УДК 517.9:539.3

ПРОСТЕЙШИЕ ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНЫЕ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

С. К. Годунов, В. М. Гордиенко

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск

Дается введение в основанную на теории представлений группы $SO(3)$ формализацию галилеево-инвариантных и термодинамически согласованных уравнений математической физики, неизвестные в которых преобразуются при вращениях по неприводимым представлениям целых весов.

Введение. Выделение термодинамически согласованных уравнений и систем, применяемых в задачах механики и физики сплошных сред, начато в 60-е гг. XX в. [1, 2]. Первоначально они использовались для построения примеров решений. В дальнейшем число задач, изучаемых с помощью таких уравнений, увеличивалось, а системы уравнений становились сложнее (см. [3–14]). В связи с этим были предприняты попытки использовать для описания инвариантных относительно вращений термодинамически согласованных систем аппарат теории представлений групп [15, 16]. Однако эти попытки пока не привели к созданию прозрачной теории.

В настоящей работе, являющейся продолжением начатого в [12–16] группового анализа системы дифференциальных уравнений в частных производных, изучаются лишь простейшие термодинамически согласованные уравнения, но при этом детально исследуется их инвариантность относительно галилеевых преобразований координатных систем. Такие преобразования являются суперпозицией перехода в координатную систему, движущуюся с постоянной скоростью, и ортогонального преобразования пространственных координат. При этом неизвестные вектор-функции преобразуются с помощью ортогональных представлений группы вращений $SO(3)$ и пространственных отражений. В данной работе рассматриваются лишь вращения, поэтому не делается различий между векторами и псевдовекторами, которые по-разному реагируют на отражения.

Обычно используемые в механике тензорные переменные преобразуются при вращениях по представлениям довольно сложной структуры, и их можно разложить на простейшие из возможных неприводимые представления. Следует отметить, что для тензоров третьего и бóльших рангов такое разложение неоднозначно. Поэтому большое внимание уделяется символике, связанной с использованием неприводимых представлений.

В качестве примера приведем разложение произвольного ортогонального тензора второго ранга на неприводимые составляющие. Такой тензор состоит из девяти элементов, заполняющих матрицу 3×3, и разлагается на три тензорных слагаемых: диагональную матрицу с одинаковыми диагональными элементами $a = (a_{11} + a_{22} + a_{33})/3$, кососимметрический тензор и симметрический тензор с нулевым следом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00766).

Величина a является скаляром: при поворотах системы координат она не меняется. Три ненулевых элемента кососимметрического тензора преобразуются как трехмерный вектор. Матрицу из элементов пятимерного линейного пространства симметрических тензоров второго ранга с нулевым следом удобно записать в виде

$$a_{-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ a_0\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

При вращениях вектор $(a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2)^{\text{т}}$, составленный из коэффициентов a_j, преобразуется по пятимерному неприводимому ортогональному представлению группы вращений.

Все изучаемые в данной работе законы сохранения приводятся к симметрическим, гиперболическим по Фридрихсу, уравнениям. В таких законах сохранения не учитываются диссипативные члены — вязкое трение и диффузия. Для их учета законы сохранения необходимо модифицировать. Здесь приводится лишь один пример такой модификации, в котором дается схема моделирования тепловой релаксации в многотемпературной среде.

Во всех доступных авторам настоящей работы изложениях теории представлений группы вращений [17–22] приводятся лишь комплексные матричные элементы унитарных представлений этой группы, в то время как приложения к задачам классической механики должны основываться на вещественных матрицах ортогональных представлений, матричные элементы которых приведены в п. **3**. Для расчета этих элементов проведены элементарные, но достаточно громоздкие вычисления, по существу, повторяющие схему, используемую в теории унитарных представлений (см. [23]).

По мнению авторов, данное исследование представляет интерес как для математиков, так и для специалистов прикладных направлений, а предлагаемая в работе схема может быть обобщена на более сложные уравнения и уравнения релятивистской теории, в которой термодинамически согласованные законы сохранения также широко применяются.

1. Описание “простейшей” системы и ее предварительное изучение. Целью данной работы является описание некоторой формальной общей схемы, в которую укладывается много известных галилеево-инвариантных систем дифференциальных уравнений феноменологической математической физики, содержащих как законы сохранения массы, импульса, энергии, так и закон возрастания (или сохранения) энтропии. При записи каждой такой системы используется определяющий “термодинамический потенциал” L, возникающий в результате систематизации различных термодинамических потенциалов, появляющихся в конкретных физических задачах, а роль искомых функций играют переменные $q_0, u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, \ldots, T$, от которых этот потенциал зависит:

$$L = L(q_0, u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, \ldots, T).$$

Следует отметить, что в число таких “термодинамических” переменных в данной работе включены и компоненты u_1, u_2, u_3 вектора скорости $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, с которой перемещаются точки сплошной среды. Переменная T — температура среды, плотность которой характеризуется величиной $L_{q_0} = L_{q_0}(q_0, u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, \ldots, T)$, сопряженной с переменной q_0 при помощи потенциала L.

Задавшись потенциалом L, можно выписать некоторую стандартную простейшую систему уравнений, свойства которой ниже детально исследуются. При этом указывается, какие уравнения системы описывают законы сохранения, при каком условии (на термодинамический потенциал) системы галилеево-инвариантны и обеспечивают корректность (локальную) постановки задачи Коши. В конце пункта даны возможные обобщения, когда в уравнения включаются описываемые производными второго порядка силы вязкости, диффузии и т. п. Приступим к первоначальному анализу такой “простейшей” системы. Инвариантность уравнений, выбранных в качестве “простейших”, при переходе в систему координат, движущуюся относительно первоначальной с постоянной скоростью, входит в число вопросов, обсуждаемых в настоящем пункте, тогда как инвариантность относительно вращений рассматривается в п. **2**.

В качестве “простейших” выберем системы уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_0}}{\partial x_k} = 0; \tag{1.1а}$$

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0; \tag{1.1б}$$

$$\frac{\partial L_{q_\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_\gamma}}{\partial x_k} = -\varphi_\gamma; \tag{1.1в}$$

$$\frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_T}{\partial x_k} = \frac{q_\gamma \varphi_\gamma}{T}. \tag{1.1г}$$

(По повторяющимся индексам k, γ проводится суммирование.) Дивергентными уравнениями (1.1а), (1.1б) моделируются законы сохранения массы и импульса. Переменными q_γ описывается внутреннее состояние среды, например содержание в ней различных химических веществ, а правыми частями φ_γ моделируются скорости изменения параметров q_γ, например скорости реакций. Величина L_T является энтропией на единицу объема. Согласно закону возрастания энтропии необходимо, чтобы правые части φ_γ подчинялись неравенству $q_\gamma \varphi_\gamma \geqslant 0$ (предполагается, что $T > 0$).

Предполагая неизвестные функции q_0, u_k, q_γ, T достаточно гладкими по координатам и времени, из приведенных уравнений (1.1) как следствие можно получить еще одно, совместное с ними уравнение. Для этого равенство (1.1а) умножим на q_0, равенства (1.1б) — на u_i, (1.1в) и (1.1г) — на q_γ, T соответственно и используем тождества

$$\begin{gathered} q_0\, dL_{q_0} + u_i\, dL_{u_i} + q_\gamma\, dL_{q_\gamma} + T\, dL_T = dE, \\ q_0\, d(u_k L_{q_0}) + u_i\, d(u_k L)_{u_i} + q_\gamma\, d(u_k L)_{q_\gamma} + T\, d(u_k L)_T = d[u_k(E+L)], \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $E = q_0 L_{q_0} + u_i L_{u_i} + q_\gamma L_{q_\gamma} + T L_T - L$ — преобразование Лежандра потенциала L.

Линейная комбинация уравнений (1.1) с выбранными коэффициентами с помощью тождеств (1.2) может быть преобразована в равенство дивергентного вида

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [u_k(E+L)]}{\partial x_k} = 0. \tag{1.3}$$

В прикладных задачах это равенство описывает закон сохранения энергии. Отметим, что нулевая правая часть здесь получена за счет согласованного выбора правых частей $-\varphi_\gamma$, $q_\gamma \varphi_\gamma / T$ в уравнениях (1.1в), (1.1г).

Если термодинамический потенциал L является выпуклой функцией своих аргументов, то (1.1) будет симметрической, гиперболической по Фридрихсу, системой уравнений, что обеспечивает при гладких начальных данных корректную (локальную) разрешимость задачи Коши. Действительно, обозначая через r_i неизвестные $q_0, u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, \ldots, T$, а через $M^{(k)}$ — произведения $M^{(k)} = u_k L$, систему (1.1)

$$\frac{\partial L_{r_i}}{\partial t} + \frac{\partial M^{(k)}_{r_i}}{\partial x_k} = -\psi_i$$

можно записать в эквивалентном виде

$$L_{r_i r_j} \frac{\partial r_j}{\partial t} + M^{(k)}_{r_i r_j} \frac{\partial r_j}{\partial x_k} = -\psi_i \tag{1.4}$$

с симметричными матрицами коэффициентов, составленными из производных $L_{r_i r_j}$, $M^{(k)}_{r_i r_j}$. Выпуклость L эквивалентна положительной определенности матрицы коэффициентов при производных по t. Системы (1.4), по определению Фридрихса, называются гиперболическими.

Для удобства приведем еще одну форму записи уравнений закона сохранения импульса (1.1б)

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{u_i} + \delta_{ik} L)}{\partial x_k} = 0. \tag{1.5}$$

Опишем преобразование уравнений (1.1) и (1.3) при переходе в подвижную систему координат, движущуюся относительно исходной с постоянной скоростью. Пусть новые координаты y_k связаны с прежними равенствами $y_k = x_k - U_k t$ $(U_k = \mathrm{const})$, так что новыми компонентами скорости являются $v_k = u_k - U_k$. Остальные неизвестные $q_0, q_1, q_2, \ldots, T$ не меняются.

Положим

$$\tilde{L}(q_0, v_1, v_2, v_3, q_1, q_2, \ldots, T) = L(q_0, v_1 + U_1, v_2 + U_2, v_3 + U_3, q_1, q_2, \ldots, T).$$

При переходе в подвижную систему координат уравнения вида

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G_k}{\partial x_k} = -f$$

превращаются в

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (G_k - U_k F)}{\partial y_k} = -f.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\tilde{L}_{q_0} = L_{q_0}, \qquad \tilde{L}_{v_k} = L_{u_k}, \qquad \tilde{L}_{q_\gamma} = L_{q_\gamma}, \qquad \tilde{L}_T = L_T.$$

Поэтому равенства (1.1а), (1.1в), (1.1г) записываются в виде

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial [(u_k L)_{q_0} - U_k L_{q_0}]}{\partial y_k} = 0,$$

$$\frac{\partial L_{q_\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial [(u_k L)_{q_\gamma} - U_k L_{q_\gamma}]}{\partial y_k} = -\varphi_\gamma, \qquad \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial [(u_k L)_T - U_k L_T]}{\partial y_k} = \frac{\varphi_\gamma q_\gamma}{T}$$

и после подстановки $u_k - U_k = v_k$ принимают форму, отличающуюся от первоначальной только обозначениями:

$$\frac{\partial \tilde{L}_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial (v_k \tilde{L})_{q_0}}{\partial y_k} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{L}_{q_\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial (v_k \tilde{L})_{q_\gamma}}{\partial y_k} = -\varphi_\gamma, \quad \frac{\partial \tilde{L}_T}{\partial t} + \frac{\partial (v_k \tilde{L})_T}{\partial y_k} = \frac{\varphi_\gamma q_\gamma}{T}.$$

Уравнения (1.1б), описывающие закон сохранения импульса, преобразуются аналогичным образом. Равенство (1.5) записывается в виде

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial [(u_k L_{u_i} + \delta_{ik} L) - U_k L_{u_i}]}{\partial y_k} = 0,$$

а сам закон записывается в окончательной форме

$$\frac{\partial \tilde L_{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial (v_k \tilde L_{v_i} + \delta_{ik}\tilde L)}{\partial y_k} = 0.$$

Рассмотрим еще одно преобразование, не меняющее вида уравнений, входящих в рассматриваемую “простейшую” систему (1.1). При этом преобразовании не изменяются система координат и неизвестные функции, кроме q_0. Функция q_0 заменяется на

$$Q_0 = q_0 - u_1U_1 - u_2U_2 - u_3U_3 - K \qquad (K = \mathrm{const}). \tag{1.6}$$

При этом

$$L(q_0, u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, \dots, T) =$$
$$= L(Q_0 + u_1U_1 + u_2U_2 + u_3U_3 + K, u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, \dots, T) = \tilde L(Q_0, u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, \dots, T),$$
$$L_{q_0} = \tilde L_{Q_0}, \quad L_{u_k} = \tilde L_{u_k} - U_k\tilde L_{Q_0}, \quad L_{q_\gamma} = \tilde L_{q_\gamma}, \quad L_T = \tilde L_T.$$

Выполняя описанную замену, преобразуем уравнение закона сохранения массы (1.1а) в уравнение

$$\frac{\partial \tilde L_{Q_0}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \tilde L)_{Q_0}}{\partial x_k} = 0. \tag{1.7}$$

Уравнения закона сохранения импульса (1.5) переходят в уравнения

$$\frac{\partial (\tilde L_{u_i} - U_i \tilde L_{Q_0})}{\partial t} + \frac{\partial [u_k (L_{u_i} - U_i \tilde L_{Q_0}) + \delta_{ik}\tilde L]}{\partial x_k} = 0,$$

которые можно упростить, записав в виде

$$\frac{\partial \tilde L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \tilde L u_i + \delta_{ik}\tilde L)}{\partial x_k} - U_i\Big[\frac{\partial \tilde L_{Q_0}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k\tilde L)_{\tilde Q_0}}{\partial x_k}\Big] = 0$$

и отбросив последние слагаемые, равные нулю (см. (1.7)).

Уравнения (1.1в), (1.1г) при описываемой замене q_0 на Q_0 и L на $\tilde L$ не меняют своей формы и записываются в виде

$$\frac{\partial \tilde L_{q_\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \tilde L)_{q_\gamma}}{\partial x_k} = -\varphi_\gamma, \qquad \frac{\partial \tilde L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \tilde L)_T}{\partial x_k} = \frac{\varphi_\gamma q_\gamma}{T}.$$

Итак, показана инвариантность системы (1.1) по отношению к переходу в систему координат, движущуюся относительно первоначальной с постоянной скоростью. Можно также предполагать, что при таком переходе по правилу (1.6) меняется и неизвестная функция q_0, входящая в уравнение закона сохранения массы.

Осуществляя переход к движущимся координатам и сохраняя для новых переменных $u_i - U_i$, $q_0 + u_iU_i - U_iU_i/2$ стандартные обозначения u_i, q_0, необходимо, как уже отмечалось, изменить формулу для производящего потенциала L с учетом его зависимости от параметров преобразования U_i. Выражение, задающее производящий потенциал, не изменится, если $L(q_0, u_1, u_2, u_3, q_1, q_2, \dots, T) = \Lambda(q_0 + u_iu_i/2, q_1, q_2, \dots, T)$.

Ниже подробно рассматриваются ограничения, которым необходимо подчинить систему (1.1), чтобы она была инвариантной по отношению к ортогональным преобразованиям (вращениям) системы координат, т. е. к ограничениям, при которых она будет галилеево-инвариантной.

Рассмотрим один из простейших примеров уравнений математической физики, допускающих представление в виде (1.1).

Одномерные уравнения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(p+\rho u^2)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho S u)}{\partial x}=0 \tag{1.8}$$

описывают движение газа с энергетическим уравнением состояния $\mathcal{E}=\mathcal{E}(\rho,S)$, при котором давление p и температура T определяются по формулам

$$p=\rho^2\mathcal{E}_\rho(\rho,S),\qquad T=\mathcal{E}_S(\rho,S).$$

Следствием уравнений (1.8) является закон сохранения энергии

$$\frac{\partial(\rho[\mathcal{E}(\rho,S)+u^2/2])}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u[\mathcal{E}(\rho,S)+p/\rho+u^2/2])}{\partial x}=0. \tag{1.9}$$

Для его вывода надо каждое из уравнений (1.8) умножить на соответствующий "интегрирующий множитель" $q_0=\mathcal{E}+p/\rho-TS-u^2/2$, u, T и сложить полученные произведения. Чтобы воспользоваться нужной формализацией, введем обозначение $E=\rho[\mathcal{E}(\rho,S)+u^2/2]$ и определим L так, чтобы

$$L_{q_0}=\rho,\qquad L_u=\rho u,\qquad L_T=\rho S,$$

$$E=q_0L_{q_0}+uL_u+TL_T-L=(\mathcal{E}+p/\rho-TS-u^2/2)\rho+u\rho u+T\rho S-L\equiv$$
$$\equiv\rho\mathcal{E}+p+\rho u^2/2-L=E+p-L.$$

Очевидно, что необходимо положить $L=p=\rho^2\mathcal{E}_\rho(\rho,S)$. При этом

$$(uL)_{q_0}=u\rho,\quad (uL)_u=uL_u+L=\rho u^2+p,\quad (uL)_T=uL_T=u\rho S.$$

Итак, если определить q_0, u, T, L при помощи следующей параметризации: $q_0=\mathcal{E}(\rho,S)+\rho\mathcal{E}_\rho(\rho,S)-S\mathcal{E}_S(\rho,S)-u^2/2$, $u=u$, $T=\mathcal{E}_S(\rho,S)$, $L=\rho^2\mathcal{E}_\rho(\rho,S)$, то уравнения (1.8) и закон сохранения энергии (1.9) запишутся в дивергентном виде

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(uL)_{q_0}}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial L_u}{\partial t}+\frac{\partial(uL)_u}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial(uL)_T}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial[u(E+L)]}{\partial x}=0 \tag{1.10}$$
$$(E=q_0L_{q_0}+uL_u+TL_T-L).$$

В рассмотренном примере при переходе к подвижной пространственной координате $y=x-Ut$, когда скорость u заменяется на v так, что $u=v+U$, искомую функцию

$$q_0=\mathcal{E}+p/\rho-TS-u^2/2$$

следует заменить на

$$Q_0=\mathcal{E}+p/\rho-TS-v^2/2=q_0+uU-U^2/2.$$

В результате уравнения (1.10) сохранят свою форму, но в них нужно заменить x на y, u на v, q_0 на Q_0.

Приведенный пример объясняет, почему при переходе к подвижной системе координат необходимо было рассмотреть возможность сопутствующей этому переходу замены одной из искомых функций q_0 на $q_0+u_kU_k+\mathrm{const}$.

Системы уравнений вида (1.1), которые являются исходными для дальнейших построений, описывают процессы, в которых отсутствуют вязкое трение и диффузия. При необходимости их учета уравнения нужно модифицировать.

Приведем одну из модификаций одномерного варианта системы (1.1). Коэффициент вязкости μ должен быть положительным, а матрица из диффузионных коэффициентов $D_{\gamma\beta}$ — неотрицательно-определенной (по повторяющимся индексам проводится суммирование):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial (uL)_{q_0}}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial L_u}{\partial t}+\frac{\partial (L+uL_u-\mu\,\partial u/\partial x)}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial L_{q_\gamma}}{\partial t}+\frac{\partial (uL)_{q_\gamma}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(D_{\gamma\beta}\,\frac{\partial q_\gamma}{\partial x}\Big)-\varphi_\gamma,\\
\frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial (uL)_T}{\partial x}=\frac{1}{T}\Big(\mu\,\frac{\partial u^2}{\partial x}+D_{\gamma\beta}\,\frac{\partial q_\gamma}{\partial x}\frac{\partial q_\beta}{\partial x}+q_\gamma\varphi_\gamma\Big).
\end{gathered}\tag{1.11}$$

Первое и второе уравнения (1.11) описывают соответственно законы сохранения массы и импульса, а последнее — закон возрастания энтропии. На решениях системы (1.11) выполнен закон сохранения энергии

$$\begin{gathered}
\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial [u(E+L)-\mu u\,\partial u/\partial x-q_\gamma D_{\gamma\beta}\,\partial q_\beta/\partial x]}{\partial x}=0,\\
E=q_0L_{q_0}+uL_u+q_\gamma L_{q_\gamma}+TL_T-L.
\end{gathered}\tag{1.12}$$

Легко проверяется, что вид уравнений (1.11), (1.12), так же как и рассмотренных выше (1.1), (1.3), сохраняется при переходе к новой системе координат, движущейся относительно первоначальной с постоянной скоростью.

Приведем еще один, более общий, чем (1.11), (1.12), пример одномерных законов сохранения для многотемпературной гидродинамики, ограничиваясь вариантом с двумя температурами. Этот пример выбран после ознакомления с работами [24–26].

Пусть внутренняя энергия является суммой парциальных энергий $\mathcal{E}^{(j)}(\rho,S_j)$, где S_j — парциальная энтропия ($j=1,2$). При этом необходимо положить

$$L=\sum_j \rho^2\mathcal{E}^{(j)}_S(\rho,S_j),$$

а в качестве искомых функций выбрать

$$q_0=\sum_j[\mathcal{E}^{(j)}(\rho,S_j)+\rho\mathcal{E}^{(j)}_\rho(\rho,S_j)]-S_j\mathcal{E}_{S_j}(\rho,S_j)-\frac{u^2}{2}, \qquad T_j=\mathcal{E}^{(j)}_{S_j}.$$

При этом

$$\begin{gathered}
L_{q_0}=\rho, \qquad L_u=\rho u, \qquad L_{T_j}=\rho S_j,\\
q_0L_{q_0}+uL_u+\sum_j T_jL_{T_j}-L=\rho\bigg(\sum_j\mathcal{E}^{(j)}(\rho,S_j)+\frac{u^2}{2}\bigg)\equiv E.
\end{gathered}$$

По аналогии с (1.11), (1.12) уравнения для одномерной вязкой теплопроводной гидродинамики можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial (uL_{q_0})}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial L_u}{\partial t}+\frac{\partial (L+uL_u-\mu\,\partial u/\partial x)}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial L_{T_1}}{\partial t}+\frac{\partial (uL_{T_1}-(K_1/T_1)\,\partial T_1/\partial x)}{\partial x}=\frac{K_1}{T_1^2}\Big(\frac{\partial T_1}{\partial x}\Big)^2+a\,\frac{T_2-T_1}{T_1}+\frac{\mu}{T_1}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2,\\
\frac{\partial L_{T_2}}{\partial t}+\frac{\partial (uL_{T_2}-(K_2/T_2)\,\partial T_2/\partial x)}{\partial x}=\frac{K_2}{T_2^2}\Big(\frac{\partial T_2}{\partial x}\Big)^2+a\,\frac{T_1-T_2}{T_2},
\end{gathered}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial[u(E+L)-K_1\,\partial T_1/\partial x-K_2\,\partial T_2/\partial x-\mu u\,\partial u/\partial x]}{\partial x}=0.$$

Здесь последнее равенство (закон сохранения энергии) получается как линейная комбинация всех предыдущих уравнений, взятых соответственно с коэффициентами q_0, u, T_1, T_2. В правые части третьего и четвертого (энтропийных) уравнений включены дополнительные слагаемые $(a/T_1)(T_2-T_1)$, $(a/T_2)(T_1-T_2)$ с положительным коэффициентом a. Этими слагаемыми моделируется процесс выравнивания температур T_1, T_2. Входящие в них множители $1/T_1$, $1/T_2$ подобраны так, чтобы включение этих слагаемых не приводило к нарушению закона сохранения энергии. Существенно, что результатом сложения энтропийных уравнений является равенство

$$\frac{\partial[\rho(S_1+S_2)]}{\partial t}+\frac{\partial[\rho u(S_1+S_2)-(K_1/T_1)\,\partial T_1/\partial x-(K_2/T_2)\,\partial T_2/\partial x]}{\partial x}=$$
$$=\frac{K_1}{T_1^2}\Big(\frac{\partial T_1}{\partial x}\Big)^2+\frac{K_2}{T_2^2}\Big(\frac{\partial T_2}{\partial x}\Big)^2+\frac{a}{T_1T_2}(T_2-T_1)^2+\frac{\mu}{T_1}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2,$$

которое можно интерпретировать как закон возрастания суммарной энтропии. Это возрастание является следствием наличия вязких напряжений $\mu\,\partial u/\partial x$, градиентов температур T_1, T_2 и процесса релаксации, дающего положительный вклад, если $T_2\ne T_1$. Очевидно, что описанная здесь конструкция может быть автоматически распространена на большее число температур T_j.

Завершая рассмотрение простейших примеров учета диссипативных процессов, не противоречащих законам сохранения массы, импульса и энергии, а также закону возрастания энтропии, отметим, что классификация диссипативных слагаемых, допускаемых галилеевой инвариантностью уравнений, является важной задачей, требующей проведения дальнейших исследований.

2. Инвариантность относительно вращений и галилеевых преобразований. Установим ограничения для "простейших" систем уравнений (см. п. **1**), при которых они описывают процессы, не зависящие от различных поворотов координатных систем. Каждое такое вращение задается некоторой ортогональной вещественной матрицей $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}^{\text{т}}\mathcal{P}=I_3$) размером 3×3 с положительным определителем $\det\mathcal{P}=+1$. Совокупность этих матриц образует группу $SO(3)$.

Преобразование $\mathcal{P}\in SO(3)$ заменяет координаты x_1, x_2, x_3 точки x на новые координаты y_1, y_2, y_3 по формуле

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\mathcal{P}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathcal{P}\boldsymbol{x}.$$

Прежние координаты могут быть вычислены через новые с помощью обратной матрицы $\mathcal{P}^{-1}=\mathcal{P}^{\text{т}}$:

$$\boldsymbol{x}=\mathcal{P}^{-1}\boldsymbol{y}=\mathcal{P}^{\text{т}}\boldsymbol{y}.$$

Поле вектора скорости

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\begin{pmatrix}u_1(x_1,x_2,x_3,t)\\u_2(x_1,x_2,x_3,t)\\u_3(x_1,x_2,x_3,t)\end{pmatrix}$$

после преобразования $\mathcal{P}$ будет задаваться с помощью вектор-функции $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y},t)$, вычисляемой через $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ по формуле

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y},t)=\mathcal{P}\boldsymbol{u}(\mathcal{P}^{-1}\boldsymbol{y},t).$$

Неизвестные функции, описывающие в изучаемой системе уравнений состояние среды, объединим в вектор-функцию $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots)^{\mathrm{T}}$, которая при поворотах координатной системы также должна преобразоваться. Каждому преобразованию координат, описываемому матрицей $\mathcal{P}$, должна соответствовать ортогональная матрица $\Omega = \Omega(\mathcal{P})$, в результате действия которой вектор $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t)$ переходит в $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}, t) = \Omega\boldsymbol{q}(\mathcal{P}^{-1}\boldsymbol{y}, t)$. При последовательном выполнении преобразований $\boldsymbol{y} = \mathcal{P}_1\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z} = \mathcal{P}_2\boldsymbol{y} = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1\boldsymbol{x}$ неизвестные векторы преобразуются последовательно ($\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{r}$) при помощи соответствующих ортогональных матриц Ω_1, Ω_2:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{z}, t) = \Omega_2\boldsymbol{p}(\mathcal{P}_2^{-1}\boldsymbol{z}, t),$$
$$\boldsymbol{p}(\mathcal{P}_2^{-1}\boldsymbol{z}, t) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}, t) = \Omega_1\boldsymbol{q}(\mathcal{P}_1^{-1}\boldsymbol{y}, t) = \Omega_1\boldsymbol{q}(\mathcal{P}_1^{-1}\mathcal{P}_2^{-1}\boldsymbol{z}, t),$$
$$\boldsymbol{r} = \Omega_2\Omega_1\boldsymbol{q}(\mathcal{P}_1^{-1}\mathcal{P}_2^{-1}\boldsymbol{z}, t).$$

Соответствие между преобразованиями $\mathcal{P}$ пространственных координат и отвечающими им преобразованиями Ω неизвестной вектор-функции $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t)$ должно быть представлением группы $SO(3)$ ортогональными матрицами.

Производящий потенциал $L = L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}, T)$ будем предполагать инвариантным, так что

$$L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}, T) = L(\mathcal{P}\boldsymbol{u}, \Omega\boldsymbol{q}, T) = L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}, T). \tag{2.1}$$

Изучая ту или иную конкретную систему, будем предполагать, что конечномерное ортогональное представление $\Omega(\mathcal{P})$, сохраняющее производящий потенциал инвариантным для любых $\mathcal{P} \in SO(3)$, известно.

В квантово-механических задачах математической физики могут использоваться не только ортогональные, но и унитарные представления. При этом неизвестные q_j должны предполагаться комплексными. В п. **3** изложены возможные приемы, позволяющие применять анализ инвариантности уравнений и в случае таких обобщений.

Какова бы ни была функция $f(\boldsymbol{y}, t)$:

$$f(\boldsymbol{y}, t) = f(y_1, y_2, y_3, t) = f(\mathcal{P}\boldsymbol{x}, t) = f(\mathcal{P}_{1j}x_j, \mathcal{P}_{2j}x_j, \mathcal{P}_{3j}x_j, t),$$

в силу ортогональности преобразования $\mathcal{P}$ справедливы равенства

$$f_{x_j} = f_{y_i}\mathcal{P}_{ij}, \quad v_i = \mathcal{P}_{ij}u_j, \quad u_j = \mathcal{P}_{ji}v_i, \quad u_i f_{x_i} \equiv u_j f_{x_j} = v_i f_{y_i}\mathcal{P}_{ji}\mathcal{P}_{ij} = v_i f_{y_i}. \tag{2.2}$$

Кроме того, при этом преобразовании скаляры, в частности температура T, не меняются.

Из равенства (при $dT = 0$)

$$dL = L_{u_i}\,du_i + L_{q_\gamma}\,dq_\gamma = L_{v_j}\mathcal{P}_{ij}\,du_i + L_{p_\beta}\Omega_{\beta\alpha}\,dq_\alpha$$

и ортогональности $\mathcal{P}, \Omega$ следует

$$\begin{gathered} L_{u_i} = \mathcal{P}_{ji}L_{v_j}, \quad L_u = \mathcal{P}^{\mathrm{T}}L_v, \quad L_v = \mathcal{P}L_u, \\ L_{q_\alpha} = \Omega_{\beta\alpha}L_{p_\beta}, \quad L_q = \Omega^{\mathrm{T}}L_p, \quad L_p = \Omega L_q. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Для любой скалярной функции $g(\boldsymbol{y}, t) = g(y_1, y_2, y_3, t) = g(\mathcal{P}_{1j}x_j, \mathcal{P}_{2j}x_j, \mathcal{P}_{3j}x_j, t)$ ее градиенты в рассматриваемых координатных системах $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ связаны равенством

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} g_{y_1} \\ g_{y_2} \\ g_{y_3} \end{pmatrix} = \mathcal{P}\begin{pmatrix} g_{x_1} \\ g_{x_2} \\ g_{x_3} \end{pmatrix} = \mathcal{P}\,\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим задаваемую с помощью инвариантного (см. (2.1)) потенциала L систему уравнений

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L_{q_0})}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L_{u_i})}{\partial x_k} + \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial L_{q_\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{q_\gamma})}{\partial x_k} = -\varphi_\gamma, \qquad \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_T)}{\partial x_k} = \frac{q_\gamma \varphi_\gamma}{T}.$$

Вектор $\boldsymbol{q}$ с компонентами q_γ при поворотах системы координат предполагается преобразующимся по некоторому представлению группы вращений. Скалярные величины q_0, T, не меняющиеся при вращениях, можно включить в число компонент вектора $\boldsymbol{q}$, считая $\varphi_0 = 0$, а $\varphi_T = q_\gamma \varphi_\gamma / T$.

Из (2.2)–(2.4) следует, что ортогональные преобразования $\mathcal{P}$, Ω

$$\boldsymbol{y} = \mathcal{P}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}, t) = \mathcal{P}\boldsymbol{u}(\mathcal{P}^{-1}\boldsymbol{y}, t), \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}, t) = \Omega \boldsymbol{q}(\mathcal{P}^{-1}\boldsymbol{y}, t),$$

$$\boldsymbol{p}_0(\boldsymbol{y}, t) = \boldsymbol{q}_0(\mathcal{P}^{-1}\boldsymbol{y}, t), \quad \hat{T} = T(\mathcal{P}^{-1}\boldsymbol{y}, t), \quad \hat{\varphi}_\gamma(\boldsymbol{y}, t) = \varphi_\gamma(\mathcal{P}^{-1}\boldsymbol{y}, t)$$

переводят систему (2.5) в систему уравнений, отличающуюся от (2.5) только новыми обозначениями:

$$\frac{\partial L_{p_0}}{\partial t} + \frac{\partial (v_k L_{p_0})}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial L_{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial (v_k L_{v_i})}{\partial x_k} + \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial L_{p_\gamma}}{\partial t} + \frac{\partial (v_k L_{p_\gamma})}{\partial x_k} = -\hat{\varphi}_\gamma, \quad \frac{\partial L_{\hat{T}}}{\partial t} + \frac{\partial (v_k L_{\hat{T}})}{\partial x_k} = \frac{p_\gamma \hat{\varphi}_\gamma}{\hat{T}}.$$

Это позволяет утверждать, что система (2.5) инвариантна относительно вращений при сделанных предположениях об инвариантности производящего термодинамического потенциала L, зависящего от неизвестных функций — векторов, преобразующихся при вращениях по неприводимым представлениям.

Система (2.5) совпадает с “простейшей” системой (1.1), введенной в п. **1**, и также может быть дополнена совместным с ней равенством

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [u_k (E + L)]}{\partial x_k} = 0, \qquad E = q_0 L_{q_0} + u_i L_{u_i} + q_\gamma L_{q_\gamma} + T L_T - L. \tag{2.6}$$

В п. **1** показано, что рассматриваемая система уравнений инвариантна относительно перехода в подвижную систему координат, перемещающуюся с постоянной скоростью, если производящий потенциал задается в виде $L = \Lambda(q_0 + u_i u_i/2, q_1, q_2, \ldots, T)$.

Таким образом, в силу инвариантности уравнений при вращениях координатных систем (см. п. **1**) можно утверждать, что система уравнений (1.1), (1.3) или совпадающая с ней (2.5), (2.6) инвариантна относительно произвольных галилеевых преобразований. Очевидно, что она инвариантна и при параллельном переносе системы координат, сдвигающем ее начало.

3. Конкретизация искомых функций в изучаемых системах. В пп. **1, 2** описана структура некоторой специальной системы дифференциальных уравнений с частными производными, которая является галилеево-инвариантной, содержит законы сохранения массы, импульса и энергии, а также закон сохранения (или возрастания) энтропии. Неизвестными функциями в такой системе являются поле распределения вектора скорости $\boldsymbol{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$ и поле некоторого, как правило, многокомпонентного вектора $\boldsymbol{q}$, преобразующегося при вращениях по какому-либо ортогональному представлению группы вращений или ее универсальной накрывающей группы $SU(2)$ (мультипликативной группы кватернионов).

Изменим нумерацию независимых переменных x_1, x_2, x_3 и компонент вектора скорости u_1, u_2, u_3. Для дальнейших построений удобнее использовать обозначения x_{-1}, x_0, x_1; u_{-1}, u_0, u_1.

Предположим, что вектор $\boldsymbol{q}$ составной, а его частями являются “векторные компоненты” — векторы $\boldsymbol{q}^{(A_1)}, \boldsymbol{q}^{(A_2)}, \ldots$, каждый из которых преобразуется по неприводимому ортогональному представлению соответствующего веса A_j.

Среди векторных компонент может оказаться не одна, а несколько компонент с одним и тем же весом A.

Если вес A является целым, то вектор $\boldsymbol{q}^{(A)}$ должен иметь нечетное число $(2A+1)$ компонент. Для этих компонент — вещественных чисел $q_a^{(A)}$ — используется целочисленная нумерация: $a = -A, -A+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, A-1, A$. При этом нулевому весу $A = 0$ соответствует одна скалярная компонента $q_0^{(0)}$, которая при вращениях не меняется.

В случае полуцелого веса A обычно используются унитарные представления в комплексном векторном пространстве четной размерности $2A+1$. В таком пространстве каждый вектор $\boldsymbol{q}^{(A)}$ имеет $2A+1$ комплексные компоненты $q_a^{(A)} + ir_a^{(A)}$ $(a = -A, -A+1, \ldots, -1/2, 1/2, \ldots, A-1, A)$, а само представление естественным образом индуцирует ортогональное представление в пространстве $2(2A+1)$-мерных вещественных векторов $\boldsymbol{q}^{(A)}$ с компонентами $q_{-A}, q_{-A+1}, \ldots, q_A; r_{-A}, r_{-A+1}, \ldots, r_A$. В приводимых ниже примерах используется именно такая реализация ортогональных представлений группы $SU(2)$ или группы вращений $SO(3)$. В случае представлений полуцелого веса каждому повороту из $SO(3)$ на угол 2π вокруг какой-либо оси соответствует преобразование вектора $\boldsymbol{q}^{(A)}$ в вектор $-\boldsymbol{q}^{(A)}$, у которого знаки всех компонент $-q_a^{(A)}$, $-r_a^{(A)}$ противоположны знакам компонент $q_a^{(A)}$, $r_a^{(A)}$ исходного вектора $\boldsymbol{q}^{(A)}$. Например, векторная переменная $\boldsymbol{q}^{(1/2)}$, преобразующаяся по ортогональному (двузначному) представлению веса $1/2$, имеет четыре компоненты $q_{-1/2}$, $r_{-1/2}$, $q_{1/2}$, $r_{1/2}$. Каждому вращению $g \in SO(3)$, задаваемому матрицей $g = g_0(\psi_0)g_{-1}(\theta_{-1})g_0(\varphi_0)$, представленной в виде произведения поворотов вокруг нулевой, минус первой и вновь нулевой координатных осей, соответствует ортогональное преобразование вектора $\boldsymbol{q}^{(1/2)}$, описываемое матрицей

$$
\Omega^{1/2}(\psi_0, \theta_{-1}, \varphi_0) =
$$
$$
= \begin{pmatrix}
\cos\frac{\theta_{-1}}{2}\cos\frac{\varphi_0+\psi_0}{2} & \sin\frac{\theta_{-1}}{2}\cos\frac{\varphi_0-\psi_0}{2} & \cos\frac{\theta_{-1}}{2}\sin\frac{\varphi_0+\psi_0}{2} & -\sin\frac{\theta_{-1}}{2}\sin\frac{\varphi_0-\psi_0}{2} \\
-\sin\frac{\theta_{-1}}{2}\cos\frac{\varphi_0-\psi_0}{2} & \cos\frac{\theta_{-1}}{2}\cos\frac{\varphi_0+\psi_0}{2} & -\sin\frac{\theta_{-1}}{2}\sin\frac{\varphi_0-\psi_0}{2} & -\cos\frac{\theta_{-1}}{2}\sin\frac{\varphi_0+\psi_0}{2} \\
-\cos\frac{\theta_{-1}}{2}\sin\frac{\varphi_0+\psi_0}{2} & \sin\frac{\theta_{-1}}{2}\sin\frac{\varphi_0-\psi_0}{2} & \cos\frac{\theta_{-1}}{2}\cos\frac{\varphi_0+\psi_0}{2} & \sin\frac{\theta_{-1}}{2}\cos\frac{\varphi_0-\psi_0}{2} \\
\sin\frac{\theta_{-1}}{2}\sin\frac{\varphi_0-\psi_0}{2} & \cos\frac{\theta_{-1}}{2}\sin\frac{\varphi_0+\psi_0}{2} & -\sin\frac{\theta_{-1}}{2}\cos\frac{\varphi_0-\psi_0}{2} & \cos\frac{\theta_{-1}}{2}\cos\frac{\varphi_0+\psi_0}{2}
\end{pmatrix}.
$$

Любое вращение $g \in SO(3)$, $g = g_0(\psi_0)g_{-1}(\theta_{-1})g_0(\varphi_0)$ представляет собой поворот на некоторый угол $\omega = \psi_0$ вокруг оси, в которую последовательно выполненные вращения $g_0(\varphi_0)$ и $g_{-1}(\theta_{-1})$ переводят ось x_0. Следует отметить, что повороту на угол $\psi_0 + 2\pi$ вокруг той же оси, т. е. вращению с набором параметров $\psi_0 + 2\pi$, θ_{-1}, φ_0, соответствует $\Omega^{1/2}(\psi_0 + 2\pi, \theta_{-1}, \varphi_0) = -\Omega^{1/2}(\psi_0, \theta_{-1}, \varphi_0)$.

Приведенный пример ортогонального представления получен из двумерного унитарного, в котором двумерный комплексный вектор

$$
\boldsymbol{q}^{(1/2)} = \begin{bmatrix} q_{-1/2} + ir_{-1/2} \\ q_{1/2} + ir_{1/2} \end{bmatrix}
$$

преобразуется с помощью унитарных матриц вида

$$
\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \mathrm{e}^{-i(\varphi_0+\psi_0)/2}\cos\frac{\theta_{-1}}{2}, \quad \beta = \mathrm{e}^{i(\varphi_0-\psi_0)/2}\sin\frac{\theta_{-1}}{2}.
$$

В качестве примера галилеево-инвариантной системы, в которой одна часть неизвестных, а именно T, q_0; u_{-1}, u_0, u_1, при вращениях преобразуется по однозначным представлениям (весов $0, 1$), а другая — по двузначному (веса $1/2$), рассмотрим уравнения, порождаемые некоторым потенциалом

$$L = L(q_0; u_{-1}, u_0, u_1; q_{-1/2}, r_{-1/2}, q_{1/2}, r_{1/2}, T) = \Lambda(q_0 + u_i u_i/2, q_{-1/2}, r_{-1/2}, q_{1/2}, r_{1/2}, T),$$

инвариантным относительно вращений:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L_{q_0})}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial L_{q_{-1/2}}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L_{q_{-1/2}})}{\partial x_k} = -r_{1/2}, \qquad \frac{\partial L_{q_{1/2}}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L_{q_{1/2}})}{\partial x_k} = r_{-1/2},$$

$$\frac{\partial L_{r_{-1/2}}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L_{r_{-1/2}})}{\partial x_k} = -q_{1/2}, \qquad \frac{\partial L_{r_{1/2}}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L_{r_{1/2}})}{\partial x_k} = q_{-1/2},$$

$$\frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L_T)}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial[u_k(E + L)]}{\partial x_k} = 0,$$

$$E = u_k L_{u_k} + q_j L_{q_j} + r_j L_{r_j} + T L_T - L.$$

Из результатов, полученных в пп. **1, 2**, следует, что рассматриваемая система совместна, хотя и является переопределенной, так как содержит 10 уравнений для 9 неизвестных функций. Нулевая правая часть в энтропийном уравнении получена в результате специального подбора правых частей.

Сокращенное обозначение $\boldsymbol{q}^{(A)}$ используется для вектора с компонентами $q_a^{(A)}$, преобразующегося по неприводимому представлению веса A. Иногда удобнее рассматривать вектор-функции, представляемые двухвалентными тензорами $q_{k\alpha}^{(1,A)}$, в которых второй нижний индекс греческий, а первый латинский. Каждому вращению $\mathcal{P}^{(1)}$ координатной системы в представлении веса A отвечает ортогональное преобразование (представление) $\Omega^{(A)}$, задаваемое вещественной матрицей размера $(2A + 1) \times (2A + 1)$, если A — целое число, и размера $[2(2A + 1)] \times [2(2A + 1)]$, если A — полуцелое число. Очевидно, что греческий индекс α должен пробегать соответствующее число различных значений, тогда как латинский индекс k принимает только три значения (при выбранной нумерации $k = -1, 0, 1$).

Преобразование тензора $q_{k\alpha}^{(1,A)}$ осуществляется по правилу $[q_{k\alpha}^{(1,A)}]' = \Omega_{\alpha\beta}^{(A)} \mathcal{P}_{kj}^{(1)} q_{j\beta}^{(1,A)}$. Порожденное такими преобразованиями представление приводимо, если $A \neq 0$, и, как известно, раскладывается на неприводимые представления.

В качестве примера приведем совместную галилеево-инвариантную переопределенную систему, в которой q_0 — скаляр, u_j — компоненты вектора скорости, $r_{j\alpha}$ — компоненты тензора $r^{(1,1)}$, T — температура:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L_{q_0})}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial L_{r_{\alpha i}}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L_{r_{k\alpha}})}{\partial x_k} = -\varphi_{i\alpha}, \qquad \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L_T)}{\partial x_k} = \frac{r_{j\alpha}\varphi_{j\alpha}}{T},$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial[u_k(E + L)]}{\partial x_k} = 0, \qquad E = q_0 L_{q_0} + u_i L_{u_i} + r_{j\alpha} L_{r_{j\alpha}} + T L_T - L.$$

Порождающий эту систему потенциал L — инвариантная функция всех неизвестных q_0, u_i, $r_{j\alpha}$, T. Правые части $-\varphi_{i\alpha}$ должны быть определены так, чтобы не нарушалась инвариантность. Уравнения с нулевыми правыми частями могут рассматриваться как точные законы сохранения массы, импульса и энергии.

В заключение приведем матрицы $\Omega^{(N)}(\psi_0, \theta_{-1}, \varphi_0) = \Omega^{(N)}(0, 0, \psi_0)\Omega^{(N)}(0, \theta_{-1}, 0)\times \Omega^{(N)}(0, 0, \varphi_0)$, дающие в стандартно выбираемом каноническом базисе представление (целого веса N) вращений $\mathcal{P}(\psi_0, \theta_{-1}, \varphi_0)$, задаваемых углами Эйлера $\varphi_0, \theta_{-1}, \psi_0$. Индексы соответствуют номерам координатных осей, вокруг которых производится поворот. Следует отметить, что $\mathcal{P}(\psi_0, \theta_{-1}, \varphi_0) = \Omega^{(1)}(\psi_0, \theta_{-1}, \varphi_0)$.

Матричные элементы, соответствующие повороту φ_0, вычисляются по формулам

$$\Omega^{(N)}_{m,m}(\varphi_0, 0, 0) = \Omega^{(N)}_{m,m}(0, 0, \varphi_0) = \cos m\varphi_0, \quad \Omega^{(N)}_{-m,m}(\varphi_0, 0, 0) = \Omega^{(N)}_{-m,m}(0, 0, \varphi_0) = \sin m\varphi_0,$$

если $N \geqslant |m| \geqslant 1$, $\Omega^{(N)}_{0,0}(0, 0, \varphi_0) = 1$; $\Omega^{(N)}_{k,m}(0, 0, \varphi_0) = 0$, если $|k| \neq |m|$.

Элементы $\Omega^{(N)}_{km}(0, \theta_{-1}, 0) = (-1)^{k+m}\Omega^{(N)}_{mk}(0, \theta_{-1}, 0)$ удобно выражать через $\mu = \cos\theta_{-1}$ $(1 \leqslant k, m \leqslant N)$:

$$\Omega^{(N)}_{\pm k,\pm m}(0, \theta_{-1}, 0) = \frac{(-1)^{N+m}}{2^N(1-\mu^2)^{(k+m)/2}}\sqrt{\frac{(N+m)!}{(N-k)!(N+k)!(N-m)!}} \times$$

$$\times\Big\{(1-\mu)^k \frac{d^{N-m}}{d\mu^{N-m}}\,[(1+\mu)^{N+k}(1-\mu)^{N-k}] \pm (-1)^k(1+\mu)^k \frac{d^{N-m}}{d\mu^{N-m}}\,[(1+\mu)^{N-k}(1-\mu)^{N+k}]\Big\},$$

$$\Omega^{(N)}_{k,0}(0, \theta_{-1}, 0) = (-1)^k\Omega^{(N)}_{0,k}(0, \theta_{-1}, 0) = \frac{(-1)^{N+1}}{N!2^N}\sqrt{\frac{2(N+k)!}{(N-k)!}}\,\frac{1}{(1-\mu^2)^{k/2}}\,\frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}}\,(1-\mu^2)^N,$$

$$\Omega^{(N)}_{0,0}(0, \theta_{-1}, 0) = \frac{(-1)^N}{N!2^N}\,\frac{d^N}{d\mu^N}\,(1-\mu^2)^N,$$

$$\Omega^{(N)}_{-k,m}(0, \theta_{-1}, 0) = \Omega^{(N)}_{k,-m}(0, \theta_{-1}, 0) = \Omega^{(N)}_{-k,0}(0, \theta_{-1}, 0) = \Omega^{(N)}_{0,-m}(0, \theta_{-1}, 0) = 0.$$

Заключение. В данной работе изложены результаты исследования гиперболичности, галилеевой инвариантности и термодинамической согласованности простейших законов сохранения, встречающихся в математической физике.

Предложен также специальный выбор неизвестных вектор-функций, преобразующихся по неприводимым ортогональным представлениям группы вращений. Использование этих вектор-функций в качестве переменных облегчит начатое в [15, 16] изучение связи между теорией представлений групп и систематизацией дифференциальных уравнений, описывающих эволюционные процессы в разнообразных сплошных средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К.** О понятии обобщенного решения // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 6. С. 1279–1282.
2. **Годунов С. К.** Интересный класс квазилинейных систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 3. С. 521–523.
3. **Куликовский А. Г.** О структуре магнитогидродинамических ударных волн при произвольном законе диссипации // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, № 2. С. 273–279.
4. **Friedrichs K. O., Lax P. D.** Systems of conservation equations with a convex extension // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1971. V. 68, N 8. P. 1686–1688.
5. **Годунов С. К.** Симметрическая форма уравнений магнитной гидродинамики // Числ. методы механики сплошной среды. 1972. Т. 3, № 1. С. 26–34.
6. **Годунов С. К., Роменский Е. И.** Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // ПМТФ. 1972. № 6. С. 124–144.

7. **Friedrichs K. O.** On the laws of relativistic electro-magneto-fluid dynamics // Comm. Pure Appl. Math. 1974. V. 27, N 6. P. 749–808.
8. **Friedrichs K. O.** Conservation equations and the laws of motion in classical physics // Comm. Pure Appl. Math. 1978. V. 31, N 1. P. 123–131.
9. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
10. **Boillat G.** Symétrisation des systèms d'équations aux derivées partielles avec densite d'énergie convexe et contraintes // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. Math. 1982. V. 295, N 9. P. 551–554.
11. **Godunov S. K.** Lois de conservation et intégrales d'énergie des équations hyperboliques // Lecture notes in mathematics. Nonlinear hyperbolic problems. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1986. P. 135–149.
12. **Godunov S. K., Romensky E. I.** Thermodynamics, conservation laws and symmetric forms of differential equations in mechanics of continuous media // Computational fluid dynamics review. Chichester; N. Y. etc.: John Wiley and Sons, 1995. P. 19–30.
13. **Sever M.** Estimation of the time rate of entropy dissipation for systems of conservation laws // J. Different. Equations. 1996. V. 130. P. 127–141.
14. **Годунов С. К., Роменский Е. И.** Элементы механики сплошной среды и законы сохранения. Новосибирск: Науч. кн., 1998. (Унив. сер.).
15. **Годунов С. К., Михайлова Т. Ю., Роменский Е. И.** Системы термодинамически согласованных законов сохранения, инвариантных относительно вращений // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 790–806.
16. **Михайлова Т. Ю.** Термодинамически согласованные законы сохранения с неизвестными произвольного веса // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 615–626.
17. **Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.** Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения. М.: Физматгиз, 1958.
18. **Хамермеш М.** Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М.: Мир, 1966.
19. **Любарский Г. Я.** Теория групп и ее применение в физике. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
20. **Годунов С. К., Михайлова Т. Ю.** Представления группы вращений и сферические функции. Новосибирск: Науч. кн., 1998. (Унив. сер.).
21. **Шелепин Л. А.** Исчисление коэффициентов Клебша — Гордана и его физические приложения // Тр. / АН СССР. Физ. ин-т. 1973. Т. 70. С. 3–119.
22. **Румер Ю. Б.** Спинорный анализ. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
23. **Гордиенко В. М.** Матричные элементы вещественных представлений групп $O(3)$ и $SO(3)$ // Сиб. мат. журн. (В печати.)
24. **Имшенник В. С., Боброва Н. А.** Динамика столкновительной плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1997.
25. **Забродин А. В., Прокопов Г. П.** Методика численного моделирования двумерных нестационарных течений теплопроводного газа в трехтемпературном приближении. М., 1998. С. 24. (Препр. / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша РАН; № 25).
26. **Прокопов Г. П.** Аппроксимация уравнений состояния в трехтемпературной модели нестационарных течений теплопроводного газа. М., 2000. С. 21. (Препр. / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша РАН; № 32).

Поступила в редакцию 28/VI 2001 г.