

## О СТАЦИОНАРНОЙ ДЕТОНАЦИИ В ПУЗЫРЬКОВОЙ СРЕДЕ

С. А. Ждан

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, zhdan@hydro.nsc.ru

Показано, что модель Иорданского — Когарко содержит стационарное решение для детонационной волны в химически активных пузырьковых средах при следующих минимальных требованиях к модели: сжимаемость жидкости и учет акустических потерь. Сформулировано правило отбора скорости. Рассчитаны волновая структура зоны реакции и скорость стационарной пузырьковой детонации.

Ключевые слова: детонация, пузырьковая жидкость, пузырьки реагирующего газа, акустические потери, солитон, уединенная волна.

Экспериментально детонационные волны (ДВ) в реагирующих пузырьковых средах были обнаружены и исследованы в [1–3]. Установлено, что структура волны представляет солитон, движущийся с квазипостоянной скоростью  $D$ , меньшей замороженной скорости звука в смеси. Первые попытки вычисления параметров пузырьковой детонации [4–6] по классической схеме Жуге в предположении равенства давлений фаз привели к простым формулам для скорости идеальной детонации, но дающим значения  $D$  на 10 ÷ 30 % ниже экспериментальных. То есть равновесную по давлениям фаз модель нельзя было признать удовлетворительной и требовался учет реальной кинетики релаксационных процессов при описании структуры ДВ.

К настоящему времени на основе неравновесной по давлениям фаз модели двухфазной пузырьковой среды [7–9] предложено несколько математических моделей [6, 10–14], выражающих различные подходы к теоретическому описанию структуры волны и определению скорости пузырьковой детонации, которые можно разбить на две группы. Первая группа моделей предполагает, что жидкая фаза несжимаема: а) бездиссипативные модели [6, 10, 11]; б) диссипативные потери за счет теплопроводности [6]. Вторая группа моделей предполагает, что жидкая фаза сжимаема, а диссипативные потери обусловлены: а) вязкостью и теплопроводностью [12]; б) вязкостью [13]; в) вязкостью и акустическим излучением пузырьков [14].

В данной работе показано, что в матема-

тической модели пузырьковой детонации при идеальной жидкой фазе учет диссипации энергии за счет акустического излучения пузырьков необходим для существования стационарного решения в виде уединенной волны.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть пространство заполнено пузырьковой жидкостью с одинаковыми (радиусом  $r_0$ ) пузырьками реагирующего газа и однородной объемной концентрацией  $\alpha_{20}$  ( $\alpha_{20} \ll 1$ ).

Рассмотрим движение пузырьковой среды, предполагая отсутствие массообмена между пузырьками и жидкостью, а также отсутствие дробления и слияния пузырьков. Согласно неравновесной по давлениям двухфазной математической модели Иорданского — Когарко [7, 8], уравнения сохранения масс, числа пузырьков и импульса для смеси имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, & (\alpha_2 \rho_2)_t + (\alpha_2 \rho_2 u)_x &= 0, \\ N_t + (Nu)_x &= 0, & (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho = \rho_1(1 - \alpha_2)$  — средняя плотность среды,  $\rho_1$  — плотность жидкости,  $\rho_2$  — плотность газа,  $u$  — массовая скорость среды,  $p$  — давление в жидкости,  $\alpha_2 = (4/3)\pi Nr^3$  — объемная концентрация газовой фазы,  $N$  — число пузырьков в единице объема смеси,  $r$  — текущий радиус пузырька.

Система (1) дополняется уравнением пульсационного движения пузырьков в жидкости (уравнение Рэлея)

$$r \frac{ds}{dt} + \frac{3}{2} s^2 = \frac{\bar{p} - p}{\rho_1^0}, \quad \frac{dr}{dt} = s, \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00-02-18004, 00-15-96181).

где  $s$  — скорость перемещения поверхности пузырька,  $\rho_1^0$  — плотность жидкости в исходном состоянии, а выражение для  $\bar{p}$  зависит от замыкающих предположений различных моделей пузырьковой среды [15]. Например, если жидкость идеальная и несжимаемая, то  $\bar{p} = p_2$ . При учете диссипации за счет вязкости  $\bar{p} = p_2 - 4\mu_1 s/r$ . Если жидкость предполагается сжимаемой и учитываются потери на акустическое излучение пузырьков [16], то

$$\bar{p} = p_2 - \frac{4\mu_1}{r}s + \frac{r}{c_0} \frac{dp_2}{dt}, \quad (3)$$

где  $p_2$  — давление газовой фазы,  $\mu_1$  — динамическая вязкость жидкости,  $c_0$  — скорость звука в жидкости.

Корректная математическая модель пузырьковой детонации, основывающаяся на двухфазных уравнениях Иорданского — Когарко, должна содержать стационарное решение в виде бегущей волны, распространяющейся с постоянной скоростью. Покажем, что система (1)–(3) даже без учета вязкостной диссипации ( $\mu_1 = 0$ ) и теплообмена между фазами обладает указанным свойством.

Конкретизируем модель. Жидкость сжимаема и удовлетворяет уравнению состояния Тэта

$$p = p_0 + A[(\rho_1/\rho_1^0)^n - 1], \quad (4)$$

где  $A = \rho_1^0 c_0^2/n$ ;  $\rho_1^0$ ,  $c_0$ ,  $n$  — константы жидкой фазы.

При отсутствии теплообмена между фазами справедливо условие адиабатичности для пузырьков. Полагая, что в химически активных пузырьках при достижении ими критического радиуса возгорания  $r_* < r_0$  происходит мгновенное выделение энергии (взрыв в постоянном объеме), получаем уравнение состояния газовой фазы в виде

$$p_2 = p_i(\rho_2/\rho_2^0)^{\gamma_i}, \quad (5)$$

где  $i = 0$  — для исходной газовой фазы,  $i = 1$  — для продуктов сгорания ( $p_1 > p_0$ ),  $\rho_2^0$  — начальная плотность газа. Обоснование применимости уравнения (5) с эффективным показателем адиабаты продуктов  $\gamma_1$  для описания процесса адиабатического расширения химически равновесных газообразных продуктов реакции в условиях пузырьковой детонации приведено в [17].

Оценим вклад в диссипативные потери второго и третьего слагаемых в выражении (3). Предварительно, воспользовавшись соотношением (5), преобразуем третье слагаемое:  $(r/c_0)(dp_2/dt) = -3\gamma_i p_2 s/c_0$ . В результате соотношение (3) переписывается в виде

$$\bar{p} = p_2 - \left( \frac{4\mu_1}{r} + \frac{3\gamma_i p_2}{c_0} \right) s.$$

Тогда отношение второго слагаемого к третьему примет вид

$$\frac{4\mu_1 c_0}{3\gamma_i p_i r_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{3\gamma_i - 1} < \frac{4\mu_1 c_0}{3\gamma_0 p_0 r_0} = \frac{4}{3\gamma_0 \beta \text{Re}}, \quad (6)$$

где  $\text{Re} = \rho_1^0 r_0 \sqrt{p_0/\rho_1^0}/\mu_1$  — число Рейнольдса,  $\beta = \sqrt{p_0/\rho_1^0}/c_0$ . Из неравенства (6) следует, что при  $\beta \text{Re} \gg 1$  диссипацией энергии за счет вязкости жидкой фазы можно пренебречь. Например, для жидкостей типа воды с пузырьками газа радиусом  $r_0 > 1$  мм  $\beta \text{Re} \simeq 10^2$ , поэтому диссипативные потери за счет акустического излучения пузырьков будут определяющими.

Таким образом, модель пузырьковой детонации (1)–(5) замкнута и при заданных теплофизических свойствах жидкости и газа характеризуется следующими безразмерными параметрами:  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $R_* = r_*/r_0$ ,  $B = p_1/p_0$ .

## ПОСТАНОВКА СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Стационарное решение системы (1)–(5) для пузырьковой среды будем искать в виде бегущей со скоростью  $D$  волны [9]. Перейдем в систему координат волны заменой переменных  $\xi = x - Dt$ . Тогда уравнения (1), (2) примут вид

$$\rho(u - D) = -\rho_0 D, \quad \alpha_2 \rho_2(u - D) = -\alpha_{20} \rho_2^0 D, \quad (7)$$

$$\rho(u - D)^2 + p = \rho_0 D^2 + p_0, \quad N(u - D) = -N_0 D;$$

$$r(u - D) \frac{ds}{d\xi} = \frac{p_2 - p}{\rho_1^0} - \frac{3\gamma_i p_2}{\rho_1^0 c_0} s - \frac{3}{2} s^2, \quad (8)$$

$$(u - D) \frac{dr}{d\xi} = s.$$

Здесь индексом 0 обозначено начальное равновесное состояние перед фронтом волны:

$$u = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_{20}, \quad r = r_0, \quad s = 0, \quad p = p_2 = p_0. \quad (9)$$

Если при некотором значении скорости  $D$  стационарное решение системы (7), (8) существует, то конечное состояние за волной (обозначаем индексом  $e$ ) также должно быть равновесным:

$$u = u_e, \quad \alpha_2 = \alpha_{2e}, \quad r = r_e, \quad s_e = 0, \quad p_e = p_{2e}. \quad (10)$$

Итак, требуется найти решение системы (7), (8) при условиях (9), (10). Здесь скорость волны  $D$  является искомым параметром задачи.

Прежде чем приступить к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (8), из анализа параметров конечного равновесного состояния найдем ограничения на скорость пузырьковой детонации  $D$ .

Введем безразмерные переменные

$$P = \frac{p}{p_0}, \quad P_2 = \frac{p_2}{p_0}, \quad V = \left(\frac{r}{r_0}\right)^3, \quad \bar{D} = \frac{D}{c_\alpha},$$

$$c_\alpha = \frac{c_*}{\sqrt{\alpha_{10}\alpha_{20}}}, \quad c_* = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_1^0}}.$$

На основе интегралов (7) получим

$$P - 1 = \bar{D}^2 [1 - V + \alpha_{10}(1 - f(P))/\alpha_{20}], \quad (11)$$

$$\rho_2/\rho_2^0 = V^{-1},$$

где  $f(P) = \rho_1^0/\rho_1 = [p_0(P - 1)/A + 1]^{-1/n}$  для уравнения состояния Тэта (4). Если жидкость несжимаема, то  $f(P) \equiv 1$ . Давление в продуктах сгорания газового пузырька согласно (5) определяется из соотношения  $P_2 = B/V^{\gamma_1}$ , а давление в жидкости — из (11), поэтому множество равновесных по давлению фаз состояний за волной ( $P_2 = P = P_e$ ) должно удовлетворять уравнению детонационной адиабаты активной пузырьковой среды

$$P_e - 1 = \bar{D}^2 \left[ 1 - \left(\frac{B}{P_e}\right)^{1/\gamma_1} + (1 - f(P_e)) \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} \right]. \quad (12)$$

Уравнение (12) имеет решение, если скорость  $\bar{D}$  не меньше, чем определенная критическая величина  $\bar{D}_{\min}$ , которая находится при решении (12) совместно с продифференцированным по  $P_e$  уравнением. Соотношение для критического давления  $P_*$  имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{B}{P_*}\right)^{1/\gamma_1} \frac{(\gamma_1 + 1)P_* - 1}{\gamma_1 P_*} = \\ = 1 + \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} [(P_* - 1)f'(P_*) + 1 - f(P_*)]. \end{aligned} \quad (13)$$

После решения (13) находим  $\bar{D}_{\min}$  из уравнения

$$\bar{D}_{\min}^2 = \frac{(\gamma_1 + 1)P_* - 1}{1 + \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} [1 - f(P_*) - \gamma_1 P_* f'(P_*)]}. \quad (14)$$

В работах [4, 5] значение  $\bar{D}_{\min}$  считалось равным скорости ДВ в реагирующей пузырьковой среде. Однако согласно соотношению (12) при любой скорости  $\bar{D} > \bar{D}_{\min}$  за волной достигается равновесное по давлению состояние. Выбор единственного значения стационарной скорости пузырьковой детонации  $\bar{D}_0$  только из (12) невозможен потому, что в конечном состоянии кроме равенства давлений должно (см. (10)) выполняться еще условие равенства нулю скорости пульсации пузырьков ( $s_e = 0$ ). К сожалению, в общем случае не удается выписать подобно (12) алгебраическое соотношение для  $s$  (исключение составляет случай несжимаемой жидкой фазы без учета диссипации энергии [6, 11]), поэтому проверка выполнения условия  $s_e = 0$  при различных значениях  $\bar{D} > \bar{D}_{\min}$  фактически сводится к полному решению системы (7)–(10).

Введя безразмерные переменные  $R = r/r_0$ ,  $S = s/c_*$ ,  $U = u/c_\alpha$ ,  $X = \xi \sqrt{\alpha_{10}\alpha_{20}}/r_0$ , перепишем задачу (7)–(10) в виде

$$P - 1 = \bar{D}^2 [1 - R^3 + \alpha_{10}(1 - f(P))/\alpha_{20}],$$

$$U = \alpha_{20}(P - 1)/\bar{D}, \quad \rho_2/\rho_2^0 = R^{-3},$$

$$P_2 = P_i R^{-3\gamma_i} \quad (i = 0, 1),$$

$$R(U - \bar{D}) \frac{dS}{dX} = P_2 - P - 3\gamma_i \beta P_2 S - \frac{3}{2} S^2, \quad (15)$$

$$(U - \bar{D}) \frac{dR}{dX} = S,$$

$$X \rightarrow +\infty: \quad P = P_2 = 1, \quad S = 0, \quad R = 1,$$

$$X \rightarrow -\infty: \quad P = P_2 = P_e, \quad S_e = 0, \quad R = R_e.$$

Решение системы (15), если оно существует, должно проходить через две особые точки, соответствующие исходному и конечному равновесным состояниям перед ДВ и за ней. Поведение решения в окрестности особых точек исследуется стандартно [9] с использованием метода линеаризации.

Для описания той зоны фронта волны, где отклонения переменных  $U, S, R, P, P_2$  от их значений в начальном равновесном состоянии, обозначаемом нулем ( $U = 0, S = 0, R = 1, P = P_2 = 1$ ), достаточно малы ( $S = \varepsilon S_{10}, R = 1 + \varepsilon R_{10}, \dots$ ), получаем систему линейных уравнений

$$\frac{dS_{10}}{dX} = 3\left(\frac{\gamma_0}{\bar{D}} - \frac{\bar{D}}{1-\delta}\right)R_{10} + 3\frac{\gamma_0\beta}{\bar{D}}S_{10},$$

$$\frac{dR_{10}}{dX} = -\frac{S_{10}}{\bar{D}},$$

фундаментальные решения которой имеют вид

$$S = A^{(s)} \exp k_0(X - X_0), \quad (16)$$

$$R = 1 + A^{(r)} \exp k_0(X - X_0).$$

Здесь  $\delta = (\alpha_{10}D/c_0)^2$ ,  $k_0$  — число, определяемое из характеристического уравнения, дающего условие существования нетривиальных решений типа (16) с ненулевыми значениями констант  $A^{(s)}, A^{(r)}$ :

$$\bar{D}k_0 = \frac{3}{2}\gamma_0\beta - \left[ \left(\frac{3}{2}\gamma_0\beta\right)^2 + 3\left(\frac{\bar{D}^2}{1-\delta} - \gamma_0\right) \right]^{1/2}.$$

Из последнего уравнения и (14) корень  $k_0$  есть действительное отрицательное число, чему соответствует монотонный профиль перед волной. Для самих констант получается линейное соотношение  $A^{(s)} = -\bar{D}k_0A^{(r)}$ .

Аналогично исследуется асимптотика в хвосте волны, где отклонения переменных  $U, S, R, P, P_2$  от их значений в конечном равновесном состоянии ( $U = U_e, S = 0, R = R_e, P = P_2 = P_e$ ) достаточно малы ( $S = \varepsilon S_{1e}, R = R_e + \varepsilon R_{1e}, \dots$ ). Получаем систему линейных уравнений

$$R_e(\bar{D} - U_e)\frac{dS_{1e}}{dX} = 3\left(\frac{\gamma_1 P_e}{R_e} - \frac{R_e^2 \bar{D}^2}{1 - f^{n+1}\delta}\right)R_{1e} + 3\gamma_1\beta P_e S_{1e}, \quad \frac{dR_{1e}}{dX} = -\frac{S_{1e}}{\bar{D} - U_e},$$

фундаментальные решения которой имеют вид

$$S = A^{(se)} \exp k_e(X - X_e), \quad (17)$$

$$R = R_e + A^{(re)} \exp k_e(X - X_e),$$

а характеристическое уравнение для  $K_e = R_e(\bar{D} - U_e)k_e$

$$K_e = \frac{3}{2}\gamma_1\beta P_e \pm \left[ \left(\frac{3}{2}\gamma_1\beta P_e\right)^2 + 3\left(\frac{R_e^3 \bar{D}^2}{1 - f^{n+1}\delta} - \gamma_1 P_e\right) \right]^{1/2}.$$

Легко показать, что при  $\bar{D} > \bar{D}_{\min}$  справедливо неравенство  $\bar{D}^2 > (1 - f^{n+1}\delta)\gamma_1 P_e / R_e^3$ , поэтому корни характеристического уравнения для  $k_e$  действительны и разного знака. Поскольку за волной при  $X \rightarrow -\infty$  отклонения от конечного равновесного состояния должны стремиться к нулю, выбирается положительный корень. Таким образом, хвост ДВ в активной пузырьковой среде может иметь только монотонную структуру, а для констант из (17) получается линейное соотношение  $A^{(se)} = -(\bar{D} - U_e)k_e A^{(re)}$ .

Заметим, что решение системы (15) обладает следующим свойством: в области  $-\infty < X < \infty$  существует точка  $X = X_*$ , в которой радиус пузырьков принимает минимальное значение  $R(X_*) = R_{\min}$ , а скорость перемещения их поверхности обращается в нуль ( $S(X_*) = 0$ ). Процедура построения решения для структуры ДВ представляет итерационный процесс по скорости  $\bar{D}$  и состоит из проверки условия сшивки при  $S = 0$  двух интегральных кривых, одна из которых выходит из седловой особой точки начального состояния, а другая — из седловой особой точки конечного равновесного состояния. Если при каком-то значении  $\bar{D}$  условие сшивки выполняется, получаем решение системы (15) в виде единой интегральной кривой, проходящей через обе особые точки. Забегая вперед отметим, что условие сшивки решений выполняется только при одном значении скорости  $\bar{D} = \bar{D}_0$ , которая и является стационарной скоростью пузырьковой детонации.

Итак, задаем некоторое начальное значение скорости  $\bar{D}_1 > \bar{D}_{\min}$ . Сначала рассмотрим

Параметры стационарной ДВ	$\alpha_{20} \cdot 10^2$				
	0,5	1	2	4	6
$M_{\min}$	5,122	5,387	5,606	5,736	5,782
$M_0$	6,51	7,53	8,24	8,69	8,85
$M_{\max}$	6,581	7,629	8,382	8,854	8,956
$D_0$ , м/с	1072	878,5	683,5	515	433
$\Delta l/r_0$	13	10,6	8,15	6,1	4,95
$\Delta L/r_0$	61,4	50,3	39	29,2	24,5
$D_H$ , м/с	1102	911	714,5	540,5	454

левую половину решения. Интегральные кривые системы (15) допускают смещение вдоль оси  $X$ , поэтому при  $X = X_e$  фиксируем некоторое значение безразмерного радиуса  $R < R_e$  или  $A^{(re)} = R - R_e$ . Причем  $R(X_e)$  достаточно близко к  $R_e$ , чтобы в области  $X < X_e$  выполнялось линейное решение (17). Используя формулу для  $A^{(se)}$  и конечные соотношения для  $U$ ,  $P$  и  $P_2$  из (15), определяем значения остальных искомых функций в точке  $X = X_e$ . Они дают граничные условия при численном решении нелинейной задачи Коши для системы уравнений (15) в области  $X > X_e$ . Решение ищем до точки  $X = X_l$ , в которой скорость перемещения поверхности пузырьков обратится в нуль ( $S(X_l) = 0$ ), радиус пузырьков примет минимальное значение ( $R(X_l) = R_{\min}^l$ ), а давление жидкости — максимальное ( $P(X_l) = P_{\max}^l$ ).

Предварительный анализ показал, что такое решение не всегда осуществимо. Если при решении (15) для левой ветви при некотором значении  $X$  получается  $S > (3\gamma_1\beta)^{-1}$ , то точки  $X = X_l$ , в которой  $S = 0$ , просто нет. Этот факт приводит к ограничению сверху на величину скорости ДВ. То есть существует такое значение скорости  $\bar{D}_{\max}$ , что при  $\bar{D}_1 > \bar{D}_{\max}$  интегральная кривая, выходящая из конечного равновесного состояния никогда не проходит через точку  $S = 0$ . (Конкретные значения  $\bar{D}_{\max}$  в пузырьковой жидкости с ацетиленокислородными пузырьками приведены в таблице.) Следовательно, собственное число задачи (15)  $\bar{D}$  может находиться только в диапазоне  $\bar{D} \in (\bar{D}_{\min}, \bar{D}_{\max})$ .

Теперь при заданном значении  $\bar{D}_1$  ищем правую половину решения системы (15). Фиксируем при  $X = X_0$  значение безразмерного радиуса  $R < 1$  или  $A^{(r)} = R - 1$ . Значение

$R(X_0)$  должно быть достаточно близко к единице, чтобы в области  $X > X_0$  выполнялось линейное решение (16). Используя формулу для  $A^{(s)}$  и конечные соотношения для  $U$ ,  $P$  и  $P_2$  из (15), определяем значения остальных искомых функций в точке  $X = X_0$ . Они дают граничные условия при численном решении системы (15) в области  $X < X_0$ . Решение осуществляется до точки  $X = X_p$ , в которой радиус пузырьков при сжатии принимает минимальное значение  $R(X_p) = R_{\min}^p$ , а  $S(X_p) = 0$ . Затем проводится сравнение  $R_{\min}^p$  и  $R_{\min}^l$ . Если  $R_{\min}^p > R_{\min}^l$ , то  $\bar{D}_2 \in (\bar{D}_{\min}, \bar{D}_1)$ , иначе  $\bar{D}_2 \in (\bar{D}_1, \bar{D}_{\max})$ . Далее методом деления отрезка пополам находим такую последовательность скоростей  $\bar{D}_i$ , что при  $i \rightarrow \infty$   $|R_{\min}^{p(i)} - R_{\min}^{l(i)}| \rightarrow 0$ . То есть при  $\bar{D} = \bar{D}_{\infty}$  интегральная кривая системы (15) непрерывно проходит из начального равновесного состояния в конечное равновесное состояние и описывает структуру стационарной ДВ в активной пузырьковой среде.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Численное исследование структуры стационарной ДВ в пузырьковой среде выполнено на примере воды с пузырьками стехиометрической ацетиленокислородной смеси ( $C_2H_2 + 2,5 O_2$ ) при следующих значениях физико-химических констант фаз:  $p_0 = 1$  атм,  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_0 = 1500$  м/с,  $n = 7,15$ ;  $\rho_2^0 = 1,238 \text{ кг/м}^3$ ,  $\gamma_0 = 1,33$ ,  $R_* = 0,25$ ,  $B = 10,97$ ,  $\gamma_1 = 1,136$ .

Сначала проанализируем результаты при фиксированном значении объемной концентрации пузырьков  $\alpha_{20} = 0,02$ . Из соотношения (14) находим  $D_{\min} = 464,8$  м/с, а из условия невозможности прохождения через точку

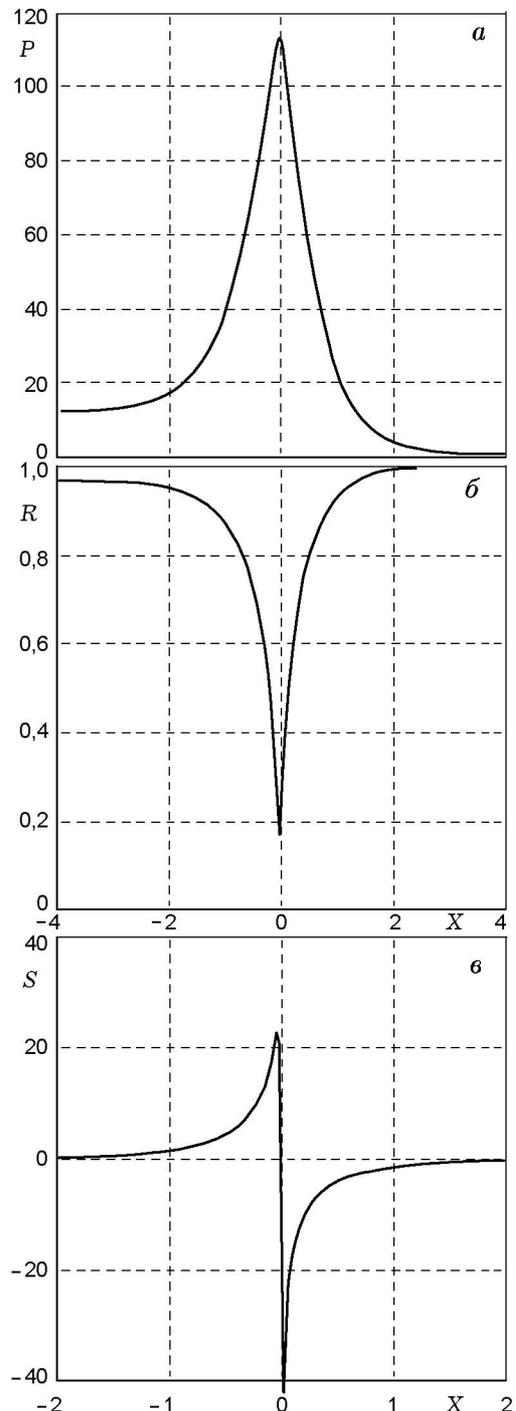


Рис. 1. Структура стационарной пузырьковой ДВ:

*a* — профиль давления  $P$ ; *б* — радиус пузырьков  $R$ ; *в* — скорость движения поверхности пузырьков  $S$  ( $\alpha_{20} = 0,02$ ,  $D_0 = 683,5$  м/с,  $p_0 = 1$  атм)

$S = 0$  интегральной кривой системы (15), выходящей из  $-\infty$ , определяем  $D_{\max} = 695$  м/с. После этого из уравнений (15) по описанному выше алгоритму находим скорость волны  $D_0 = 683,5$  м/с и значения равновесных параметров:  $U_e = 0,024$ ;  $R_e = 0,9652$ ;  $S_e = 0$ ;  $P_e = P_{2e} = 12,391$ . Структура стационарной пузырьковой ДВ (профили давления, радиусы пузырьков, скорости движения их поверхности) представлены на рис. 1. Здесь началу отсчета  $X = 0$  соответствует точка достижения нулевой скорости поверхности пузырьков ( $S(0) = 0$ ), где проводится сшивка левой и правой ветвей интегральных кривых системы (15). В частности, при  $X = 0$  имеем  $R = R_{\min} = 0,1705$ ,  $P = P_{\max} = 112,77$ ,  $P_2 = 4557$ . Видно, что решение для пузырьковой ДВ имеет вид уединенной волны типа одиночного солитона с несовпадающим уровнем давления в начальном и конечном состояниях ( $P(-\infty) \neq P(\infty)$ ), с амплитудой  $\Delta P = P_{\max} - P_0 \approx 112$  и полушириной  $\Delta l = l_p - l_l \approx 8,15 r_0$ . Здесь  $l_p$ ,  $l_l$  — координаты точек, где  $P = P_0 + \Delta P/2$ . Если за характерную ширину солитона  $\Delta L$  принять разность координат, в которых давление в ДВ отличается от  $P(\pm\infty)$  на величину  $P_0$ , то получим  $\Delta L \approx 39 r_0$ .

Из расчетов задачи (15) при варьировании объемной концентрации пузырьков  $\alpha_{20}$  следует, что амплитуда солитона  $\Delta P$  практически не зависит от  $\alpha_{20}$ . Результаты расчетов скорости  $D_0$ , числа Маха  $M_0 = \bar{D}_0/\sqrt{\gamma_0}$  и ширины  $\Delta L$  стационарной ДВ для ряда значений  $\alpha_{20}$  представлены в таблице. Там же приведены минимальные ( $M_{\min} = \bar{D}_{\min}/\sqrt{\gamma_0}$ ) и максимальные ( $M_{\max} = \bar{D}_{\max}/\sqrt{\gamma_0}$ ) значения числа Маха, характеризующие интервал поиска скорости волны.

Видно, что значения  $M_{\min}$ ,  $M_{\max}$ ,  $M_0$  монотонно растут, а  $\Delta l$ ,  $\Delta L$  монотонно убывают ( $\approx \alpha_{20}^{-1/3}$ ) с увеличением  $\alpha_{20}$ . Если жидкость предполагать несжимаемой, то независимо от значения  $\alpha_{20}$  из соотношения (14) получаем  $M_{\min} = 5,874$ , а определенное по критерию работы [11] число Маха ДВ  $M_L = 9,6466$ .

Обозначим через  $E = \frac{3}{2}R^3S^2$  энергию пульсационного движения жидкости. Типичная картина решения системы (15) в фазовой плоскости  $(E, R)$  для пузырьковой ДВ ( $D_0 = 683,5$  м/с) изображена на рис. 2. Там же приведены результаты расчетов энергии пульсационного движения жидкости (при  $D = D_0$ ) без

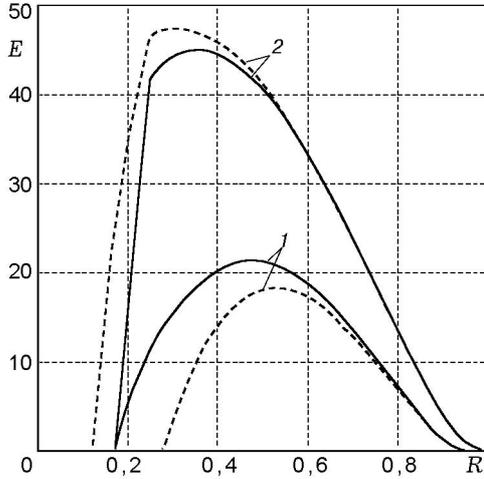


Рис. 2. Зависимость энергии пульсационного движения жидкости от радиуса пузырьков:

$\alpha_{20} = 0,02$ ,  $D_0 = 683,5$  м/с; штриховые линии —  $\beta = 0$ ; 1 — левая половина решения, 2 — правая половина решения

учета акустических потерь ( $\beta = 0$ ). Видно, что в этом случае, во-первых, зависимость  $E(R)$  заметно отличается от варианта с акустическими потерями; во-вторых, при  $E = 0$  имеется разрыв по радиусу пузырьков ( $[R_{\min}] \neq 0$ ), причем  $R_{\min}^p < R_{\min}^l$ . Заметим, что результаты расчета с учетом вязкостной диссипации в воде ( $\mu_1 = 10^{-3}$  кг/(м·с);  $Re > 10^4$  при  $r_0 > 1$  мм) совпадают (с точностью до толщины линий) с вариантом  $\beta = 0$ . Варьированием скорости в диапазоне  $D \in (D_0, 10^3$  м/с) показано, что неравенство  $R_{\min}^p < R_{\min}^l$  сохраняется, т. е. при любом значении скорости  $D$  из указанного интервала  $[R_{\min}] \neq 0$ . Последнее означает, что по модели без акустических потерь или учитывающей только вязкостную диссипацию в жидкости не удается получить решение в виде стационарной ДВ. Этот факт вступает в противоречие с результатами работы [13], где при решении нестационарной задачи об иницировании пузырьковой детонации был «получен» выход на стационарный режим по модели, не учитывающей акустических потерь. Подробный анализ того, решение какой задачи получено в [13], будет проведен в следующем параграфе.

Так как учет акустического излучения пузырьков имеет принципиальное значение при моделировании пузырьковой детонации, рассмотрим степень влияния на скорость ДВ следующего уточнения (приближение Геринга

[16]) при описании акустических потерь. Обобщение уравнения Рэлея (2) для пульсации пузырька в сжимаемой жидкости [16] представимо в виде

$$\frac{de}{dt} = 3r^2 s \left( \frac{\bar{p} - p}{\rho_1^0} \right), \quad e = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{s}{c_0} \right) r^3 s^2, \quad (2')$$

$$\bar{p} = p_2 + \frac{r}{c_0} \left( 1 - \frac{s}{c_0} \right) \frac{dp_2}{dt}.$$

Тогда обобщение стационарной задачи (15) о структуре и скорости ДВ сформулируется следующим образом:

$$P - 1 = \bar{D}^2 [1 - R^3 + \alpha_{10}(1 - f(P))/\alpha_{20}],$$

$$U = \alpha_{20}(P - 1)/\bar{D}, \quad \rho_2/\rho_2^0 = R^{-3},$$

$$P_2 = P_i R^{-3\gamma_i} \quad (i = 0, 1),$$

$$(U - \bar{D}) \frac{dE}{dX} = 3R^2 S [P_2 - P - 3\gamma_i \beta P_2 (1 - \beta S) S], \quad (15')$$

$$(U - \bar{D}) \frac{dR}{dX} = S,$$

$$X \rightarrow +\infty: \quad P = P_2 = 1, \quad S = 0, \quad R = 1,$$

$$X \rightarrow -\infty: \quad P = P_2 = P_e, \quad S_e = 0, \quad R = R_e.$$

Задача (15') решалась аналогично (15). Результаты расчетов скорости стационарной пузырьковой детонации ( $D_H$ ) в постановке (15') приведены в таблице. Приближение Геринга дает увеличение скорости стационарной ДВ, но не более чем на  $3 \div 5$  % по сравнению с постановкой (15).

## СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

Анализ экспериментальных данных [1–3, 18] показал, что при начальном давлении в жидкости  $p_0 = 1$  атм измерения давлений и скорости ДВ не проводилось. Измерения выполнены в вертикальной ударной трубе на глубине  $3,2 \div 4,7$  м от поверхности столба активной пузырьковой среды, что из-за гидростатики и степени добавления глицерина в воду соответствует диапазону  $p_0 \in (1,3 \div 1,5)$  атм. Поэтому расчеты в постановке (15') проведены при тех же исходных условиях, что

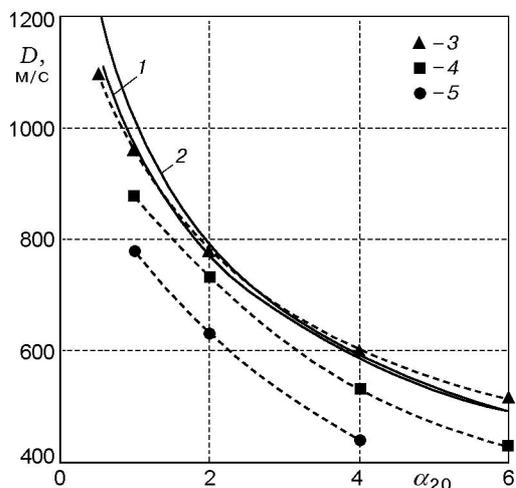


Рис. 3. Зависимости скорости стационарной ДВ от концентрации  $\alpha_{20}$ :

1 —  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $p_0 = 1,3$  атм,  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_0 = 1500$  м/с; 2 —  $\text{H}_2\text{O} + 50\%$  глицерина,  $p_0 = 1,35$  атм,  $\rho_0 = 1130$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_0 = 1700$  м/с; эксперимент [18]; 3 —  $\text{H}_2\text{O} + 50\%$  глицерина; 4 —  $\text{H}_2\text{O} + 25\%$  глицерина; 5 —  $\text{H}_2\text{O}$

эксперименты. Так как в [3] и [18] для пузырьков ацетиленокислородной смеси скорости ДВ заметно различаются (на  $10 \div 15\%$ ), для сравнения были взяты более поздние эксперименты [18]. Скорости стационарной ДВ в зависимости от  $\alpha_{20}$  для пузырьков газовой смеси ацетилена с кислородом ( $\text{C}_2\text{H}_2 + 2,5\text{O}_2$ ) представлены на рис. 3. Видно, что при варьировании состава жидкой фазы расчетные скорости ДВ различаются незначительно. Расчеты для среды  $\text{H}_2\text{O} + 50\%$  глицерина коррелируют (кривая 2) с экспериментами [18]. Однако с уменьшением объемной доли глицерина в воде наблюдается систематическое расхождение данных по скорости: в  $\text{H}_2\text{O} + 25\%$  глицерина — на  $10 \div 15\%$ ; в  $\text{H}_2\text{O}$  — на  $20 \div 30\%$ . Причем расчетные значения скорости стационарной ДВ дают оценку сверху экспериментальным данным.

Объяснение наблюдаемых расхождений при уменьшении объемной доли глицерина заключается в следующем: постановка (15') описывает структуру идеальной ДВ в монодисперсной пузырьковой среде, когда пузырьки газа в любой жидкой фазе, совершая колебания и взрываясь синхронно, остаются сферическими в любой момент времени, а в экспериментах присутствуют факторы неидеальности и несинхронности происходящих процессов, влияющих друг на друга и на ДВ в целом. Из физи-

ческих параметров жидкой фазы при переходе от водоглицериновых растворов к воде наиболее сильно меняется только коэффициент вязкости жидкости  $\mu_1$ . В частности, при переходе от 50%-й смеси воды с глицерином к воде значение  $\mu_1$  уменьшается в 6,8 раза, а число Лапласа  $\text{Lp} = 2r_0\rho_0\Sigma/\mu_1^2$  увеличивается в 43 раза (здесь  $\Sigma$  — поверхностное натяжение жидкости). Как замечено в экспериментах [1–3], уменьшение коэффициента  $\mu_1$  проявляется в несферичности пузырьков и усилении при их сжатии неустойчивости межфазной поверхности. Это приводит к дополнительным потерям в волне детонации за счет увеличения площади межфазной поверхности и роста теплоотвода из газовой фазы, возможного срыва микрокапель жидкости и их испарения в пузырьках, уменьшения роста температуры газа на стадии сжатия пузырьков и, как следствие, срыва воспламенения в части из них.

К сожалению, для выявления детального механизма энергетических потерь невозможно математически строго описать реальную динамику межфазной поверхности в реагирующей пузырьковой среде, включающую зарождение и развитие неустойчивостей, но можно в качестве первого приближения предложить следующий простейший учет неидеальности пузырьковой ДВ. Предположим, что некоторая доля пузырьков  $\alpha_{2*}(\mu_1) < \alpha_{20}$  из-за неустойчивости их поверхности не смогла достичь необходимой для воспламенения газа температуры, и тогда эти пузырьки будут вести себя как пассивная (нерагирующая) газовая добавка. Причем параметр  $\alpha_{2*}(\mu_1)$  возрастает с уменьшением коэффициента вязкости  $\mu_1$ . Математическая формулировка такой стационарной задачи для двухкомпонентной пузырьковой среды и ее анализ требуют специального исследования. Тем не менее из сравнения результатов расчетов и экспериментов [18] (см. рис. 3) следует, что уже в жидкой фазе  $\text{H}_2\text{O} + 50\%$  глицерина  $\alpha_{2*}(\mu_1) \ll \alpha_{20}$ .

Вернемся к постановке задачи (15'). Представляет интерес степень влияния начального давления среды ( $p_0$ ) на скорость пузырьковой детонации. Результаты расчетов скорости детонации (жидкая фаза  $\text{H}_2\text{O} + 50\%$  глицерина) в зависимости от  $p_0$  для ряда значений начальной концентрации  $\alpha_{20}$  представлены на рис. 4. Видно, что с уменьшением  $\alpha_{20}$  и ростом  $p_0$  скорость ДВ монотонно увеличивается. Число Маха стационарной ДВ в диапазонах

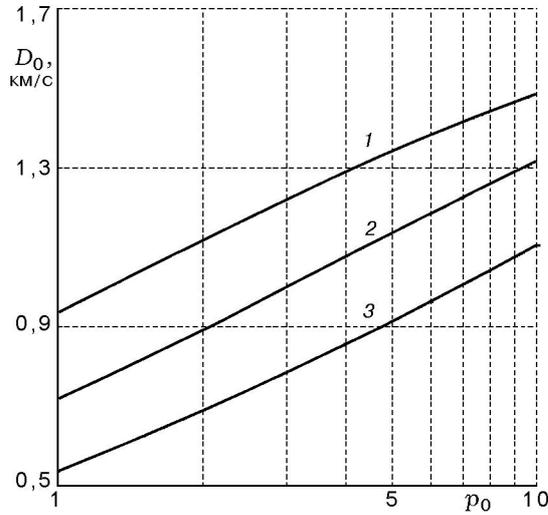


Рис. 4. Зависимости скорости стационарной ДВ от начального давления в пузырьковой среде:

$\alpha_{20}$ : 1 — 0,01; 2 — 0,02; 3 — 0,04

$p_0 \in [1 \div 10]$  атм и  $\alpha_{20} \in [0,01 \div 0,04]$  можно с точностью не хуже 2 % аппроксимировать формулой

$$M_0 = 10,84 - 0,23z^{-1/2}[1 + 3,7z^{1/3} \ln(p_0)],$$

где  $z = \alpha_{20}(1 - \alpha_{20})$ , давление  $p_0$  измеряется в атмосферах.

### НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА

При решении стационарной задачи (15) о детонации в активной пузырьковой среде было установлено, что в модели без акустических потерь, даже с учетом реальной вязкостной диссипации в жидкости, не существует решения в виде стационарной ДВ. Однако в работе [13] при численном решении нестационарной задачи об иницировании пузырьковой детонации по модели без акустических потерь был получен выход на стационарный режим, поэтому представляет интерес проанализировать возникший «парадокс», рассмотрев нестационарную постановку задачи.

Запишем систему уравнений (1)–(5) в безразмерном виде:

$$\bar{\rho}_\tau + (\bar{\rho}U)_\eta = 0,$$

$$(\bar{\rho}U)_\tau + (\bar{\rho}U^2 + P)_\eta = 0,$$

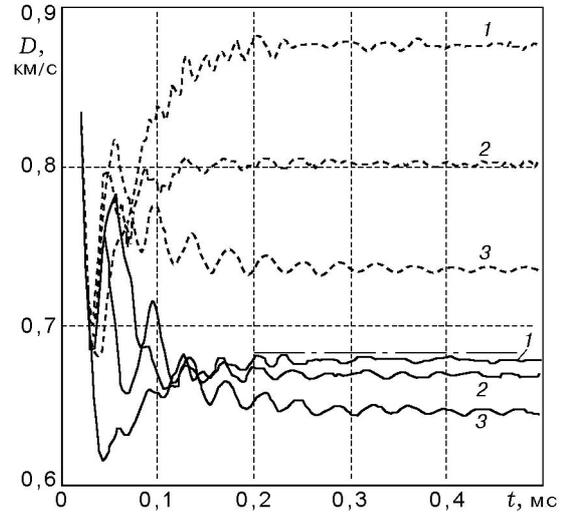


Рис. 5. Динамика скорости пузырьковой ДВ от времени для различных значений шага сетки  $h$ :

$h$ : 1 — 0,025; 2 — 0,05; 3 — 0,1; сплошные линии —  $\beta = 6,71 \cdot 10^{-3}$ , штриховые —  $\beta = 0$ , штрихпунктирная —  $D_0 = 683,5$  м/с

$$R(S_\tau + US_\eta) + \frac{3}{2}S^2 = \bar{P} - P, \quad (18)$$

$$R_\tau + UR_\eta = S,$$

$$\bar{P} = P_2 - (4/\text{Re} + 3\gamma_i R\beta P_2)S/R,$$

$$\bar{N} = \bar{\rho}/(1 - \alpha_{20}), \quad \bar{\rho}_2 = 1/V, \quad \alpha_2 = \alpha_{20}\bar{N}V.$$

Здесь  $\bar{\rho} = \rho/\rho_1^0$ ,  $\bar{\rho}_2 = \rho_2/\rho_2^0$ ,  $U = u/c_*$ ,  $P = p/p_0$ ,  $\bar{N} = N/N_0$ ,  $R = r/r_0$ ,  $V = R^3$ ,  $\tau = tc_*/r_0$ ,  $\eta = x/r_0$ ,  $\beta = c_*/c_0$ ,  $c_* = \sqrt{p_0/\rho_1^0}$ . Начальные и граничные условия для системы (18), а также метод ее численного решения аналогичны [17].

Результаты расчетов динамики скорости ДВ в воде с пузырьками ацетиленокислородной смеси ( $\alpha_{20} = 0,02$ ,  $p_0 = 1$  атм,  $\text{Re} = 10^4$ ) для трех значений шага сетки  $h$  по пространственной переменной  $\eta$  приведены на рис. 5. Видно, что для всех вариантов расчетов примерно через 0,2 мс после начала перемещения поршня в пузырьковую среду наблюдается выход скорости волны  $D$  на почти постоянное значение, зависящее от  $h$ , т. е. от погрешности аппроксимации конечно-разностной схемы. Разница состоит лишь в том, что при учете в математической модели акустического излучения пузырьков ( $\beta \neq 0$ ) с измельчением шага сетки наблюдается (сплошные линии) предельный переход к скорости стационарной детонации  $D_0 = 683,5$  м/с (штрихпунктирная

линия), вычисленной в постановке (15), а при  $\beta = 0$  (штриховые линии) происходит монотонное увеличение (с возрастающим приростом при измельчении шага сетки) скорости волны. Последнее означает, что при численном решении задачи по модели без акустических потерь можно получить любое значение «стационарной» скорости ДВ, варьируя шаг сетки.

Причина наблюдаемого в расчете поведения скорости нестационарной ДВ при  $\beta = 0$  связана с тем, что конечно-разностная схема аппроксимирует иное дифференциальное уравнение пульсационного движения пузырьков, чем уравнение Рэлея для несжимаемой жидкости.

Покажем это на модельном примере. Рассмотрим уравнение Рэлея для единичного пузырька, которое можно записать в следующем безразмерном виде:

$$F' = R \left( P_2 - P_0 - \frac{1}{2} S^2 \right), \quad F = R^2 S. \quad (19)$$

Здесь  $(\prime)$  — полная производная по времени. Учет сжимаемости жидкости в акустическом приближении дает [15, 16] обобщенное уравнение пульсации пузырька — уравнение Келлера

$$F' - \beta R F'' = R \left( P_2 - P_0 - \frac{1}{2} S^2 \right) + O(\beta^2). \quad (20)$$

Теперь запишем конечно-разностную схему для уравнения Рэлея (19):

$$\frac{F(\tau + \Delta\tau) - F(\tau)}{\Delta\tau} = R \left( P_2 - P_0 - \frac{1}{2} S^2 \right). \quad (21)$$

Разложение его в ряд Тейлора по временному шагу  $\Delta\tau$  до членов второго порядка малости дает первое дифференциальное приближение [19]

$$F' + \frac{\Delta\tau}{2R} R F'' = R \left( P_2 - P_0 - \frac{1}{2} S^2 \right) + O(\Delta\tau^2).$$

Сравнение его с уравнением (20) показывает, что конечно-разностная схема (21), в отличие от исходного дифференциального уравнения Рэлея (19), своеобразно «учитывает» сжимаемость среды. Причем коэффициент  $\delta = \Delta\tau/2R$ , в отличие от коэффициента  $\beta$  исходной физической задачи (20), зависит от шага разностной схемы по времени  $\Delta\tau$ . Рассмотренный пример проясняет причину, по которой при численном решении нестационарной задачи (18) в рамках

модели без акустических потерь ( $\beta = 0$ ) нет сходимости при  $h \rightarrow 0$  (соответственно при  $\Delta\tau \rightarrow 0$ ).

Таким образом,

- двухфазные уравнения Иорданского — Когарко содержат стационарное решение для ДВ в химически активных пузырьковых средах при следующих минимальных требованиях к модели: сжимаемость жидкости и учет акустического излучения пузырьков;

- сформулировано правило отбора скорости стационарной ДВ как собственного числа задачи (15) или (15'), при котором интегральная кривая системы обыкновенных дифференциальных уравнений проходит через начальное и конечное равновесные состояния;

- показано, что модель Иорданского — Когарко в адиабатическом приближении и без акустических потерь не содержит стационарного детонационного решения;

- на примере монодисперсных ацетиленокислородных пузырьков рассчитаны скорости и структура уединенной волны в зависимости от начальных объемной концентрации газовой фазы и давления среды.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев А. И., Пинаев А. В. Самоподдерживающаяся детонация в жидкостях с пузырьками взрывчатого газа // ПМТФ. 1986. № 1. С. 133–138.
2. Пинаев А. В., Сычев А. И. Структура и свойства детонации в системах жидкость — пузырьки газа // Физика горения и взрыва, 1986. Т. 22, № 3. С. 109–118.
3. Пинаев А. В., Сычев А. И. Влияние физико-химических свойств газа и жидкости на параметры и условия существования волны детонации в системах жидкость — пузырьки газа // Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23, № 6. С. 76–84.
4. Митрофанов В. В. Детонационные волны в гетерогенных средах: Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1988.
5. Кузнецов Н. М., Копотев В. А. Структура волны и условие Чепмена — Жуге при гетерогенной детонации в жидкостях с пузырьками газа // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 4. С. 850–853.
6. Шагапов В. Ш., Вахитова Н. К. Волны в пузырьковой системе при наличии химических реакций в газовой фазе // Физика горения и взрыва. 1989. Т. 25, № 6. С. 14–22.
7. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. № 3. С. 102–110.

8. **Когарко Б. С.** Об одной модели кавитирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 6. С. 1331–1333.
9. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. II.
10. **Kedrinskii V. K., Mader Ch. L.** Accidental detonation in bubble liquids // Proc. 16th Intern. Symp. on Shock Tube and Waves / H. Groenig (Ed.) 1987. P. 371–376.
11. **Ляпидевский В. Ю.** О скорости пузырьковой детонации // Физика горения и взрыва. 1990. Т. 26, № 4. С. 137–140.
12. **Замараев Ф. Н., Кедринский В. К., Мейдер Ч.** Волны в химически активной пузырьковой среде // ПМТФ. 1990. № 2. С. 20–26.
13. **Троцюк А. В., Фомин П. А.** Модель пузырьковой детонации // Физика горения и взрыва. 1992. Т. 28, № 4. С. 129–136.
14. **Таратута С. П.** Детонация и тепло-массообмен в двухфазных пузырьковых средах. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999.
15. **Кедринский В. К.** Гидродинамика взрыва. Эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
16. **Коул Р.** Подводные взрывы. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
17. **Ждан С. А., Ляпидевский В. Ю.** Детонация в двухслойной пузырьковой среде // Физика гои взрыва. 2002. Т. 38, № 1. С. 123–128.
18. **Сычев А. И.** Влияние размера пузырьков на характеристики волн детонации // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31, № 5. С. 83–91.
19. **Шокин Ю. И., Яненко Н. Н.** Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1985.

*Поступила в редакцию 27/III 2001 г.*

---