

сия стержней, неустойчивы при любом μ . Комплексно-сопряженные решения, отвечающие колебательным режимам стержней, в случае а устойчивы при $\mu < 0$ (рис. 6, кривая 1), в случае в неустойчивы при любом μ , а при $\mu < 0$ фазовая траектория имеет вид кривой 2. В случае б колебательный режим представляет собой предельный цикл при $\mu < 0$ (кривая 3). Здесь, так же как и в п. 2, в каждом из случаев а — в различным решениям системы (2.9) соответствуют стержни разной длины. При комплексно-сопряженных решениях длины стержней совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боднар Т. А. Устойчивость эйлера стержня. Нелинейный анализ // ПМТФ.— 1993.— № 2.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем.— М.: Наука, 1967.
3. Йосе Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.— М.: Мир, 1983.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Физматгиз, 1964.

г. Бийск

Поступила 7/II 1992 г.

УДК 677.017

Б. С. Резников, И. Ю. Шалагинова

СТРУКТУРНЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ПОЛЗУЧЕСТИ МЯГКИХ КОМПОЗИТОВ ВОЛОКНИСТОЙ ОСНОВЫ

Клееные волокнистые материалы, являющиеся мягкими композитами, находят широкое применение в промышленности. Поэтому проблема прогнозирования их физико-механических свойств актуальна.

В настоящее время при описании деформирования и разрушения нетканых клееных материалов в основном используется феноменологический подход [1—3], который не позволяет в полной мере учитывать структуру материала, физико-механические свойства волокон и связующего, пористость и т. д., а тем самым вести целенаправленный поиск новых материалов с заданными эксплуатационными свойствами. В данной работе на основе структурной модели [4] исследуется ползучесть мягкого композита с учетом линейных вязкоупругих свойств связующего и волокон.

При одноосном растяжении вдоль оси Oy напряжением σ в указанной механической модели волокнистого композита возникает двухосное напряженное состояние, для которого в [4] выведены уравнения статического равновесия

$$(1) \quad \sigma(1 - \Omega_x) = \sigma_z \Omega_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \Omega_y, \quad \sigma_x \Omega_x + \sigma_z \Omega_z \sin^2 \alpha = 0$$

и условия совместности деформаций (в случае, когда они считаются малыми)

$$(2) \quad \begin{aligned} (1 + \varepsilon_z)^2 &= (1 + \varepsilon_x)^2 \sin^2 \alpha_0 + (1 + \varepsilon_y)^2 \cos^2 \alpha_0, \\ (1 + \varepsilon_y) \operatorname{tg} \alpha &= (1 + \varepsilon_x) \operatorname{tg} \alpha_0 \quad \forall \sigma \geq 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

В соотношениях (1), (2) использованы обозначения из [4], укажем только, что здесь и в дальнейшем все величины с индексами x , y относятся к связующему, а с z — к волокнам, t — время.

Чтобы замкнуть систему уравнений (1), (2), будем считать, что волокна и связующее подчиняются трехэлементной реологической модели вида

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \sigma_c + \nu_c \sigma_c = B_c \left(\frac{d}{dt} \varepsilon_c + \mu_c \varepsilon_c \right),$$

называемой телом Кельвина [5, 6]. Здесь B_c — мгновенный модуль; $B_c \mu_c / \nu_c$ — длительный модуль соответствующего элемента композиции; $c = \{x, y, z\}$. Если $B_x \neq B_y$ (или $\nu_x \neq \nu_y$, $\mu_x \neq \mu_y$), то имеем связующее с разными реологическими характеристиками при растяжении и сжатии.

Таким образом, система уравнений (1)–(3) полностью описывает реологическое поведение основы нетканого материала при одноосном внешнем воздействии. Определить в явном виде зависимость деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ от времени, например, в случае ползучести не представляется возможным в силу того, что уравнения (1), (2) нелинейные. Поэтому для создания алгоритма численного счета воспользуемся методом интегрирования «шагами по времени», который позволяет на каждом шаге по времени иметь линейную систему уравнений относительно приращений неизвестных величин. Для этого текущие значения действующих напряжений, напряжения и деформации в элементах композиции, угол армирования запишем в виде

$$(4) \quad \sigma_{m+1} = \sigma_m + \Delta_m \sigma, \quad \sigma_{c,m+1} = \sigma_{c,m} + \Delta_m \sigma_c, \quad \varepsilon_{c,m+1} = \varepsilon_{c,m} + \Delta_m \varepsilon_c, \\ \alpha_{m+1} = \alpha_m + \Delta_m \alpha \quad \forall t \in [t_m, t_m + \Delta_m t], \quad \Delta_m t = t_{m+1} - t_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $t_1 = 0$; $\sigma_1, \sigma_{c,1}, \varepsilon_{c,1}, \alpha_1$ — фиксированные величины, полученные при кратковременном нагружении; $c = \{x, y, z\}$.

Подставляя (4) в уравнения (1)–(3) и пренебрегая величинами 2-го порядка малости по сравнению с приращениями всех вышеуказанных величин, находим

$$(5) \quad (1 - \Omega_x) \Delta_m \sigma = \Omega_y \Delta_m \sigma_y + \Omega_x \operatorname{ctg}^2 \alpha_m \left(\frac{4\sigma_{x,m} \Delta_m \alpha}{\sin 2\alpha_m} - \Delta_m \sigma \right), \\ 0 = \Delta_m \sigma_x \Omega_x + \Omega_z (\Delta_m \sigma_z \sin^2 \alpha_m + \Delta_m \alpha \sigma_{z,m} \sin 2\alpha_m), \\ \lambda_{z,m} \Delta_m \varepsilon_z - \lambda_{x,m} \Delta_m \varepsilon_x \sin^2 \alpha_0 + \lambda_{y,m} \Delta_m \varepsilon_y \cos^2 \alpha_0, \\ \Delta_m \varepsilon_y \operatorname{tg} \alpha_m - \Delta_m \varepsilon_x \operatorname{tg} \alpha_0 + \Delta_m \alpha (\lambda_{y,m} + \lambda_{x,m} \operatorname{tg} \alpha_m \operatorname{tg} \alpha_0) = 0;$$

$$(6) \quad \frac{d}{dt} (\Delta_m \sigma_c) + \nu_c (\sigma_{c,m} + \Delta_m \sigma_c) = B_c \left[\frac{d}{dt} (\Delta_m \varepsilon_c) + \mu_c (\varepsilon_{c,m} + \Delta_m \varepsilon_c) \right]$$

($\lambda_{c,m} = 1 + \varepsilon_{c,m}$, $c = \{x, y, z\}$). Учитывалось, что $\sigma_{c,m}, \varepsilon_{c,m}, \alpha_m$ на каждом $(m+1)$ -м шаге по времени известны, а следовательно, от времени не зависят.

Из системы уравнений (5), (6) в случае ползучести, т. е. при $\Delta_m \sigma = 0 \quad \forall m$ и $\forall t \geq 0$, при начальных условиях

$$\Delta_m \sigma_c |_{t=t_m} = \Delta_m \varepsilon_c |_{t=t_m} = \Delta_m \alpha |_{t=t_m} = 0$$

нетрудно определить $\Delta_m \sigma_c, \Delta_m \varepsilon_c, \Delta_m \alpha \quad \forall t \in [t_m, t_m + \Delta_m t]$ в виде

$$X_m = A_{0,m} + \sum_{i=1}^3 A_{i,m} \exp [K_{i,m} (t - t_m)],$$

где $X_m = \{\Delta_m \sigma_c, \Delta_m \varepsilon_c, \Delta_m \alpha\}$; $A_{i,m} = \text{const}$.

Конкретные вычисления сделаны для $B_x = B_y = B$, $\mu_x = \mu_y = \mu$, $\nu_x = \nu_y = \nu$, $\mu_z = \nu_z = 0$, т. е. когда связующее является линейно-вязкоупругим (его реологические свойства одинаковы при растяжении и сжатии), а волокна — линейно-упругими. Для рассматриваемого случая из системы (5) определялись $\Delta \sigma_x, \Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \Delta \alpha$ через $\Delta \sigma_y, \Delta \sigma_z, \Delta \varepsilon_z$. Тогда (6) можно преобразовать в систему линейных дифференциальных уравнений относительно $\Delta \sigma_y, \Delta \sigma_z, \Delta \varepsilon_z$, характеристический многочлен которой имеет вид $I_{2,m}(K)^3 + I_{1,m}(K)^2 + I_{0,m}K$, где

$$I_{2,m} = \begin{vmatrix} a_{11,m} & a_{12,m} \\ a_{21,m} & a_{22,m} \end{vmatrix}, \quad I_{0,m} = \begin{vmatrix} a_{31,m} & a_{32,m} \\ a_{41,m} & a_{42,m} \end{vmatrix}, \\ I_{1,m} = \begin{vmatrix} a_{11,m} & a_{12,m} \\ a_{41,m} & a_{42,m} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31,m} & a_{32,m} \\ a_{21,m} & a_{22,m} \end{vmatrix}.$$

В силу громоздкости коэффициенты $a_{ij,m}$ ($i = \overline{1, 4}, j = \overline{1, 2}$) выписывать не будем, укажем лишь, что они зависят от $\nu, \mu, \lambda_{c,m}, \sigma_{c,m}, \alpha_m, \Gamma_1 = \Omega_y/\Omega_x, \Gamma_2 = \Omega_z/\Omega_x, B_z = B_z/B$. Здесь и в дальнейшем чертой обозначены безразмерные величины, полученные делением на модуль Юнга $B_x = B_y = B$. Тогда приращения на каждом m -м шаге имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_m \bar{\sigma}_y &= A_{0,m} - A_{1,m} C_{2,m} \exp[K_{1,m}(\tau - \tau_m)] + A_{2,m} C_{1,m} \exp[K_{2,m}(\tau - \tau_m)], \\ \Delta_m \varepsilon_z &= A_{3,m} + C_{2,m} \exp[K_{1,m}(\tau - \tau_m)] - C_{1,m} \exp[K_{2,m}(\tau - \tau_m)], \\ \Delta_m \bar{\sigma}_z &= \bar{B}_z \Delta_m \varepsilon_z, \quad \Delta_m \bar{\sigma}_x = -\Gamma_1 \Delta_m \bar{\sigma}_y - \Gamma_2 \Delta_m \bar{\sigma}_z, \\ \Delta_m \varepsilon_x &= \lambda_{x,m} [(\bar{B}_z \operatorname{ctg}^2 \alpha_m / (2\bar{\sigma}_{z,m}) - 1/\lambda_{z,m}) \Delta_m \varepsilon_z - \Gamma_1 \Delta_m \bar{\sigma}_y / (2\bar{\sigma}_{x,m})], \\ \Delta_m \varepsilon_y &= \lambda_{y,m} [(1/\lambda_{z,m} - \bar{B}_z / (2\bar{\sigma}_{z,m})) \Delta_m \varepsilon_z + \Gamma_1 \operatorname{tg}^2 \alpha_m \Delta_m \bar{\sigma}_y / (2\bar{\sigma}_{x,m})], \\ \Delta_m \alpha &= -\sin \alpha_m (\Gamma_1 \Delta_m \bar{\sigma}_y / \cos \alpha_m + \Gamma_2 \cos \alpha_m \Delta_m \bar{\sigma}_z) / (2\bar{\sigma}_{x,m}) \quad \forall \tau \in [\tau_m, \tau_{m+1}], \end{aligned}$$

где $\tau = \nu t$; $\tau_m = \nu t_m$; постоянные $C_{i,m}$ и $A_{i,m}$ ($i = \overline{1, 2}, j = \overline{0, 3}$) определяются через $a_{ij,m}$, характеристические корни и правые части системы (6). На основе полученного решения составлен алгоритм численного счета. Шаг по времени $\Delta_m \tau = \nu \Delta_m t$ выбирался из условия, что все приращения малы, т. е.

$$M = \max_{\tau \in [\tau_m, \tau_{m+1}]} \{ |\Delta_m \bar{\sigma}_c|, |\Delta_m \varepsilon_c|, |\Delta_m \alpha| / \pi; c = x, y, z \} \leq \delta.$$

Здесь $0 < \delta \ll 1$ — наперед заданное число, которое находится с учетом того, что величинами 2-го порядка малости относительно рассмотренных приращений можно пренебречь. Процесс счета заканчивается при выполнении одного из ограничений: 1) $\alpha_m = 0$ (с заданной степенью точности), 2) $M < \varepsilon \ll \delta$. Первое означает, что волокна расположились по направлению действия внешней нагрузки и поведение композита будет такое же, как и нитей, т. е. линейно-упругое; а второе показывает, что начиная с некоторого момента времени напряженно-деформированное состояние практически не меняется со временем.

На рис. 1 приведены результаты численного счета при параметрах $\delta = 10^{-2}, \varepsilon = 10^{-5}, B_z = 20, \alpha_0 = \pi/3, \mu/\nu = 10^{-2}$ и

$$(7a) \quad \bar{\sigma}_1 = 0,187, \quad \bar{\sigma}_{x,1} = -0,386, \quad \bar{\sigma}_{y,1} = 0,716, \quad \bar{\sigma}_{z,1} = 0,168, \quad \alpha_1 = 0,554;$$

$$(7б) \quad \bar{\sigma}_1 = 0,374, \quad \bar{\sigma}_{x,1} = -0,515, \quad \bar{\sigma}_{y,1} = 0,857, \quad \bar{\sigma}_{z,1} = 0,378, \quad \alpha_1 = 0,424,$$

которые взяты из [4] и соответствуют кратковременному нагружению при линейно-упругом поведении волокон и связующего. Кривые 1, 2 отвечают параметрам из (7а), (7б). Штриховыми линиями представлено изменение угла α между пересекающимися нитями во времени.

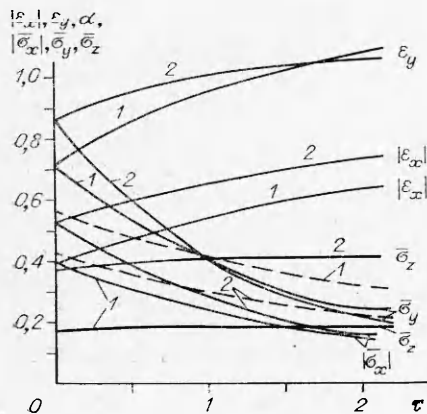


Рис. 1

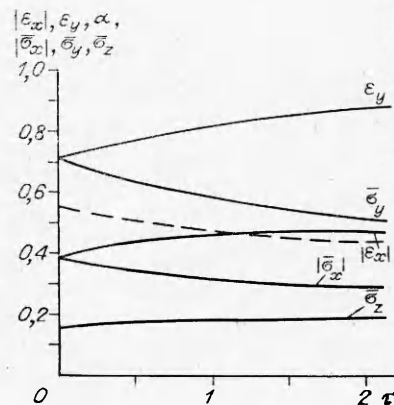


Рис. 2

Анализ полученных результатов показывает, что величина мгновенно приложенной нагрузки при длительном воздействии практически не влияет на продольную деформацию ϵ_y , продольное напряжение σ_y и поперечное напряжение σ_x , но значительно влияет на ϵ_x , α и σ_z . При этом напряжения в волокнах σ_z вследствие перераспределения усилий между элементами композиции зависят от времени, хотя и подчиняются закону Гука. Однако эта зависимость, как нетрудно заметить, незначительна (аналогичную имеем и для деформаций ϵ_z).

При изменении параметра μ/ν в пределах от 0 до 10^{-2} результаты численного счета показали, что напряженно-деформированное состояние композита практически совпадает с приведенным на рис. 1, а при $10^{-1} < \mu/\nu < 1$ значительно отличается. В качестве примера на рис. 2 представлены результаты при $\mu/\nu = 0,5$ для параметров (7а).

Таким образом, используемая математическая модель для волокнистой основы нетканого материала позволяет по реологическим характеристикам связующего и нитей оценить ползучесть композита при одноосном растяжении, а также определить продольную и поперечную деформации и учесть конечное изменение угла ориентации волокон во времени в процессе деформирования, что особенно важно при проектировании изделий из синтетических материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихомиров В. Б. Физико-химические основы получения нетканых материалов.— М.: Легкая индустрия, 1969.
2. Зыбин Ю. П., Авилов А. А., Гвоздев Ю. М., Чернов Н. В. Материаловедение изделий из кожи.— М.: Легкая индустрия, 1968.
3. Зарубян К. М., Краснов Б. Я., Бернштейн М. М. Материаловедение изделий из кожи: Учеб. для вузов.— М.: Легпромбытиздат, 1988.
4. Резников Б. С. Анализ нелинейного деформирования композитов с учетом конечных поворотов структурных элементов // ПМТФ.— 1991.— № 4.
5. Гольберг И. Н. Механическое поведение полимерных материалов (математическое описание).— М.: Химия, 1970.
6. Работнов Ю. П. Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.

г. Новосибирск

Поступила 3/III 1992 г.,
в окончательном варианте — 24/III 1992 г.

УДК 539.376

М. Н. Кирсанов

НАЧАЛЬНОЕ ЗАКРТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается выпучивание сжатого стержня при неустановившейся ползучести материала. В известных условных критериях неустойчивости [1] момент выпучивания связывался с характером изменения прогиба стержня после приложения возмущения. Критерий [2] определяет момент возмущения, при котором скорость прогиба равна нулю, как особую точку на шкале времени, отделяющую условно-устойчивое деформирование от неустойчивого. В соответствии с этим критерием устойчивость означает уменьшение прогиба в первый момент возмущения. Аналогично равенство нулю ускорения прогиба [3] определяет еще одну особую точку процесса деформирования. Идея выделения точек такого типа была обобщена на высшие производные [4]. Полученные точки названы псевдобифуркационными. При их определении производные по времени всех порядков от прогиба (кроме одного, соответствующего порядку псевдобифуркации) полагались равными нулю.

© М. Н. Кирсанов, 1993