

6. Launder B. E., Jones W. P. Sink flow turbulent boundary layers.— J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 4.
7. Blackwelder R. F., Kovaszny L. S. G. Large-scale motion of a turbulent boundary layer during relaminarization.— J. Fluid Mech., 1972, vol. 53, pt 1.
8. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости.— Изв. АН СССР. Сер. физическая, 1942, т. 6, № 1—2.
9. Prandtl L. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz.— Nachrichten von der Acad. der Wissenschaften in Göttingen, 1945, S. 6.
10. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— ДАН СССР, 1941, т. 30, № 4.
11. Давыдов Б. Н. К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости.— ДАН СССР, 1961, т. 136, № 1.
12. Jones W. P., Launder B. E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence.— Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1972, vol. 15, pt 2.
13. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. Rept/NACA, 1954, N 1174.
14. Klebanoff P. S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. Rept/NACA, 1955, N 1247.
15. Bradshaw P. The turbulence structure of equilibrium boundary layers.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 29, pt 4.
16. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: ИЛ, 1959.
17. Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1967.
18. Hanjalic K., Launder B. E. Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence.— J. Fluid Mech., 1976, vol. 74, pt 4.
19. Хицце И. О. Турбулентность. Ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила 21/II 1984 г.

УДК 536.516

## ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ ЯЧЕЙКА, В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ ПРИ НАГРЕВЕ СВЕРХУ

Ю. В. Саночкин  
(Москва)

Задача о термокапиллярной конвекции, развивающейся в тонком слое неподвижной жидкости, локально нагреваемом сверху, рассмотрена в [1] в приближении постоянной толщины слоя. Полученное в [1] для больших чисел Марангони ( $M \gg 1$ ) точное решение уравнений капиллярной конвекции позволило определить ее скорость и размер конвективной ячейки. В [2] решение [1], справедливое для жидкостей с числом Прандтля  $Pr \geq 1$ , обобщено на случай жидких металлов ( $Pr < 1$ ). В [3] задача [1] рассмотрена в строгой постановке — с учетом кривизны свободной поверхности жидкости. Это позволило выявить влияние силы тяжести и деформации поверхности на структуру ячейки и определить область применимости простого аналитического решения [1, 2]. На основании результатов [1—3] в [4] предложена динамическая термокапиллярная модель катодного пятна вакуумной дуги, в которой удалось связать высокие скорости его перемещения по поверхности электрода с высокими скоростями конвективного переноса тепла.

Представляет интерес рассмотреть задачу о стационарной термокапиллярной конвекции в тонком горизонтальном слое движущейся жидкости при локальном нагреве ее сверху.

Как и в [1], ограничимся рассмотрением плоской модели для случая  $M \gg 1$ . Если жидкость неподвижна, то по разные стороны от линии нагрева образуются две симметричные термокапиллярные ячейки. Движение жидкости, инициируемое капиллярной силой, охватывает конечную длину — длину ячейки  $l \approx hM^{1/2} \gg h$ , где  $h$  — толщина слоя. Максимальная скорость течения развивается на поверхности и равна

$$v_e \approx (\alpha' \Delta T \chi / h \eta)^{1/2},$$

где  $\alpha' = -d\alpha/dT$ ;  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $\Delta T = T_0 - T_1$  — перепад температуры в начальном сечении;  $\chi$  — температуропроводность;  $\eta$  — динамическая вязкость. Согласно [1], интенсивность вихря характеризуется следующим объемным (на единицу длины)

расходом циркулирующей жидкости:

$$Q_c \simeq 0,15(h\alpha' \Delta T \chi / \eta)^{1/2} = 0,15 \chi M^{1/2}.$$

Возникает вопрос, сохранится ли ячеистая структура конвекции в случае, когда слой нагреваемой сверху жидкости движется и имеет расход  $Q \neq 0$ . Ячейка со стороны набегающего потока может сохраниться, по крайней мере, если  $Q \leq Q_c$ . Ее структура изменится, но можно ожидать, что в этом случае ее длина сократится несильно и по-прежнему для описания конвекции можно применять приближение пограничного слоя. Ячейка с другой стороны от линии нагрева, вообще говоря, может разрушиться, так как жидкие частицы из места нагрева могут уходить на бесконечность. Задача будет решаться в приближении постоянной толщины слоя. Это оправдано, если [3]

$$(\alpha' \Delta T / \rho g h^2) \leq 1,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение силы тяжести. Пусть слой жидкости ограничен свободной поверхностью  $y = 0$  и дном кюветы  $y = -h$ . Направим ось  $x$  против градиента температуры вдоль слоя. Для жидкости с числом Прандтля  $Pr \geq 1$  исходная система уравнений и граничных условий имеет вид [1]

$$(1) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} - \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

$$(2) \quad v_x(x, -h) = v_y(x, -h) = 0, \quad T(x, -h) = T_1, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0,$$

$$\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{d\alpha}{dx} - \alpha' \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=0}.$$

Последнее равенство в (2) выражает непрерывность тензора напряжений на свободной поверхности. Кинематическое условие на свободной поверхности в рассматриваемом случае сводится к требованию  $v_y(x, 0) = 0$  и, как будет видно из решения, выполняется автоматически. Из уравнения неразрывности с учетом (2) следует интеграл

$$(3) \quad \int_{-h}^0 v_x dy = Q = \text{const.}$$

Для ячейки со стороны набегающего потока  $Q < 0$ , для потока по другую сторону от места нагрева  $Q > 0$ . Интегрируя уравнения движения и неразрывности с учетом (3), находим выражения для скорости

$$(4) \quad v_x = -\frac{3\alpha'}{4h\eta} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{y=0} G'(y) - \frac{3Q}{2h^3} (y^2 - h^2), \quad v_y = \frac{3\alpha'}{4h\eta} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{y=0} G(y),$$

где  $G = (1/3)y(y+h)^2$ . Введем безразмерные переменные  $\theta = (T - T_1)/\Delta T$ ,  $x' = x/h$ ,  $y' = y/h$ . Подставляя (4) в уравнение переноса тепла в жидкости, имеем (штрихи в дальнейшем опускаются)

$$(5) \quad \left[ -G' \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_0 + q(1 - y^2) \right] \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_0 \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{4}{3M} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2},$$

где  $q = 2Q\eta/\alpha' \Delta T h$ . При  $q = 0$  уравнение (5) имеет точное частное решение [1], описывающее термокапиллярную ячейку, причем ее длина определяется из линейной одномерной спектральной задачи. При  $q \neq 0$  переменные не разделяются и найти точное решение в явном виде не удается. Для получения приближенного решения (5) разложим  $\theta$  в ряд по  $y$  и отбросим члены  $\sim y^3$  и выше. Тогда, удовлетворяя (2), приходим к параболической аппроксимации профиля температуры поперек слоя

$$(6) \quad \theta \simeq X(x)(1 - y^2) = X\Phi.$$

Как будет показано ниже, для приближенного анализа структуры ячейки со стороны набегающего потока аппроксимация (6) оказывается достаточной. Подставив (6) в (5), из требования ортогональности остатка уравнения к  $\Phi$  получим дифференциальное уравнение для определения  $X$ . Указанный прием, подобный процедуре вывода уравнений Галеркина, позволяет найти зависимость решения от  $x$  в явном виде. Вместо  $\Phi$  в (6) можно взять полином более высокого порядка или, например, точную собственную функцию невозмущенной задачи. При этом в уравнении для  $X$  изменятся численные коэффициенты, но ни его структура, ни, самое главное, его решение на физическом уровне строгости не изменятся. Однако это вряд ли целесообразно делать, так как решение представимо в виде (6) только с точностью до членов  $\sim y^2$  включительно.

Опуская выкладки, выпишем уравнение для  $X$ :

$$(7) \quad XX'' + 2X'^2 - \mu X' - AX = 0,$$

где

$$(7') \quad \mu \simeq 28,8q, \quad A = 10\bar{h}^2/l_0^2, \quad l_0 \simeq 0,3h\sqrt{M}.$$

Требуется найти ограниченное (с ограниченной 1-й и 2-й производными) решение (7), удовлетворяющее условию  $X(0) = 1$ . Параметр  $\mu$  входит в (7) регулярно. Считая его малым, воспользуемся теорией возмущений

$$X = X_0 + \mu X_1 + \mu^2 X_2 + \dots$$

Как будет видно из дальнейшего, фактическим параметром разложения является отношение  $Q/Q_c$ . При скоростях набегающего потока  $v < v_c$  указанный параметр мал. Решение уравнения для  $X_0$ , удовлетворяющее поставленным условиям, имеет вид

$$(8) \quad X_0 = (1 \pm x/l_0)^2.$$

Для случая убывающей с ростом  $x$  температуры надо брать решение (8) со знаком минус. Это выражение совпадает по форме с точным решением [1]. Согласно (8), величина  $l_0$  имеет смысл характерного линейного размера ячейки, точнее, равна длине ячейки при  $\mu = 0$ . (Заметим, что численный коэффициент 0,3, входящий в определение  $l_0$  (7'), неплохо согласуется с коэффициентом 0,52, полученным в более точном расчете [1]. Это свидетельствует в пользу выбранной аппроксимации (6).) При вычислении следующих членов разложения удобно использовать новую независимую переменную  $\xi = 1 - x/l_0$ . Тогда уравнение для  $X_1$  записывается следующим образом:

$$\xi^2 X_1'' + 8\xi X_1' - 8X_1 + \frac{2l_0}{h}\xi = 0, \quad X_1(1) = 0.$$

Его имеющее физический смысл решение таково:

$$(9) \quad X_1 = -\frac{2l_0}{9h}\xi \ln|\xi|.$$

Опуская выкладки, приведем уравнение для  $X_2$  и его решение:

$$(10) \quad \xi^2 X_2'' + 8\xi X_2' - 8X_2 + \frac{2l_0^2}{(9h)^2}(\ln|\xi| + 4\ln^2|\xi| - 5) = 0,$$

$$X_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{l_0}{9h}\right)^2(1 - \xi) + \left(\frac{l_0}{9h}\right)^2(\ln^2|\xi| + \ln\xi^2).$$

Согласно (9), (10), истинным параметром разложения решения, как упоминалось выше, является величина

$$\varepsilon = \mu l_0/9h \simeq 0,29Q/Q_c.$$

Для упрощения записи приведем результаты анализа решения в линейном по  $\varepsilon$  приближении. Второе приближение дает количественные поправки, не меняя характера распределений. Для нахождения корней (оп-

ределения длины, ячейки) решение следует записать в виде

$$(11) \quad X = (\xi - \varepsilon \ln |\xi|)^2.$$

Это выражение с точностью до величин  $\sim \varepsilon^2$  совпадает с сум-

мой (8), (9). Из (11) видно, что при  $\varepsilon < 0$  имеется двукратный корень  $\xi = \xi_1$  ( $0 < \xi_1 < 1$ ). На отрезке  $\xi_1 \leq \xi \leq 1$  члены разложения  $X$  и их производные суть гладкие функции. Иными словами, решение (11) на указанном интервале описывает термокапиллярную ячейку, образующуюся в жидкости со стороны набегающего потока. Если  $\varepsilon > 0$ , то (11) имеет корень  $-1 < \xi_2 < 0$ . В этом случае решение на интервале  $\xi_2 < \xi < 1$  оказывается сингулярным и не имеет физического смысла, т. е. для описания картины конвекции вниз по потоку от источника тепла необходим более строгий анализ. Ограничимся в дальнейшем рассмотрением первого случая ( $\varepsilon < 0$ ).

В точке  $\xi = \xi_1$  возмущение температуры жидкости источником исчезает, т. е. величина  $\Delta \xi = 1 - \xi_1$  представляет безразмерную (в единицах  $l_0$ ) длину термокапиллярной ячейки. Зависимость  $\Delta \xi$  от  $\varepsilon$  представлена в таблице, откуда видно, что с ростом  $|\varepsilon|$  темп сокращения длины ячейки уменьшается. Подставляя (11) в (4), находим окончательные выражения для поля скоростей:

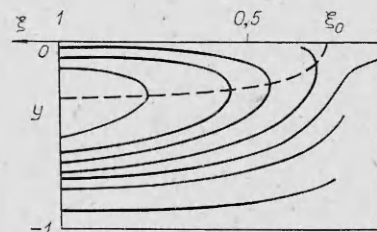
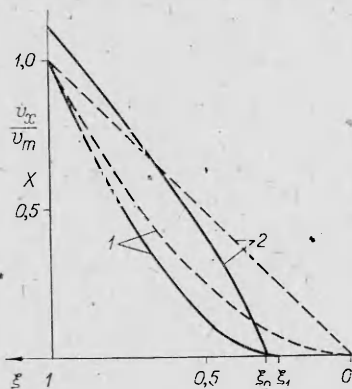
$$(12) \quad v_x/v_m = (\xi + |\varepsilon| \ln \xi) \left(1 + \frac{|\varepsilon|}{\xi}\right) (1+y)(1+3y) - 0,47 |\varepsilon| (1-y^2),$$

$$v_y/v_m = \frac{h}{l_0} \left(1 + \frac{|\varepsilon|}{\xi}\right) y(1+y)^2.$$

Здесь  $v_m = 1,66v_c$  — максимальная скорость на свободной поверхности в начальном сечении.

Как видно из (12), движение жидкости представляет собой наложение термокапиллярного вихря и течения Пуазейля. Остановимся на следующем обстоятельстве. При  $\varepsilon = 0$  на границе ячейки  $\xi_1 = 0$  вместе с  $X$  и  $X'$  обращается в нуль горизонтальная компонента скорости и, следовательно, полный поток тепла от источника. Для  $\varepsilon \neq 0$ , согласно (12),  $v_x$  обращается в нуль при  $\xi = \xi_0 > \xi_1$ . Величины  $\xi_0 - \xi_1$  и  $X(\xi_0)$  малы. Например, для  $\varepsilon = -0,2$  имеем  $\xi_0 \simeq 0,298$ ,  $\xi_1 \simeq 0,265$ ,  $X(\xi_0) \simeq 0,003$  и  $\xi_0 - \xi_1 \rightarrow 0$  при  $|\varepsilon| \rightarrow 0$ . Делать из различия  $\xi_0$  и  $\xi_1$  выводы и вообще рассматривать детали картины конвекции вблизи границы ячейки в рамках принятого подхода нецелесообразно. Чтобы пояснить это, остановимся на вопросе о законности применения к описанию ячейистой конвекции приближения пограничного слоя. Согласно (12),  $v_y$  является величиной  $\sim (h/l_0)v_m$ . Условие  $v_y \ll v_x$  может нарушаться только в окрестности линии, где  $v_x = 0$ . Из (12) видно, что  $v_y \sim v_x$  в полосе шириной  $\Delta y \sim h/l_0$  около указанной линии. В этой области малых (относительно  $v_m$ ) скоростей движения должны использоваться уравнения Навье — Стокса. По-

$ \varepsilon $	0	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3
$\Delta \xi$	1	0,966	0,889	0,825	0,735	0,669



Ф и г. 2

Ф и г. 1

сколькx ее размер мал ( $\sim M^{-1/2}$ ) по сравнению с площадью ячейки, можно думать, что погрешность, вносимая от использования в указанной области неточных уравнений, будет мала при описании свойств ячейки в целом. Однако это, вообще говоря, не так, если речь идет о структуре переходной области между ячейкой и невозмущенным потоком. Предельное значение координаты, где  $v_x = 0$ , есть точка  $\xi = \xi_0$ . Поэтому имеет смысл рассматривать полученное решение только при  $\xi \geq \xi_0$ .

Для заданного перепада температуры из-за сокращения длины ячейки при  $\varepsilon \neq 0$  увеличивается градиент коэффициента поверхностного натяжения и, следовательно, касательное напряжение на свободной поверхности. Поэтому скорость конвекции также увеличивается. Сказанное иллюстрируется фиг. 1, где кривые 1 — распределение температуры ( $\varepsilon = 0$  — штриховая линия,  $\varepsilon = -0,2$  — сплошная линия), кривые 2 — соответствующие распределения  $v_x/v_m$  на свободной поверхности. В движущейся жидкости наблюдается более крутой спад температуры и скорости конвекции с удалением от начального сечения, чем по параболическому и линейному законам, соответственно при  $\varepsilon = 0$ . На фиг. 2 в осях  $(\xi, y)$  построены линии тока, вычисленные по (12) для  $\varepsilon = -0,2$ . Штрихами нанесена линия, на которой  $v_x = 0$ . В точках пересечения с ней линии тока имеют вертикальную касательную (при  $\varepsilon = 0$  линия поворота течения  $y = -1/3$  проходит ниже). Область движения можно разбить на две зоны линией тока, выходящей из точки  $(\xi_0, 0)$  перпендикулярно оси абсцисс (сама разграничивающая линия не показана, приведены близлежащие линии тока). Верхняя зона представляет собой «плавающую» термокапиллярную ячейку с полным потоком жидкости в любом сечении  $\xi = \text{const}$ , равным нулю. Нижняя зона представляет собой трубку тока с заданным расходом  $Q$ , в которой всюду  $v_x < 0$ . Грубо говоря, набегающий поток как бы подныривает под вихревую ячейку, образуемую капиллярной силой, относительно сильно сжимая ее в продольном и слегка в поперечном направлениях. Как видно из фиг. 2, при  $\xi \geq \xi_0$  решение удовлетворительно описывает картину конвекции. Интересно отметить, что интенсивность вихря при этом не изменяется, если измерять ее величиной потока циркулирующей жидкости. Нарисованная картина конвекции со стороны набегающего потока позволяет предположить возможность существования при определенных условиях термокапиллярной ячейки по другую сторону от места нагрева.

Автор благодарен С. И. Выборнову за обсуждения и вычисление линий тока.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Саночкин Ю. В. Термокапиллярная конвекция в тонком слое жидкости, локально нагреваемом сверху. — ПМТФ, 1983, № 6.
2. Саночкин Ю. В. Установившееся термокапиллярное движение в горизонтальном слое жидкого металла, локально нагреваемом сверху. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 6.
3. Выборнов С. И., Саночкин Ю. В. Термокапиллярная ячейка в слое тяжелой жидкости, подогреваемой сверху. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1985, № 1.
4. Жаринов А. В., Саночкин Ю. В. Возможное объяснение механизма движения катодного пятна. — Письма в ЖЭТФ, 1982, т. 36, вып. 5.

Поступила 6/II 1984 г.