

ЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КАВЕРНЕ ПРИ СРЕДНИХ И ВЫСОКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

И. А. Белов, С. А. Исеев

(Ленинград)

Исследование циркуляционного движения жидкости в прямоугольной каверне, которое индуцируется перемещением с постоянной скоростью одной из границ каверны, связано, как показали предыдущие исследования (см., например, [1—4]), с повышением качества моделирования двумерных вязких течений. Суть проблемы заключается в том, что уравнения Навье — Стокса, используемые для описания такого типа течений, становятся при больших числах Рейнольдса (здесь число Рейнольдса $Re = U^*H^*/\nu^*$, где U^* — скорость подвижной границы, H^* — длина подвижной границы, ν^* — коэффициент кинематической вязкости, индексом * обозначены размерные величины), начиная с Re порядка 10^3 , уравнениями с малым параметром при диффузионном члене. Использование конечно-разностных методов для решения уравнений Навье — Стокса вводит в решение задачи искусственную вязкость, обусловленную ошибками аппроксимации, которая для некоторых схем при сравнительно небольших числах Рейнольдса ($Re \sim 500$) может превысить по величине физическую вязкость и исказить решение задачи. Как установлено в [2], схемы первого порядка аппроксимации с разностями, ориентированными против потока, реализуют течение жидкости с некоторым эффективным числом Рейнольдса, которое существенно меньше физического числа Рейнольдса, что приводит к снижению интенсивности циркуляционного течения с ростом числа Рейнольдса [2]. Недостаточно точные, а в ряде случаев и ошибочные результаты получаются при использовании грубых сеток, особенно с равномерным распределением узлов в расчетной области [5]. Поэтому в последнее время наметилась тенденция [4] использовать для решения задачи схемы повышенного порядка аппроксимации в сочетании с неравномерными сетками, узлы которых сгущаются в областях с большими градиентами определяющих течение параметров.

В данной работе рассматриваются плоские прямоугольные каверны с различными отношениями A глубины L^* к ширине H^* . Исходная система нестационарных уравнений Навье — Стокса записывается в переменных завихренности — функции тока в преобразованной системе координат с целью сгущения сеточных линий в областях резкого изменения параметров вблизи стенок. Физические координаты (x, y) связаны с преобразованными (ξ, η) выражениями вида

$$z = D \{ \xi - b/(2\pi) \sin(2\pi\xi) \}, \quad 0 \leq \xi < 0,5,$$

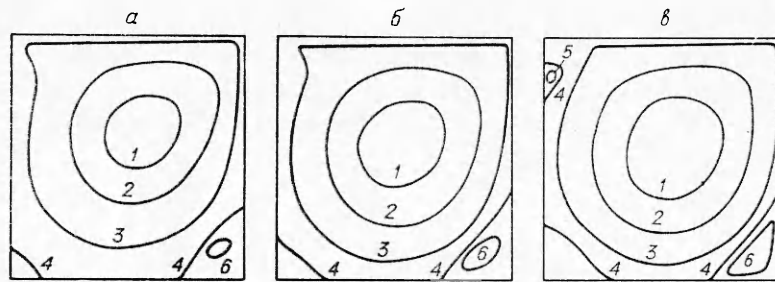
$$z = D \{ \xi + b/(2\pi) \sin[2\pi(\xi - 0,5)] \}, \quad 0,5 \leq \xi \leq 1.$$

Здесь для $z \equiv x$ и $\xi \equiv \xi$ $D = 1$, а для $z \equiv y$, $\xi \equiv \eta$ $D = A$. Все физические переменные и линейные размеры в задаче нормированы с помощью характерных величин U^* и H^* .

В качестве граничных условий используются условия прилипания и условие равенства нулю функции тока на всех стенках. Стационарное решение задачи определяется в ходе установления во времени, начиная от состояния, при котором жидкость в каверне покоится.

Численное решение задачи осуществляется пошаговым интегрированием во времени уравнения переноса вихря с использованием явной трехслойной схемы Адамса — Бэшфорта второго порядка аппроксимации. Конвективные члены в этом уравнении представляются схемами Аракавы [6] второго и четвертого порядка аппроксимации, а остальные производные по пространственным координатам в системе уравнений аппроксимируются центральными разностями. Для уравнения связи завихренности и функции тока, которое решается на каждом временном шаге, используется итерационная схема Гаусса — Зайделя с применением техники верхней релаксации. Граничные условия для завихренности определяются по схеме Вудса [2] второго порядка аппроксимации. Шаг по времени устанавливается численным экспериментом.

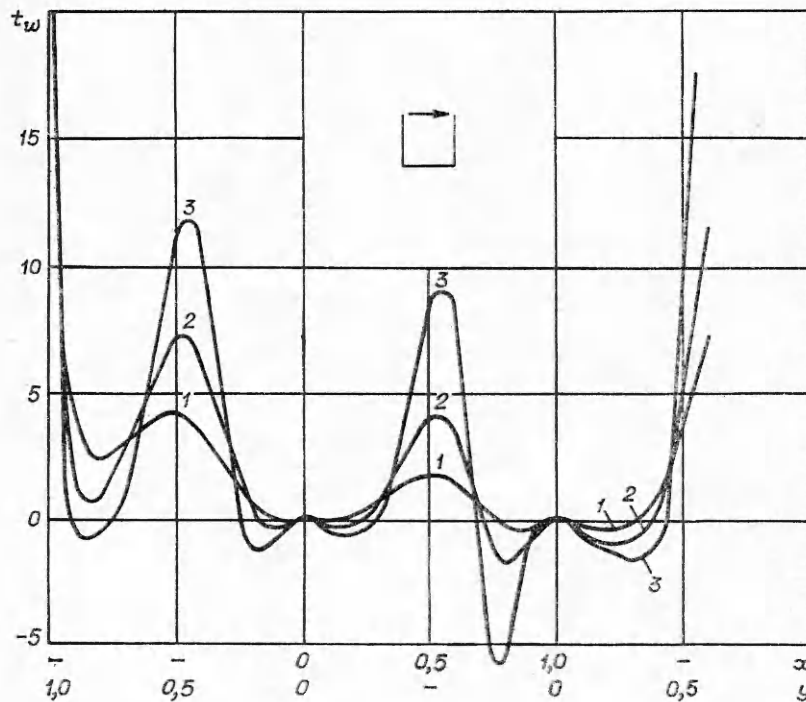
Следует отметить, что данный подход к решению задачи обладает некоторыми положительными свойствами, учитывающими характерные особенности течения. Известно для квадратной каверны [2], что с ростом чис-



Ф и г. 1

ла Рейнольдса влияние вязкости на течение локализуется в окрестности стенок каверны, в то время как в центральной области каверны формируется невязкое ядро. Использование разностных сеток с малым пространственным шагом вблизи стенок позволяет достаточно точно воспроизвести вязкие свойства течения, а применение схем Аракавы, обладающих свойством сохранения средних величин завихренности, квадрата вихря и кинетической энергии [6], дает возможность передать без искажения структуру идеального течения (кинетическая энергия и квадрат вихря переносятся в двумерной области от одного узла сетки к другому без фиктивного роста или уменьшения).

Численные расчеты течений вязкой жидкости выполнены для квадратной каверны при изменении числа Рейнольдса от 100 до 2500, а также при $Re = 1000$ для прямоугольных каверн с изменением величины параметра A в пределах от 0,5 до 2,0. Анализируются стационарные решения, полученные в ходе эволюции течения во времени. Количество временных шагов до установления процесса оказывается зависимым от размеров области, числа Рейнольдса и количества расчетных точек и изменяется примерно от 1000 до 2500.

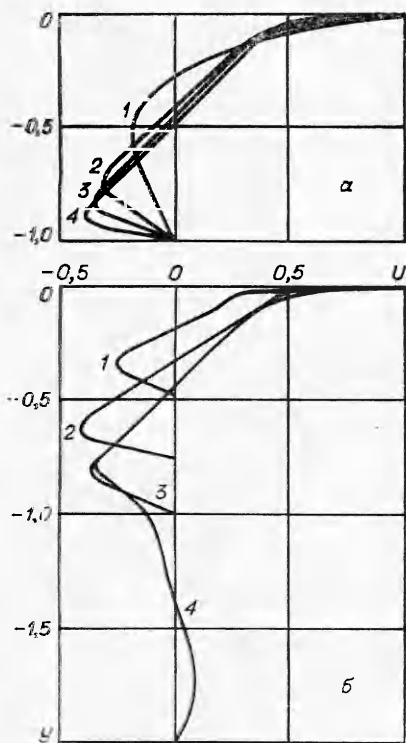


Ф и г. 2

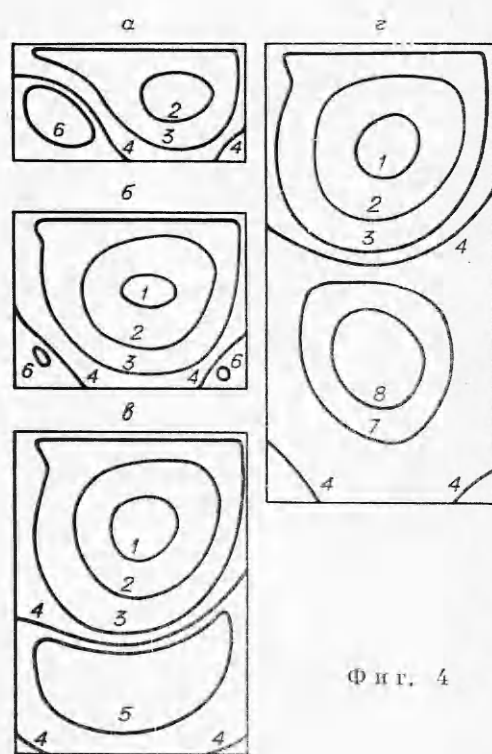
На фиг. 1, *a—e* представлены картины линий тока в квадратной каверне при $Re = 400; 1000; 2500$ соответственно (линии тока соответствуют постоянным значениям функции тока: кривая 1 — $\psi = -0,10$, 2 — $\psi = -0,06$, 3 — $\psi = -0,01$, 4 — $\psi = 0$, 5 — $\psi = 0,0001$, 6 — $\psi = 0,001$). Структура течения как для средних, так и для больших чисел Рейнольдса характеризуется наличием развитого центрального вихря и пары вторичных угловых вихрей меньшей интенсивности. Следует подчеркнуть, что с ростом числа Рейнольдса происходит увеличение, а не уменьшение, как указывается в [2], вторичных вихрей в нижних углах каверны. Центральный вихрь в каверне растет, но не стремится занять всю область каверны, как это предполагается в предельном случае течения при $Re \rightarrow \infty$ в [1]. Можно отметить тенденцию к стабилизации размеров угловых вихрей при числах Рейнольдса, больших 1000. Интересная особенность структуры течения — возникновение и рост, начиная с $Re = 1500$, вторичного вихря в окрестности подвижной границы. Последний результат хорошо согласуется с данными о структуре течения для чисел Рейнольдса 2000 и 4000, приведенными в [3, 4].

На фиг. 2 показан график распределения трения на стенках квадратной каверны при $Re = 400; 1000; 2500$ (кривые 1—3 соответственно). С увеличением числа Рейнольдса наблюдается рост по абсолютной величине трения на всех поверхностях каверны, причем максимум трения по дне каверны растет примерно пропорционально изменению числа Рейнольдса. Отметим существование значительных величин трения в зоне действия вторичного углового вихря у задней стенки каверны (второй по потоку вертикальной стенки), а также перемену знака величины трения на передней стенке вблизи подвижной границы.

На фиг. 3, *a* показаны профили продольной составляющей скорости в среднем вертикальном сечении квадратной каверны при $Re = 100; 400; 1000; 2500$ (кривые 1—4 соответственно). С увеличением числа Рейнольдса растет скорость циркуляционного течения от 0,2 при $Re = 100$ до 0,41



Фиг. 3



Фиг. 4

при $Re=2500$, а максимум скорости приближается к дну каверны. Таким образом, имеет место интенсификация течения в центральном вихре, увеличение его размеров. Анализ профилей скорости подтверждает в принципе идею Бэтчелора [1] о росте идеального ядра постоянной завихренности в центральной зоне каверны, а также о локализации вязких эффектов в малой окрестности стенок каверны.

На фиг. 3, б показаны профили продольной составляющей скорости в среднем вертикальном сечении при $Re = 1000$ для прямоугольных каверн с величиной $A = 0,5; 0,75; 1,0$ и $2,0$ (кривые 1—4 соответственно). При увеличении A от $0,5$ до $0,75$ максимум продольной составляющей скорости растет, а затем при A больше $0,75$ несколько уменьшается. Отметим, что для каверн с параметрами A , равными $1,0$ и $2,0$, профили продольной составляющей скорости в центральном вихре совпадают. Интенсивность течения во вторичном вихре для каверны $A = 2,0$ намного меньше, чем в основном вихре; максимальная величина продольной составляющей скорости не превышает $0,06$.

На фиг. 4, а—г представлены картины линий тока при $Re = 1000$ для прямоугольных каверн $A = 0,5; 0,75; 1,4$ и $2,0$ соответственно (линии тока соответствуют постоянным значениям функции тока: кривая 1 — $\psi = -0,10$, 2 — $\psi = -0,06$, 3 — $\psi = -0,01$, 4 — $\psi = 0$, 5 — $\psi = 0,0001$, 6 — $\psi = 0,001$, 7 — $\psi = 0,01$, 8 — $\psi = 0,02$). При малых глубинах каверны ($A = 0,5$) структура течения характеризуется наличием двух крупномасштабных вихрей: развитого центрального вихря, занимающего большую часть области, и менее интенсивного вихря в угловой зоне за передней стенкой. Структура последнего вихря в некоторой степени аналогична структуре течения в следе за плохообтекаемым телом. Вторичный вихрь у задней стенки является мелкомасштабным и обладает малой интенсивностью. С увеличением глубины каверны от $0,5$ до $1,0$ (фиг. 4, а, б и фиг. 1, б) происходят рост размеров и интенсивности центрального вихря, а также постепенная перестройка структуры угловых вихрей, проявляющаяся в уменьшении размера вихря у передней стенки и в увеличении размера вихря у задней стенки. При дальнейшем увеличении глубины каверны (фиг. 4, в, г) эволюция структуры центрального вихря заканчивается, размеры вихря и интенсивность течения в нем стабилизируются и уже не зависят от изменения глубины, начиная с $A = 1,0$. Однако угловые вихри по-прежнему растут, затем сливаются, образуя единый вторичный вихрь, который занимает всю ширину каверны и вращается в сторону, противоположную направлению вращения центрального вихря. С ростом A происходит усиление вторичного вихря, скорость течения в нем увеличивается, но он все же остается намного слабее центрального вихря. Для каверн с $A = 1,4$ и $2,0$ отмечено образование вихрей в нижних углах каверны и их рост с изменением глубины каверны. Последнее обстоятельство соответствует замеченной в опытах тенденции к развитию в глубокой каверне системы вертикально расположенных крупномасштабных вихрей, интенсивность которых убывает по мере приближения к дну каверны. Вихри отделены друг от друга довольно широкой зоной смещения, причем, как показывает сопоставительный анализ результатов, приведенных на фиг. 3, б и 4, во вторичном вихре также можно выделить ядро постоянной завихренности.

Поступила 4 XII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Burggraf O. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows.— J. Fluid Mech., 1966, vol. 24, pt 1.
2. Bozeman J. D., Dalton C. Numerical study of viscous flow in a cavity.— J. Comput. Phys., 1973, vol. 12, N 3.
3. Davis G., Mallinson G. D. An evaluation of upwind and central difference approximations by a study of recirculating flow.— Computer and Fluids, 1976, vol. 4, p. 29.
4. Bofoux P., Forrester B., Roux B. Analysis of higher order methods for the numerical

simulation of confined flows.— In: Proceeding of the 6th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Vol. 1. Tbilisi, 1978.

5. Кускова Т. В. Численное исследование двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. М.: изд. МГУ, 1972, вып. 3.
6. Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equation of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. Pt 1.— J. Comput. Phys., 1966, vol. 1, N 1.

УДК 532.522 : 532.135

ДИНАМИКА ИЗГИБНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СТРУЙ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ, ДВИЖУЩИХСЯ В ВОЗДУХЕ

А. Л. Ярин

(Москва)

Причиной распада высокоскоростных ламинарных струй весьма вязких капельных жидкостей является нарастание изгибных (поперечных) возмущений, вызванное динамическим воздействием окружающего воздуха, давление которого на вогнутых участках поверхности струи больше, чем на выпуклых. Для струй ньютоновской жидкости подобный процесс исследован в работах [1, 2] с помощью квазиодномерной асимптотической системы уравнений динамики струй капельной жидкости [1, 3], а также путем приближенного рассмотрения энергетического баланса [1]. В данной работе теория [1, 3] обобщается на случай струй нелинейно-вязких (степенных) жидкостей, вязкость которых зависит от скорости деформации.

1. Рассмотрим баланс энергии струи кругового сечения во встречном потоке воздуха, считая, что ее изгиб под действием поперечных возмущений плоский. Будем пренебрегать силами трения и лобового сопротивления, действующими на струю со стороны воздуха, что позволяет приближенно представить плоское изгибное возмущение оси струи одной гармоникой (даже на нелинейной стадии роста, пока амплитуда возмущения не слишком велика):

$$(1.1) \quad H = A(t) \sin(\chi s/a_0),$$

где χ — безразмерное волновое число ($\chi = 2\pi a_0/l$, l — длина волны возмущения); a_0 — начальный радиус струи; t — время; s — координата, отсчитываемая вдоль оси невозмущенной струи.

Работа L за время dt линейно распределенной аэродинамической «подъемной» силы q , приложенной к полуволне возмущенной струи, и кинетическая энергия E этого отрезка струи определяются соотношениями

$$(1.2) \quad L = \int_0^{\pi a_0/\chi} q_n H_{,t} ds dt, \quad E = \frac{\rho f}{2} \int_0^{\pi a_0/\chi} H_{,t}^2 \lambda ds, \quad \lambda = \sqrt{1 + H_{,s}^2}$$

(ρ — плотность жидкости).

Выражениями для проекции аэродинамической силы на нормаль к оси струи q_n и площади сечения струи f будут [1]

$$(1.3) \quad q_n = -\rho_1 U_0^2 f H_{,ss} (1 + H_{,s}^2)^{-5/2}, \quad f = \pi a^2 = \pi^2 a_0^3 \left[\chi \int_0^{\pi a_0/\chi} \lambda ds \right],$$

где ρ_1 — плотность воздуха; U_0 — скорость движения струи.

Растяжение струи при изгибе ведет к изменению поверхностной энергии $E_1 = \alpha \int_0^{\pi a_0/\chi} 2\pi a \lambda ds$ (α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости).