. Следует заметить, что горные породы, в отличие от металлов, обнаруживают при деформировании такое свойство, как разное сопротивление при растяжении и сжатии. Данная особенность ярко проявляется при разрушении (пределы прочности при растяжении и сжатии различаются в десятки и более раз) [1, 2, 7].

В [8–10] рассматриваются вопросы разного сопротивления горных пород в упругости. Установлено, что модуль Юнга для бетона имеет следующие значения: при растяжении  $E^+ = 7 \cdot 10^3$  МПа, при сжатии  $E^- = 17.5 \cdot 10^3$  МПа [8]. Для оргстекла получена высокая разномодульность  $E^+ / E^-$ , доходящая до 4.11, а для стали У8 приводятся следующие данные  $E^+ = 209 \cdot 10^3$  МПа,  $E^- = 218 \cdot 10^3$  МПа [9, 10].

Применение традиционного закона Гука, который не учитывает разные значения модуля упругости горных пород при растяжении и сжатии, может давать искаженную картину распределения напряжений и деформаций в массиве горных пород, что важно с точки зрения безопасного ведения горных работ. По этой причине представляется актуальной разработка определяющих соотношений горных пород при деформировании и разрушении, отражающих особенности их поведения при нагружении.

Для учета сопротивления материалов имеются различные математические модели. В [8, 11] строятся определяющие соотношения, по виду совпадающие с законом Гука, однако коэффициенты при напряжениях зависят от знака напряжения. Другие варианты разномодульной теории упругости представляют собой обобщение упругого потенциала [12, 13].

Запредельное деформирование применительно к горным породам исследовалось в [14], где в качестве базовой рассматривалась зависимость “главное напряжение – главная деформация”, вводился модуль спада, определяющие соотношения связывали указанные величины. Подчеркнем, что рассматриваемая зависимость “главное напряжение – главная деформация” даже для металлов не является универсальной, т. е. паспортной, потому что зависит от действия других главных напряжений. Все перечисленные примеры говорят о необходимости построения определяющих соотношений деформирования и разрушения горных пород, основанных на собственном тензорном базисе, вдоль ортов которого связи между напряжениями и деформациями имеют универсальный характер, не зависящий от действия напряжений в других направлениях. Эти соотношения являются независимыми как орты тензорного базиса.

На примере сульфидной руды, экспериментальные данные для которой приведены в [15], покажем основные этапы построения собственного тензорного базиса для горных пород. Чтобы проследить, что означает собственный тензорный базис, рассмотрим закон Гука, записанный через главные напряжения и деформации:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3), \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2), \quad (1)$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона; 1–3 — главные оси тензоров напряжений  $T_\sigma$  и деформаций  $T_\varepsilon$ , которые в этой системе координат имеют вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(главные оси для материалов с законом деформирования (1) совпадают).

Для описания  $T_\sigma, T_\varepsilon$  из (2) используем тензорный базис  $T_1^0, T_2^0, T_3^0$  следующего вида:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В базисе (3) тензоры  $T_\sigma, T_\varepsilon$  имеют координаты

$$S_1^0 = \sigma_1, \quad S_2^0 = \sigma_2, \quad S_3^0 = \sigma_3, \quad \Omega_1^0 = \varepsilon_1, \quad \Omega_2^0 = \varepsilon_2, \quad \Omega_3^0 = \varepsilon_3 \quad (4)$$

(скалярное произведение тензоров  $T_\sigma, T_\varepsilon$  определяется как их свертка по повторяющимся индексам:  $(T_\sigma, T_\varepsilon) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ ).

Закон Гука (1) в базисе (3) представляет собой матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \vec{\Omega} = A\vec{S}, \quad (5)$$

матрица  $A$  — симметрическая.

Для того чтобы найти базис, в котором координаты тензоров  $T_\sigma$ ,  $T_\varepsilon$  пропорциональны, необходимо решить уравнение

$$|A - \lambda \tilde{E}| = 0,$$

где  $\tilde{E}$  — единичная матрица.

Решая это уравнение, находим корни:

$$\lambda_1 = \frac{1-2\nu}{E}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1+\nu}{E}. \quad (6)$$

Корням (6) соответствуют собственные векторы:

$$\bar{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad \bar{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1), \quad \bar{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1), \quad (7)$$

которые взаимно-ортогональны, а их длины равны единице.

Исходя из (7), получаем набор собственных тензоров:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В экспериментах А. Н. Ставрогина [15] тензоры напряжений и деформаций в процессе нагружения имели вид (2), причем здесь  $\sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$  в силу специфики нагружения.

Образцы в виде цилиндров в опытах [15] подвергались вначале действию гидростатического давления  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ), затем при постоянном боковом давлении — дополнительному сжатию вдоль образующих цилиндров до разрушения (рис. 1).

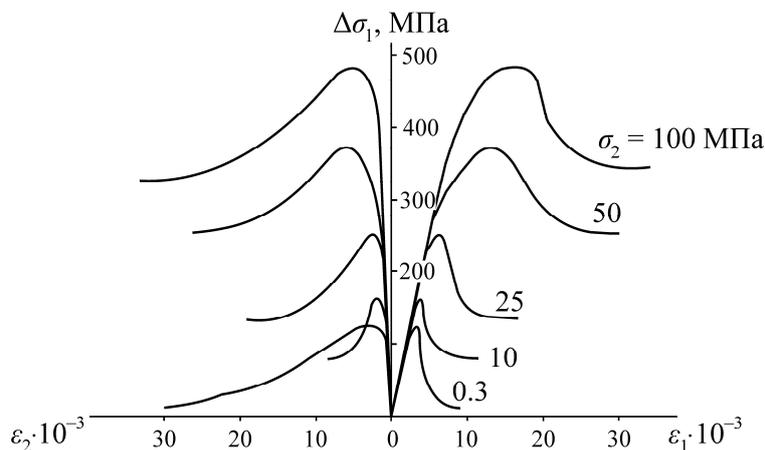


Рис. 1. Диаграмма изменения осевого напряжения  $\Delta\sigma_1$  от деформаций  $\Delta\varepsilon_1$ ,  $\Delta\varepsilon_2$  при сжатии образцов для разных уровней бокового давления [15]

Для проведения расчетов данные рис. 1 оцифровали, полученные численные значения напряжений и деформаций использовали в дальнейшем для построения искомых кривых.

Заметим, что в наших обозначениях нумерация осей 1, 2, 3 никак не связана с соотношениями между напряжениями ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ). Используется только то, что  $\sigma_1 < 0$ ,  $\sigma_2 < 0$ ,  $\sigma_3 < 0$ .

Ось 1 здесь совпадает с осью  $Oz$  цилиндрической системы координат, оси 2 и 3 совпадают с осями  $r$  и  $\theta$ . Базисные орты (7) и (8) обозначены так, что координаты  $S_3$  и  $\Omega_3$  тензоров  $T_\sigma$  и  $T_\varepsilon$  в процессе экспериментов А. Н. Ставрогина равны всегда нулю, потому что тензоры  $T_\sigma$ ,  $T_\varepsilon$  имеют вид (2) при условиях  $\sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$  (первое из них есть следствие уравнений равновесия, второе условие связано с симметричностью процесса деформирования).

Отсюда следует, что анализ экспериментальных данных [15] можно вести, анализируя лишь плоскость, проходящую через орты  $T_1$  и  $T_2$ . Если взять эти данные и рассмотреть поведение сульфидной руды вдоль ортов  $T_1$  и  $T_2$  в виде зависимостей  $S_1 = S_1(\Omega_1)$  и  $S_2 = S_2(\Omega_2)$ , где согласно (2), (8)

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{\sqrt{3}}, & \Omega_1 &= \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{\sqrt{3}}, \\ S_2 &= \frac{-2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{6}} = \frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sqrt{6}}, & \Omega_2 &= \frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\sqrt{6}}, \end{aligned} \quad (9)$$

то легко видеть (рис. 2), что эти зависимости не являются универсальными для всех видов нагружения (при разных уровнях бокового давления).

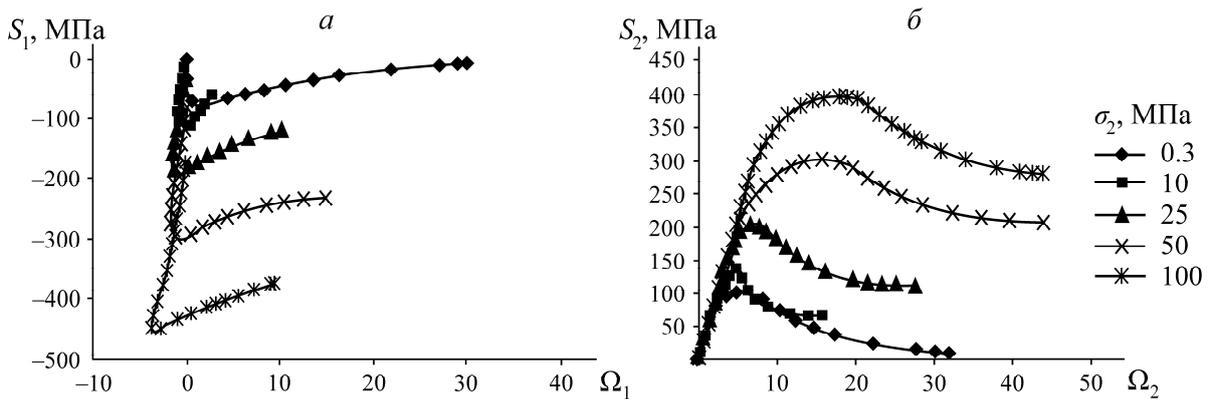


Рис. 2. Изменение функций  $S_1 = S_1(\Omega_1)$  (а) и  $S_2 = S_2(\Omega_2)$  (б) для сульфидной руды в зависимости от бокового давления

Таким образом, чем меньше уровень бокового давления, тем кривая  $S_1 = S_1(\Omega_1)$  находится ближе к оси абсцисс, чем больше уровень бокового давления, тем выше по отношению к другим кривая  $S_2 = S_2(\Omega_2)$ .

Для металлов эти кривые являются универсальными, причем  $S_1 = S_1(\Omega_1)$  — это прямая с тангенсом угла наклона к оси абсцисс, равным  $1/\lambda_1$ , где  $\lambda_1$  определяется (6); другая кривая  $S_2 = S_2(\Omega_2)$  — “единая” кривая, выражающая собой зависимость “интенсивность напряжений – интенсивность деформаций” [16].

Определим теперь собственный тензорный базис для сульфидной руды по данным [15]. Повернем исходный базис  $T_\sigma$  и  $T_\varepsilon$  на угол  $\varphi$  так, как показано на рис. 3.

Тензоры  $T_\sigma$ ,  $T_\varepsilon$  в новом и старом базисах имеют разложения:

$$T_\sigma = S_1 T_1 + S_2 T_2 = \tilde{S}_1 \tilde{T}_1 + \tilde{S}_2 \tilde{T}_2, \quad T_\varepsilon = \Omega_1 T_1 + \Omega_2 T_2 = \tilde{\Omega}_1 \tilde{T}_1 + \tilde{\Omega}_2 \tilde{T}_2. \quad (10)$$

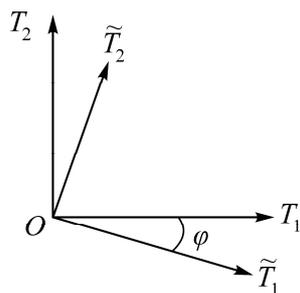


Рис. 3. Поворот исходного базиса на угол  $\varphi$

Исходя из (10) и ортонормированности базисов  $T_1, T_2, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ , получаем следующие формулы перехода от координат  $S_1, S_2, \Omega_1, \Omega_2$  к координатам  $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= S_1 \cos \varphi - S_2 \sin \varphi, & \tilde{S}_2 &= S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi, \\ \tilde{\Omega}_1 &= \Omega_1 \cos \varphi - \Omega_2 \sin \varphi, & \tilde{\Omega}_2 &= \Omega_1 \sin \varphi + \Omega_2 \cos \varphi. \end{aligned} \tag{11}$$

Построим зависимости  $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1(\tilde{\Omega}_1)$ ,  $\tilde{S}_2 = \tilde{S}_2(\tilde{\Omega}_2)$ , увеличивая угол от нуля и используя данные [15]. Замечаем, что с увеличением угла  $\varphi$  кривые  $\tilde{S}_2 = \tilde{S}_2(\tilde{\Omega}_2)$  для больших значений бокового давления приближаются к аналогичным кривым для малых значений бокового давления. Кроме того, нелинейные кривые  $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1(\tilde{\Omega}_1)$  с увеличением угла  $\varphi$  выполаживаются, стремясь занять положение прямой линии. На рис. 4 приведены указанные зависимости для угла  $\varphi$ , равного  $40^\circ$ . Значения этого угла будем обозначать как  $\varphi_*$ .

Для сравнения на рис. 4в приведены те же самые зависимости  $\tilde{S}_2 = \tilde{S}_2(\tilde{\Omega}_2)$  для угла поворота, равного  $20^\circ$ . Видно, что здесь еще нет “единой” зависимости в направлении орта  $\tilde{T}_2$ .

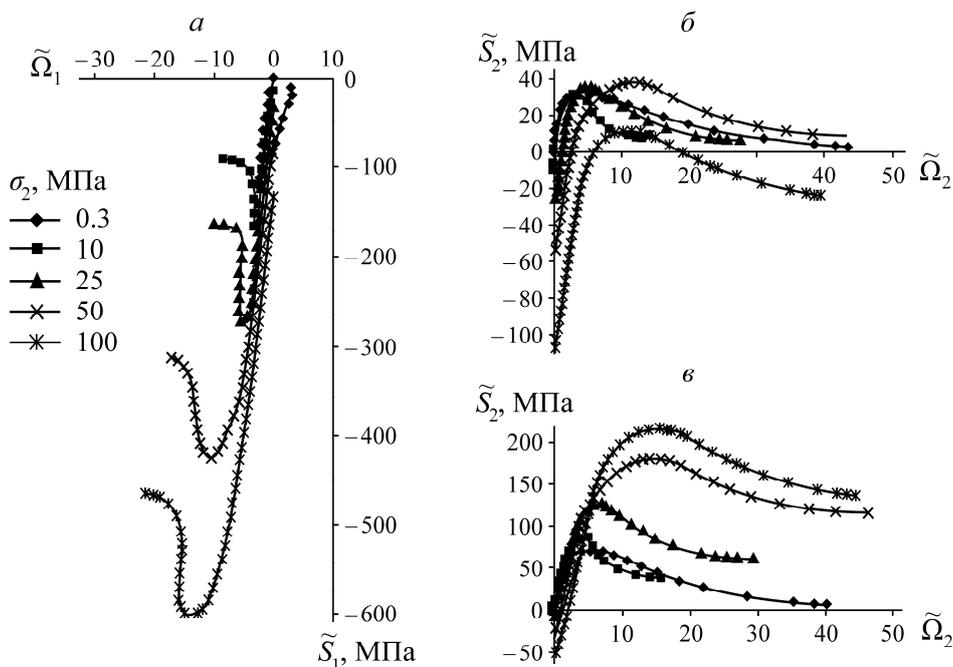


Рис. 4. Изменение координат  $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$  тензора напряжений от соответствующих координат  $\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2$  тензора деформаций в новом базисе, повернутом относительно старого на угол  $40^\circ$  (а), (б) и на угол  $20^\circ$  (в)

Заметим, что если углу  $\varphi$  придавать значения большие  $\varphi_*$ , то кривые  $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1(\tilde{\Omega}_1)$  начинают приобретать нелинейный характер, причем кривые с большим значением бокового давления приближаются быстрее к оси абсцисс, чем отвечающие малым значениям. Что касается кривых  $\tilde{S}_2 = \tilde{S}_2(\tilde{\Omega}_2)$ , то после достижения углом  $\varphi$  значения  $\varphi_*$ , эти кривые (приняв при  $\varphi = \varphi_*$  вид “единой” зависимости) начинают опять расходиться: кривые с большим значением бокового давления опускаются ниже кривых с малым значением бокового давления. Следует отметить еще одну особенность поведения кривых при значении  $\varphi = \varphi_*$  — положение этих кривых не зависит от значения бокового давления. Здесь есть разброс значений, никак не связанный с условиями нагружений. Это означает, что в данном месте могут быть использованы методы математической статистики для определения регрессионной кривой (прямой в случае зависимости  $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1(\tilde{\Omega}_1)$ ). Здесь всюду использовался ортонормированный тензорный базис (орты имели единичную длину). Из диаграмм  $S_2 = S_2(\Omega_2)$  и  $\tilde{S}_2 = \tilde{S}_2(\tilde{\Omega}_2)$  видно, что предел упругости в первом приблизительно равен 300–400 МПа, во втором случае он в 10 раз меньше (30–40 МПа). Следовательно, если пользоваться классическими представлениями в упругости или в пластичности, то можно в 10 раз предсказать более завышенную оценку по прочности, чем она определяется на самом деле. Для разрушения породы не надо прикладывать такие большие усилия (300–400 МПа), возможно приложение меньших усилий (30–40 МПа), но в определенном направлении.

Далее то, что зависимости  $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1(\tilde{\Omega}_1)$ ,  $\tilde{S}_2 = \tilde{S}_2(\tilde{\Omega}_2)$  при  $\varphi = \varphi_*$  являются паспортными или характеристическими, позволяет сформулировать новые соотношения упругости, пластичности и разрушения горных пород.

Рассматривая линейный участок на кривой  $\tilde{S}_2 = \tilde{S}_2(\tilde{\Omega}_2)$  рис. 3, получаем связь

$$\tilde{S}_2 = 2\mu\tilde{\Omega}_2, \quad (12)$$

где  $2\mu$  — константа, определяемая наклоном кривой к оси абсцисс.

Рассматривая нелинейный участок, получаем “единую” зависимость в виде

$$\tilde{S}_2 = \tilde{S}_2(\tilde{\Omega}_2), \quad (13)$$

не зависящую ни от каких условий нагружения.

Для запредельного деформирования можно ввести модуль спада  $2\mu_*$  по формуле

$$2\mu_* = \frac{\tilde{S}_2^0 - \tilde{S}_2}{\tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}_2^0}, \quad (14)$$

где  $\tilde{S}_2^0$ ,  $\tilde{\Omega}_2^0$  — пределы прочности материала для напряжений и деформаций соответственно;  $\tilde{S}_2$ ,  $\tilde{\Omega}_2$  — текущие значения величин (11).

Для замыкания соотношений (12)–(14) необходимо дополнить их законом пропорционального изменения величин  $\tilde{S}_1$ ,  $\tilde{\Omega}_1$ :

$$\tilde{S}_1 = 2k\tilde{\Omega}_1, \quad (15)$$

$2k$  — константа, определяемая наклоном зависимости  $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1(\tilde{\Omega}_1)$  к оси абсцисс.

Для получения зависимостей между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и деформациями  $\varepsilon_{kl}$  необходимо соотношения (12)–(15) дополнить условием

$$\mu_\sigma = \mu_\varepsilon, \quad (16)$$

где  $\mu_\sigma$ ,  $\mu_\varepsilon$  — параметры Лоде–Надаи [16].

При применении (8) условие (16) выглядит как пропорциональность координат  $S_2, S_3, \Omega_2, \Omega_3$ :

$$S_2 / S_3 = \Omega_2 / \Omega_3. \quad (17)$$

Условие (17) — основная гипотеза деформационной теории пластичности Генки–Надаи–Ильюшина [17], использовалась в [15] для определения деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

Другие подходы к описанию деформирования горных пород можно найти, например, в [18].

#### ВЫВОДЫ

Предложен путь построения определяющих соотношений упругости, пластичности, разрушения для горных пород. На примере сульфидной руды показаны паспортные зависимости для горных пород, одна из которых представляет собой прямую линию, другая (нелинейная зависимость) определяет “единую” кривую.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мельников Н. В., Ржевский В. В., Протодяконов М. М. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. — М.: Недра, 1975. — 279 с.
2. Ржевский В. В. Физико-технические параметры горных пород. — М.: Наука, 1975. — 212 с.
3. Мухелишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: наука, 1966. — 708 с.
4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. — Киев: Наук. думка, 1968. — 891 с.
5. Фисенко Г. Л. Устойчивость бортов карьеров и отвалов. — М.: Недра, 1965. — 378 с.
6. Галустьян Э. Л. Устойчивость бортов и отвалов нагорных карьеров // Горн. журн. — 1991. — № 8. — С. 27–31.
7. Ефимов В. П. Особенности разрушения образцов хрупких горных пород при одноосном сжатии с учетом характеристик зерен // ФТПРПИ. — 2018. — № 2. — С. 18–25.
8. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. — М.: Наука, 1982. — 320 с.
9. Деревянко Н. И. Свойство армированного полистирола при кратковременном растяжении, сжатии и изгибе // Механика полимеров. — 1968. — № 6. — С. 1059–1064.
10. Иванов Г. П. Исследование несовершенной упругости металлов: Автореферат дис. на соискание ученой степени д.т.н. (05.02.01) / АН БССР. Отд-ние физ.-техн. наук. — Минск, 1973. — 35 с.
11. Джонс К. М. Соотношения, связывающие напряжения и деформация в материалах с разными модулями упругости при растяжении и сжатии // Ракетная техника и космонавтика. — 1977. — Т. 15. — № 1. — С. 16–25.
12. Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — № 6. — С. 29–34.
13. Мясников В. П., Олейников А. И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. — Владивосток: Дальнаука, 2007. — 172 с.
14. Петухов И. М., Линьков А. М. Механика горных ударов. — М.: Недра, 1983. — 280 с.
15. Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г. Экспериментальная физика и механика горных пород. — СПб.: Наука, 2001. — 343 с.
16. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
17. Ильюшин А. А. Пластичность: основы общей математической теории. — М.: АН СССР, 1963. — 271 с.
18. Ревуженко А. Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. — Новосибирск: НГУ, 2000. — 428 с.

*Поступила в редакцию 14/VIII 2018*

*После доработки 1/X 2018*

*Принята к публикации 28/XI 2018*