

## ТОНКАЯ СТРУКТУРА ПОГРАНИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ В СРЕДАХ С ДИФфуЗИЕЙ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

А. В. Кистович, Ю. Д. Чашечкин

Институт проблем механики РАН, 117526 Москва

Исследуется влияние граничных условий на поверхностях, ограничивающих многокомпонентные стратифицированные среды, на процессы формирования течений в задачах многокомпонентной диффузии и термоконцентрационной конвекции. Приведены точные решения этих задач, анализ которых показывает, что в случае многокомпонентной диффузии формируется несколько пограничных слоев (концентрационные и скоростной), что приводит к декомпозиции физических полей и расщеплению характерных пространственных масштабов. В случае же термоконцентрационной конвекции образуется более сложная динамическая структура, включающая, помимо пограничных слоев, еще и фронты инъекции, существенное влияние которых на характеристики течения проявляется на расстояниях, значительно превышающих толщины пограничных слоев.

С появлением работы [1] возрос интерес к анализу пограничных эффектов в стратифицированных и вращающихся средах. В [2] была построена модель стационарных горных ветров в устойчиво стратифицированных средах. Аналогичные эффекты наблюдаются и на наклонном континентальном склоне океана [3, 4]. Построенные в [2–4] решения описывают пограничное течение с единым масштабом изменчивости всех физических переменных.

Результаты [2–4] не согласуются с точными решениями задачи диффузии около вертикальной или горизонтальной стенок. Асимптотическое решение нестационарной задачи (приближение малых времен) описывает более сложное пограничное течение с расщепленными масштабами изменчивости скорости и плотности [5]. Аналогичные свойства демонстрирует медленное течение Куэтта в наклонном канале [6].

Точное решение нестационарной задачи с расщепленными масштабами изменчивости скорости и плотности построено в [7–9]. Экспериментальные исследования образующегося течения выполнены в [10].

В реальных условиях многокомпонентной среды наблюдается расслоение, обусловленное многокомпонентной диффузией или термоконцентрационной конвекцией [11], в динамике которых важную роль играют пограничные течения [12].

В дальнейшем процессы в изотермической стратифицированной среде с несколькими растворенными веществами именуют *многокомпонентной диффузией* (МКД), а задачу распространения тепла в устойчиво стратифицированной по концентрации (солености) жидкости — *термоконцентрационной конвекцией* (ТКК).

**Постановка задачи.** Рассматривается течение стратифицированной многокомпонентной жидкости над бесконечной наклонной стенкой. Стратификация задается распределением концентрации примесей, для которых стенка является непроницаемой, либо одной примесью и температурой. Рассматривается двумерная задача в приближении Буссинеска [13]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{u} + \rho' \mathbf{g}, \quad \rho' = \beta S \pm \alpha T, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{S} = k_S \Delta S,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{T} = k_T \Delta T, \quad \bar{S} = S + S_0(z), \quad \bar{T} = T + T_0(z), \quad (1)$$

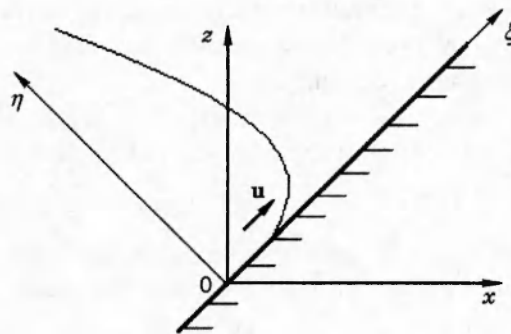
$$S_0(z) = S_{00} \left(1 - \frac{z}{\Lambda_S}\right), \quad T_0(z) = T_{00} \left(1 \mp \frac{z}{\Lambda_T}\right).$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — поле скоростей;  $p$  — давление за вычетом гидростатического;  $S, T$  — возмущения концентраций первой и второй примесей в случае МКД и концентрации соли и температуры в случае ТКК;  $S_0(z), T_0(z)$  — стратифицирующие распределения соответствующих физических полей, причем в случае МКД берутся верхние знаки в соотношениях, а в случае ТКК — нижние;  $\Lambda_S, \Lambda_T$  — масштабы стратификаций;  $\beta, \alpha$  — коэффициенты примесного сжатия (МКД) либо солевого сжатия и температурного расширения (ТКК);  $k_S, k_T, \nu$  — коэффициенты диффузии компонент  $S$  и  $T$  и кинематической вязкости соответственно;  $\rho_0$  — плотность чистой жидкости;  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести.

Начальные условия состоят в равенстве нулю возмущений всех физических полей. Такими же являются и условия на бесконечности.

Граничные условия для случаев МКД и ТКК различаются. Для МКД задается условие равенства нулю на стенке нормальных компонент градиентов полных полей  $\bar{S}$  и  $\bar{T}$ . В случае ТКК на стенке равна нулю только нормальная компонента градиента распределения соли  $S$ , а для температуры принимается условие теплообмена между стенкой и средой, характеризуемого коэффициентом теплоотдачи  $\gamma$ . Граничные условия для поля скоростей  $\mathbf{u}$  состоят в условии прилипания.

В случае общего положения стенка наклонена к горизонту под углом  $\alpha$ , и потому удобно перейти в систему координат  $\xi, \eta$ , связанную со стенкой (см. рисунок).



**Общий метод решения задачи.** Как и в [7], решение ищется в виде разложений в ряды Фурье по углу  $\alpha$ :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin(n\alpha), \quad S = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\alpha), \quad T = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cos(n\alpha), \quad (2)$$

где  $u$  — компонента поля скорости вдоль оси  $\xi$ , а компонента вдоль оси  $\eta$  тождественно равна нулю.

Перед подстановкой (2) в (1) проводится предварительное обезразмеривание переменных согласно правилам

$$t^* = \frac{t}{N}, \quad \eta^* = \left(\frac{N}{\nu}\right)^{1/2} \eta, \quad \epsilon_S = \frac{k_S}{\nu}, \quad \epsilon_T = \frac{k_T}{\nu}, \quad S^* = \beta S, \quad T^* = \mp \alpha T, \quad (3)$$

$$U_n^* = -2(\Lambda g)^{-1/2} U_n, \quad N = \left(\frac{g}{\Lambda}\right)^{1/2}, \quad \Lambda = \frac{\Lambda_S \Lambda_T}{\Lambda_S + \Lambda_T}, \quad G_n^* = S_n^* \pm T_n^*,$$

причем, если какой-либо из масштабов  $\Lambda_S$  или  $\Lambda_T$  равен нулю, то в качестве  $\Lambda$  выбирается оставшийся масштаб. Верхний знак выбирается в случае МКД, нижний — в случае ТКК.

Подстановка (2) в (1) с учетом (3) порождает бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов Фурье в разложениях (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t} - U_1'' &= 2G_0 - G_2, \\ \frac{\partial U_n}{\partial t} - U_n'' &= G_{n-1} - G_{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots, \\ \frac{\partial S_n}{\partial t} - \varepsilon_S S_n'' &= a_S(U_{n+1} - U_{n-1}), \quad U_0 = U_{-1} = 0, \\ \frac{\partial T_n}{\partial t} - \varepsilon_T T_n'' &= a_T(U_{n+1} - U_{n-1}), \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_S = \Lambda/4\Lambda_S$ ,  $a_T = \Lambda/4\Lambda_T$ .

Как и в [8], решение системы (4) затруднено тем, что уравнения «зацепляются» друг за друга. Реализации итерационной процедуры нахождения коэффициентов  $\{U_i\}$ ,  $\{S_i\}$ ,  $\{T_i\}$  предшествует замена переменных. Для того чтобы получить регулярный способ определения таких замен, здесь, как и в [7], находились генераторы группы Ли, соответствующей системе (4), составлялись различные бесконечные линейные комбинации тех генераторов, которые порождают замену переменных  $\{U_i\}$ ,  $\{S_i\}$ ,  $\{T_i\}$ , производилось, как и в [8], суммирование бесконечных расходящихся рядов [14], определяющих коэффициенты при переменных задачи. В результате получались правила замены переменных в (4), обеспечивающие процедуру решения задачи.

Последовательное изложение описанного метода не представляется возможным, поэтому здесь приведен другой способ получения правил замены переменных, который найден на основе проведенного группового анализа.

На первом шаге перехода к новым переменным  $\{V_i\}$ ,  $\{Q_i\}$ ,  $\{R_i\}$  можно воспользоваться известным решением при  $\alpha = 0$  [9]. Из разложений (2) следует

$$T(\alpha = 0) = T_0 + T_1 + T_2 + \dots, \quad S(\alpha = 0) = S_0 + S_1 + S_2 + \dots$$

Значения  $T(0)$ ,  $S(0)$  выбираются в качестве новых переменных  $R_1$ ,  $Q_1$ , разложения которых по  $\{T_i\}$ ,  $\{S_i\}$  записываются в несколько измененном виде

$$R_1 = T_0 + T_2 + T_4 + \dots + T_1 + T_3 + T_5 + \dots, \quad Q_1 = S_0 + S_2 + S_4 + \dots + S_1 + S_3 + S_5 + \dots$$

На втором шаге нужно так скомбинировать уравнения системы (4), чтобы в правой части стояла величина  $Q_1 - R_1$ . Этого можно добиться путем введения переменной

$$V_1 = U_1 + 3U_3 + 5U_5 + 7U_7 + \dots + 2(U_2 + 2U_4 + 3U_6 + 4U_8 + \dots).$$

На третьем шаге необходимо снова обратиться к уравнениям для  $\{Q_i\}$ ,  $\{R_i\}$  и скомбинировать их так, чтобы в правой части стояла величина  $V_1$ , что достигается введением переменной

$$R_2 = T_2 + 4T_4 + 9T_6 + 16T_8 + \dots + 2(T_3 + 3T_5 + 6T_7 + 10T_9 + \dots).$$

Производя поочередно эту операцию с уравнениями (4), получим систему новых переменных:

$$\begin{aligned} R_1 &= T_0 + T_2 + T_4 + \dots + T_1 + T_3 + T_5 + \dots, \\ R_2 &= T_2 + 4T_4 + 9T_6 + 16T_8 + \dots + 2(T_3 + 3T_5 + 6T_7 + \dots), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 + 3U_3 + 5U_5 + 7U_7 + \dots + 2(U_2 + 2U_4 + 3U_6 + \dots), \\ V_2 &= U_3 + 5U_5 + 14U_7 + 30U_9 + \dots + 2(U_4 + 4U_6 + 10U_8 + \dots), \\ &\dots \end{aligned} \tag{5}$$

соотношения для  $\{Q_i\}$  такие же, как и для  $\{R_i\}$ .

Обращение соотношений (5) производится с помощью известного решения при  $\alpha = \pi/2$  [9]  $T(\alpha = \pi/2) = T_0 - T_2 + T_4 - T_6 + \dots$  и с помощью правил

$$\begin{aligned} T_0 &= R_1^{(e)} - R_2^{(e)} + 3R_3^{(e)} - 10R_4^{(e)} + 35R_5^{(e)} - \dots, \\ T_2 &= R_2^{(e)} - 4R_3^{(e)} + 15R_4^{(e)} - 56R_5^{(e)} + \dots, \quad T_4 = \dots, \\ U_1 &= V_1^{(o)} - 3V_2^{(o)} + 10V_3^{(o)} - 35V_4^{(o)} + \dots, \end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned} U_3 &= V_2^{(o)} - 5V_3^{(o)} + 21V_4^{(o)} - \dots, \quad U_5 = \dots; \\ T_1 &= R_1^{(o)} - R_2^{(o)} + 2R_3^{(o)} - 5R_4^{(o)} + 14R_5^{(o)} - \dots, \\ T_3 &= R_2^{(o)} - 3R_3^{(o)} + 9R_4^{(o)} - 28R_5^{(o)} + \dots, \quad T_5 = \dots, \end{aligned} \tag{6b}$$

$$U_2 = V_1^{(e)} - 2V_2^{(e)} + 5V_3^{(e)} - 14V_4^{(e)} + \dots, \quad U_4 = V_2^{(e)} - 4V_3^{(e)} + 14V_4^{(e)} - \dots, \quad U_6 = \dots$$

Подстановка (5) в (4) дает две системы уравнений, связывающих коэффициенты Фурье  $\{V_i^{(e)}\}$ ,  $\{Q_i^{(o)}\}$ ,  $\{R_i^{(o)}\}$  и  $\{V_i^{(o)}\}$ ,  $\{Q_i^{(e)}\}$ ,  $\{R_i^{(e)}\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^{(e)}}{\partial t} - V_n^{(e)''} &= R_n^{(o)} - Q_n^{(o)}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \frac{\partial Q_1^{(o)}}{\partial t} - \varepsilon_S Q_1^{(o)''} &= 0, \quad \frac{\partial Q_n^{(o)}}{\partial t} - \varepsilon_S Q_n^{(o)''} = -a_S V_{n-1}^{(e)}, \end{aligned} \tag{7a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1^{(o)}}{\partial t} - \varepsilon_T R_1^{(o)''} &= 0, \quad \frac{\partial R_n^{(o)}}{\partial t} - \varepsilon_T R_n^{(o)''} = -a_T V_{n-1}^{(e)}, \quad n = 2, 3, \dots; \\ \frac{\partial V_1^{(o)}}{\partial t} - V_1^{(o)''} &= 2(R_1^{(e)} - Q_1^{(e)}), \quad \frac{\partial V_n^{(o)}}{\partial t} - V_n^{(o)''} = R_n^{(e)} - Q_n^{(e)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1^{(e)}}{\partial t} - \varepsilon_S Q_1^{(e)''} &= 0, \quad \frac{\partial Q_n^{(e)}}{\partial t} - \varepsilon_S Q_n^{(e)''} = -a_S V_{n-1}^{(o)}, \\ \frac{\partial R_1^{(e)}}{\partial t} - \varepsilon_T R_1^{(e)''} &= 0, \quad \frac{\partial R_n^{(e)}}{\partial t} - \varepsilon_T R_n^{(e)''} = -a_T V_{n-1}^{(o)}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{7b}$$

Решение уравнений (7) позволит определить коэффициенты разложений (5), а с помощью формул обращений и коэффициенты разложений (2), т. е. получить решение поставленных задач.

В связи с различиями в граничных условиях для случаев МКД и ТКК дальнейшее решение задач производится раздельно.

**Точное решение задачи МКД.** Граничные условия для задачи МКД задаются в виде условия непроницаемости стенки по отношению к примесям

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0$$

и прилипания  $u|_{\eta=0} = 0$ , которые после перехода к переменным  $\{V_i\}$ ,  $\{Q_i\}$ ,  $\{R_i\}$  приобретают вид

$$\begin{aligned} V_n^{(e)} \Big|_{\eta=0} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad Q_n^{(o)'} \Big|_{\eta=0} = R_n^{(o)'} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad n = 2, 3, \dots, \\ Q_1^{(o)'} \Big|_{\eta=0} &= A^{(o)}, \quad R_1^{(o)'} \Big|_{\eta=0} = B^{(o)}, \quad n = 2, 3, \dots, \\ V_n^{(o)} \Big|_{\eta=0} &= Q_n^{(e)'} \Big|_{\eta=0} = R_n^{(e)'} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $A^{(o)}$ ,  $B^{(o)}$  — постоянные величины.

Вводя, как и в [8], переменную  $y = \eta t^{-1/2}$ , являющуюся как одним из групповых инвариантов системы (4), так и стандартной подстановкой в задачах с пограничным слоем, решение задачи (7), (8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} Q_n^{(o)} &= \bar{Q}_n^{(o)} t^{(4n-3)/2}, \quad R_n^{(o)} = \tilde{R}_n^{(o)} t^{(4n-3)/2}, \quad V_n^{(e)} = \tilde{V}_n^{(e)} t^{(4n-1)/2}, \\ Q_n^{(e)} &= 0, \quad \bar{Q}_n^{(o)} = \sum_{m=1}^n K_m^n U \left( w - \frac{1}{2}, \frac{y}{(2\varepsilon_S)^{1/2}} \right) + \sum_{m=1}^{n-1} L_m^n U \left( w - \frac{1}{2}, \frac{y}{2^{1/2}} \right) + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-1} M_m^n U \left( w - \frac{1}{2}, \frac{y}{(2\varepsilon_T)^{1/2}} \right), \\ R_n^{(e)} &= 0, \quad \tilde{R}_n^{(o)} = \sum_{m=1}^n D_m^n U \left( w - \frac{1}{2}, \frac{y}{(2\varepsilon_T)^{1/2}} \right) + \sum_{m=1}^{n-1} E_m^n U \left( w - \frac{1}{2}, \frac{y}{2^{1/2}} \right) + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-1} F_m^n U \left( w - \frac{1}{2}, \frac{y}{(2\varepsilon_S)^{1/2}} \right), \\ V_n^{(o)} &= 0, \quad \tilde{V}_n^{(e)} = \sum_{m=1}^n I_m^n U \left( w + \frac{3}{2}, \frac{y}{2^{1/2}} \right) + \sum_{m=1}^n J_m^n U \left( w + \frac{3}{2}, \frac{y}{(2\varepsilon_S)^{1/2}} \right) + \\ &\quad + \sum_{m=1}^n C_m^n U \left( w + \frac{3}{2}, \frac{y}{(2\varepsilon_T)^{1/2}} \right), \\ w &= 4n - 2m, \quad U(n + 1/2, x) = \frac{1}{\Gamma} \int_x^\infty (\xi - x)^n \exp(-\xi^2/2) d\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты  $K_m^n$ ,  $L_m^n$ ,  $M_m^n$ ,  $D_m^n$ ,  $E_m^n$ ,  $F_m^n$ ,  $I_m^n$ ,  $J_m^n$ ,  $C_m^n$  связаны рекуррентными соотношениями, подобными соотношениям [8]:

$$\begin{aligned} K_1^1 &= \frac{2A^{(o)}}{\sqrt{\pi}}, \quad D_1^1 = \frac{2B^{(o)}}{\sqrt{\pi}}, \quad mK_{m+1}^n = -a_S J_m^{n-1}, \quad mL_{m+1}^n + \frac{1-\varepsilon_S}{2} L_m^n = -a_S I_m^{n-1}, \\ mD_{m+1}^n &= -a_T C_m^{n-1}, \quad mE_{m+1}^n + \frac{1-\varepsilon_T}{2} E_m^n = -a_T I_m^{n-1}, \\ \frac{\varepsilon_S - 1}{2\varepsilon_S} J_n^n &= -K_n^n, \quad mM_{m+1}^n + \frac{1-\varepsilon_S/\varepsilon_T}{2} M_m^n = -a_S C_m^{n-1}, \\ \frac{\varepsilon_T - 1}{2\varepsilon_T} C_n^n &= D_n^n, \quad mF_{m+1}^n + \frac{1-\varepsilon_T/\varepsilon_S}{2} F_m^n = -a_T J_m^{n-1}, \end{aligned}$$

$$mI_{m+1}^n = E_m^n - L_m^n, \quad mJ_{m+1}^n + \frac{\varepsilon_S - 1}{2\varepsilon_S} J_m^n = F_m^n - K_m^n,$$

$$mC_{m+1}^n + \frac{\varepsilon_T - 1}{2\varepsilon_T} C_m^n = D_m^n - M_m^n, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 2, 3, \dots$$

Из граничных условий следуют дополнительные соотношения:

$$\sum_{m=1}^n \frac{2^m (I_m^n + J_m^n + C_m^n)}{\Gamma(2n - m + 3/2)} = 0,$$

$$2^n K_n^n + \sum_{m=1}^{n-1} 2^m (K_m^n + \sqrt{\varepsilon_S} L_m^n + \sqrt{\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_T}} M_m^n) \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(2n - m)} = 0,$$

$$2^n D_n^n + \sum_{m=1}^{n-1} 2^m (D_m^n + \sqrt{\varepsilon_T} E_m^n + \sqrt{\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_S}} F_m^n) \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(2n - m)} = 0,$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

При анализе решения (9) рассматривается типичный случай, когда выполняется соотношение  $\nu > k_S > k_T$ . Из (9) и структуры функции  $U$  следует, что все пространство-время можно разделить на четыре области, характерный масштаб которых задается неравенствами:

$$1. \infty > y > \sqrt{2}; \quad 2. \sqrt{2} > y > \sqrt{2\varepsilon_S}; \quad 3. \sqrt{2\varepsilon_S} > y > \sqrt{2\varepsilon_T}; \quad 4. \sqrt{2\varepsilon_T} > y > 0.$$

Дальнейший анализ пространственно-временных областей удобно проводить, вернувшись к физическим переменным  $\eta$  и  $t$ . Тогда вдали от стенки при  $\infty > \eta > \sqrt{2\nu t}$  все возмущения малы.

В промежуточной области  $\sqrt{2\nu t} > \eta > \sqrt{2k_S t}$  возмущения скорости достигают максимального значения, а вариации плотности малы. Эту область можно назвать динамическим (или скоростным) пограничным слоем, толщина которого  $\delta_u = O(\sqrt{2\nu t})$ .

В третьей области  $\sqrt{2k_S t} > \eta > \sqrt{2k_T t}$  вариации скорости менее значительны, чем во второй, а возмущения первой примеси  $S$  достигают максимального значения, в то время как возмущения второй примеси  $T$  существенно меньше. Эту область можно назвать первым концентрационным (или плотностным) пограничным слоем толщиной  $\delta_{\rho_1} = O(\sqrt{2k_S t})$ .

В четвертой области  $\sqrt{2k_T t} > \eta > 0$ , непосредственно прилегающей к наклонной стенке, возмущения скорости становятся еще менее значимыми, вариации концентрации первой примеси уменьшаются, а вариации концентрации второй примеси достигают максимального значения. Эта область называется вторым концентрационным пограничным слоем, толщина которого  $\delta_{\rho_2} = O(\sqrt{2k_T t})$ .

Таким образом, в задаче МКД присутствует явное расщепление масштабов, на которых происходят наиболее существенные вариации различных физических полей.

**Точное решение задачи установления ТКК.** В случае термоконцентрационной конвекции граничные условия изменяются:

$$u|_{\eta=0} = 0, \quad \left\{ k_H \frac{\partial H}{\partial \eta} + \gamma_H (H - H_{00}) \right\} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad H = \begin{cases} S, \\ T \end{cases}$$

( $\gamma_S, \gamma_T$  — коэффициенты соле- и температуротдачи поверхности).

Эти граничные условия при переходе к переменным  $\{V_i\}, \{Q_i\}, \{\tilde{h}_i\}$  видоизменяются:

$$V_n^{(i)} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad Q_n^{(i)'} + \gamma_S Q_n^{(i)} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$Q_1^{(o)'} + \gamma_S Q_1^{(o)} \Big|_{\eta=0} = A^{(o)}, \quad Q_1^{(e)'} + \gamma_S Q_1^{(e)} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (10)$$

$$R_1^{(i)'} + \gamma_T R_1^{(i)} \Big|_{\eta=0} = B^{(i)}, \quad R_n^{(i)'} + \gamma_T R_n^{(i)} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad n = 2, 3, \dots,$$

где  $(i)$  — это либо  $(e)$ , либо  $(o)$ .

В (10) умышленно использовано не условие непротекания соли, а условие солеобмена с плоскостью, характеризуемой коэффициентом солеотдачи  $\gamma_S$ . Ниже показано, как решение (7), (10) гладко переходит в решение задачи с условием непротекания для соли при  $\gamma_S \rightarrow 0$ , и приведено решение более общей задачи.

В рассматриваемой задаче удобно ввести новые переменные, которые найдены на основе группового анализа уравнений (7) после приведения граничных условий (10) к однородному виду:

$$y = \frac{\eta}{2t^{1/2}}, \quad y_S = \frac{\eta}{2(\varepsilon_S t)^{1/2}}, \quad y_T = \frac{\eta}{2(\varepsilon_T t)^{1/2}}, \quad z_S = y_S - \gamma_S (\varepsilon_S t)^{1/2}, \quad z_T = y_T - \gamma_T (\varepsilon_T t)^{1/2}.$$

Решения (7), (10) имеют вид

$$Q_n^{(o)} = \tilde{Q}_n^{(o)} t^{2(n-1)}, \quad \tilde{Q}_n^{(o)} = \sum_{m=1}^n K_m^n I(w-1, y_S, z_S) + \sum_{m=1}^{n-1} L_m^n I(w-1, y_T, z_T) + \sum_{m=1}^{n-1} M_m^n I(w-2, y),$$

$$R_n^{(o)} = \tilde{R}_n^{(o)} t^{2(n-1)}, \quad \tilde{R}_n^{(o)} = \sum_{m=1}^n D_m^n I(w-1, y_T, z_T) + \sum_{m=1}^{n-1} E_m^n I(w-1, y_S, z_S) + \sum_{m=1}^{n-1} F_m^n I(w-2, y), \quad (11)$$

$$V_n^{(e)} = \tilde{V}_n^{(e)} t^{2n-1}, \quad \tilde{V}_n^{(e)} = \sum_{m=1}^n I_m^n I(w, y) + \sum_{m=1}^n J_m^n I(w+1, y_S, z_S) + \sum_{m=1}^n C_m^n I(w+1, y_T, z_T),$$

где  $w = 4n - 2m$ , а функция  $I(w, y, z)$  определяется соотношением

$$I(w, y, z) = \exp(-y^2) (\exp(y^2) i^w \operatorname{erfc}(y) + \exp(z^2) i^w \operatorname{erfc}(z)),$$

$$I(w, y) = i^w \operatorname{erfc}(y), \quad i^k \operatorname{erfc}(x) = \int_x^\infty i^{k-1} \operatorname{erfc}(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Введенная функция  $I(n, y, z)$ , которую можно назвать эталонным интегралом, является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + 2y \frac{\partial I}{\partial y} - 2z \frac{\partial I}{\partial z} - 2nI = 0.$$

Структура решений для  $V_n^{(o)}$ ,  $Q_n^{(z)}$ ,  $R_n^{(e)}$  полностью аналогична структуре (11) и потому не приводится. Коэффициенты  $K_m^n$ ,  $L_m^n$ ,  $M_m^n$ ,  $D_m^n$ ,  $E_m^n$ ,  $F_m^n$ ,  $I_m^n$ ,  $J_m^n$ ,  $C_m^n$  разложений (11) и коэффициенты разложений для  $V_n^{(o)}$ ,  $Q_n^{(z)}$ ,  $R_n^{(z)}$  определяются путем рекуррентных соотношений, получающихся в результате подстановки решений в (7), (10), и совпадают



с соотношениями (9) для задачи МКД, кроме соотношений, вытекающих из граничных условий:

$$\begin{aligned}
 K_1^1 &= \sqrt{\pi \varepsilon} A^{(n)} / (\sqrt{\pi} - \gamma_S \sqrt{\varepsilon}), & D_1^1 &= \sqrt{\pi \varepsilon_T} B^{(n)} / (\sqrt{\pi} - \gamma_T \sqrt{\varepsilon_T}), \\
 \sum_{m=1}^n K_m^n (\Phi(\varepsilon_S, 0) - \gamma_S \Phi(\varepsilon_T, 1/2)) &+ \sum_{m=1}^{n-1} L_m^n (\Phi(\varepsilon_T, 0) - \gamma_S \Phi(\varepsilon_S, 1/2)) + \\
 &+ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{M_m^n}{2^{4n-2m}} \frac{2 - \gamma_S}{\Gamma(2n - m)} = 0, \\
 \sum_{m=1}^n \frac{I_m^n}{2^{4n-2m} \Gamma(2n - m + 1)} &+ \sum_{m=1}^n \frac{J_m^n + C_m^n}{2^{4n-2m-1} \Gamma(2n - m + 3/2)} = 0, \\
 \sum_{m=1}^n D_m^n (\Phi(\varepsilon_T, 0) - \gamma_T \Phi(1, 1/2)) &+ \sum_{m=1}^{n-1} E_m^n (\Phi(\varepsilon_T, 0) - \gamma_T \Phi(1, 1/2)) + \\
 &+ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{F_m^n}{2^{4n-2m}} \frac{2 - \gamma_T}{\Gamma(2n - m)} = 0, \\
 \Phi(\lambda, x) &= \frac{2^{2n-4m}}{\sqrt{\lambda} \Gamma(2n - m - x)}.
 \end{aligned}$$

Как и в случае МКД, решения для ТКК характеризуются расщепленными динамическим, плотностным и температурным масштабами. В то же время в течении присутствуют два новых масштаба, характеризующие степень соле- и температуротдачи поверхности плоскости, а сама динамика течения отличается от случая МКД.

**Анализ свойств полученных решений.** Для подробного рассмотрения аналогии и различия в течениях для случаев МКД и ТКК вводится понятие «фронта пограничного слоя». Положение этого фронта определяется соотношением  $\eta/\sqrt{2kt} = \text{const } k$ , где  $k$  — кинетический коэффициент, отвечающий пограничному слою.

Скорость распространения фронта определяется соотношением

$$v_k = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \text{const } k \sqrt{k/2t}. \tag{12}$$

Из (12) видно, что отношения скоростей распространения фронтов динамического и плотностных пограничных слоев неизменны в течение всего процесса формирования и развития течения. Таким образом, в процессе МКД течение самоподобно с точки зрения пространственного проявления внутренних масштабов течения.

В случае ТКК, помимо трех вышеупомянутых фронтов, в течении присутствуют и два фронта инъекции соли и температуры. Если коэффициент солеотдачи поверхности равен нулю, то имеется только один фронт инъекции температуры. Положение фронтов инъекции определяется соотношениями  $z_S = \text{const } S$ ,  $z_T = \text{const } T$ , на основании чего можно определить скорости распространения этих фронтов:

$$v_H = \text{const } H \sqrt{k_H/2t} + \sqrt{2} \gamma_H k_H, \quad H = \begin{cases} S, \\ T. \end{cases} \tag{13}$$

Из (12) и (13) видно, что отношения скоростей фронтов инъекции и скоростей фронтов пограничных слоев не являются постоянными величинами. Более того, если с течением времени скорости распространения фронтов пограничных слоев стремятся к нулю  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_k = 0$ , то значения скоростей фронтов инъекции выходят на постоянные значения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_H = \sqrt{2} \gamma_H k_H, \quad H = \begin{cases} S, \\ T. \end{cases}$$



Зависимость расстояния между передней границей фронта и вертикальным нагревателем от времени в устойчиво стратифицированном солевом растворе определена в [15]. На начальном этапе размеры области прогретой жидкости растут пропорционально  $\sqrt{t}$ , что соответствует рассчитанной скорости фронта, которая пропорциональна  $\sqrt{1/t}$ .

Если в начале развития течения какой-либо из фронтов пограничного слоя опережает фронты инъекции, то со временем он обгоняет все пограничные фронты и изменяет соотношения между внутренними масштабами течения. Это явление наблюдалось экспериментально в опытах по конвекции от нагретой наклонной плоскости [16].

ТКК-течение, в отличие от МКД-течения, не является самоподобным, расстояния между фронтами и их относительное расположение изменяются. В то же время на больших временах имеет место частичная автомодельность течения. Это означает, что сохраняются взаимные положения фронтов инъекции и взаимные положения фронтов пограничных слоев. При этом ТКК-течение обладает более сложной внутренней структурой, которая к тому же меняется во времени.

Выявленные различия в структуре и динамике МКД- и ТКК-течений указывают на то, что прямое перенесение результатов исследований процессов МКД на процессы ТКК не обоснованно, особенно для развитых течений. Частичная аналогия имеет место только на малых временах, когда фронты инъекции еще только формируются и не оказывают существенного влияния на структуру течения.

Необходимо отметить, что справедливость линейного приближения при анализе конвективных структур весьма ограничена в случае термоконцентрационной конвекции и в реальных ситуациях различия между процессами МКД и ТКК еще более сильные.

**Заключение.** Проведенные исследования влияния граничных условий показали, что в случае МКД основной чертой течений является возникновение нескольких пограничных слоев (плотностных и скоростного), что приводит к декомпозиции физических полей задачи и расщеплению характерных пространственных масштабов. В случае ТКК формируется более сложная динамическая структура, характеризующаяся, помимо пограничных слоев, еще и фронтами инъекции, наибольшее влияние которых проявляется на расстояниях, существенно превышающих толщины пограничных слоев.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-05-64004).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Munk W. H. Abyssal recipes // Deep Sea Res. 1966. V. 13. P. 707–730.
2. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. Гл. 5. С. 507–511.
3. Phillips O. M. On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid // Deep Sea Res. 1970. V. 17, N 2. P. 435–443.
4. Wunsch C. On oceanic boundary mixing // Ibid. P. 293–301.
5. Linden P. F., Weber J. E. The formation of layers in a double-diffusive system with sloping boundary // J. Fluid Mech. 1977. V. 81, pt 4. P. 757–773.
6. Байдулов В. Г., Чашечкин Ю. Д. Влияние диффузионных эффектов на пограничные течения в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29, № 5. С. 666–671.
7. Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д. Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно-стратифицированной жидкости. М., 1993 (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 523).

8. **Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д.** Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно-стратифицированной среде // Докл. РАН. 1992. Т. 325, № 4. С. 833–837.
9. **Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д.** Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно-стратифицированной среде // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 4. С. 50–56.
10. **Phillips O. M., Shyu J.-H., Salmun H.** An experiment on boundary mixing: mean circulation and transport rates // J. Fluid Mech. 1986. V. 173. P. 473–499.
11. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
12. **Kerr O. S.** Double-diffusive instabilities at a sloping boundary // J. Fluid Mech. 1991. V. 225. P. 333–354.
13. **Океанология.** Физика океана. Т. 1. Гидрофизика океана / Отв. ред. В. М. Каменкович, А. С. Монин. М.: Наука, 1978.
14. **Харди Г.** Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностр. лит., 1951.
15. **Попов В. А., Чашечкин Ю. Д.** О структуре термоконцентрационной конвекции в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1976. Т. 12, № 11. С. 1191–1200.
16. **Левицкий В. В., Чашечкин Ю. Д.** Термоконцентрационная конвекция при однородном боковом нагреве // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 5. С. 112–124.

*Поступила в редакцию 19/XII 1996 г.,  
в окончательном варианте — 28/IV 1997 г.*

---