УДК 533.6.011 + 517.948.34

МОДЕЛЬ СИЛЬНОГО РАЗРЫВА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДЛИННЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ НА СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. М. Тешуков, А. К. Хе

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: teshukov@hydro.nsc.ru, alekhe@hydro.nsc.ru

Уравнения длинноволнового приближения, описывающие сдвиговые трехмерные волновые движения идеальной жидкости со свободной поверхностью, преобразованные к специальному виду, использованы для описания разрывных решений. Выведены соотношения на фронте разрыва, сформулированы условия устойчивости разрыва. Исследована задача об определении параметров потока за фронтом разрыва по известным параметрам перед фронтом и заданной скорости его движения.

Ключевые слова: вихревая мелкая вода, гидравлический прыжок, интегродифференциальные уравнения.

Введение. Рассматривается математическая модель, описывающая в длинноволновом приближении сдвиговые трехмерные течения тяжелой несжимаемой идеальной жидкости над ровным дном со свободной поверхностью. Эта модель, обобщающая классическую модель теории мелкой воды, сводится к системе интегродифференциальных уравнений. В отличие от классической модели для интегродифференциальной модели распространение нелинейных волновых возмущений изучено в меньшей степени. В работах [1–4] на основе развитого нового математического аппарата предложены новые подходы к решению этих вопросов. В работе [1] найдены обобщенные характеристики и сформулированы условия гиперболичности для системы интегродифференциальных уравнений, описывающих в приближении теории мелкой воды трехмерные стационарные сдвиговые течения идеальной жидкости в слое со свободной границей. В работе [2] изучены пространственные простые волны, описываемые указанной системой уравнений. Определение разрывных решений для математической модели сдвиговых плоскопараллельных течений несжимаемой жидкости предложено в работе [3]. Там же проанализированы свойства соотношений на сильных разрывах. Для модели плоскопараллельных течений баротропной жидкости аналогичный анализ проведен в [4]. В работе [5] новые подходы применены к описанию процесса взаимодействия сдвиговых потоков идеальной несжимаемой жидкости. Задачи сопряжения различных фильтрационных и каналовых течений вязкой несжимаемой жидкости, а также различных математических моделей двухфазных жидкостей изучались в [6, 7].

В данной работе рассматривается пространственная задача сопряжения неодномерных потоков идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Сформулированы соотношения на фронте разрыва и условия устойчивости разрывного течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00609), Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5245.2006.1) и Международного фонда INTAS (код проекта 05-109-4107).

1. Постановка задачи. Рассматривается система уравнений

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z + p_x/\rho = 0, \qquad v_t + uv_x + vv_y + wv_z + p_y/\rho = 0, \\ p_z = -\rho g, \qquad u_x + v_y + w_z = 0, \tag{1.1}$$

описывающая в длинноволновом приближении пространственные течения идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Система (1.1) получается из точных уравнений Эйлера с помощью асимптотического разложения по малому параметру $\varepsilon = H_0/L_0$ (H_0, L_0 — характерные вертикальный и горизонтальный масштабы; предполагается, что $H_0/L_0 \ll 1$). Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости жидкости; p — давление; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность; t — время; x, y, z — декартовы координаты в пространстве.

В дальнейшем будем рассматривать течение жидкости в слое со свободной границей $0 \leqslant z \leqslant h(t,x,y)$. На свободной поверхности $z = h(t,x,y)$ давление задается постоянным: $p = p_0$. На границах слоя жидкости должны выполняться кинематические условия $w = 0$ при $z = 0$ и $w = h_t + uh_x + vh_y$ при $z = h$.

В начальный момент времени $t = 0$ задаются поле скоростей и форма свободной поверхности:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y,z), \quad v\big|_{t=0} = v_0(x,y,z), \quad w\big|_{t=0} = w_0(x,y,z), \quad h\big|_{t=0} = h_0(x,y).$$

Задача со свободной границей для системы уравнений (1.1) имеет точные решения, характеризуемые соотношениями $u_z = 0$, $v_z = 0$. В этом классе движения со свободной границей описываются классическими уравнениями мелкой воды

$$u_t + uu_x + vu_y + gh_x = 0, \qquad v_t + uv_x + vv_y + gh_y = 0, \\ h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0.$$

Рассмотрим сдвиговые течения общего вида, характеризуемые неравенством $u_z^2 + v_z^2 \neq 0$. При моделировании этих течений возникают более сложные интегродифференциальные системы уравнений, которые будут рассмотрены ниже.

Анализ сдвиговых течений со свободной границей удобно проводить в смешанных эйлерово-лагранжевых координатах x', y', λ, так как в этих координатах неизвестная граница фиксируется. Переход к новым координатам осуществляется с помощью формул [2]:

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad \Phi(t,x',y',\lambda) = z.$$

Здесь функция $\Phi(t,x',y',\lambda)$ является решением задачи Коши

$$\Phi_t + u(t,x,y,\Phi)\,\Phi_x + v(t,x,y,\Phi)\,\Phi_y = w(t,x,y,\Phi), \qquad \Phi\big|_{t=0} = \Phi_0(x,y,\lambda).$$

Функция $\Phi_0(x,y,\lambda)$ выбирается таким образом, чтобы значение $\lambda = 0$ соответствовало ровному дну ($\Phi_0(x,y,0) = 0$), а $\lambda = 1$ — свободной поверхности ($\Phi_0(x,y,1) = h_0(x,y)$). В новых переменных области, занятой жидкостью, соответствует фиксированный слой $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, а система уравнений пространственных течений принимает вид

$$u_t + uu_x + vu_y + gh_x = 0, \qquad v_t + uv_x + vv_y + gh_y = 0, \\ H_t + (uH)_x + (vH)_y = 0. \tag{1.2}$$

Эта система служит для определения функций $u(t,x,y,\lambda)$, $v(t,x,y,\lambda)$, $H(t,x,y,\lambda)$. В (1.2) введена новая искомая функция $H(t,x,y,\lambda) = \Phi_\lambda(t,x,y,\lambda)$, связанная с глубиной слоя жидкости h соотношением $h = \displaystyle\int\limits_0^1 H\,d\lambda$.

2. Обобщенные решения уравнений длинных волн. Как показывают примеры плоскопараллельных течений, для системы (1.2) характерно разрушение гладких решений за конечное время, что приводит к необходимости изучения обобщенных решений в классах разрывных функций. Обычно разрывные решения вводятся при записи уравнений движения в виде законов сохранения. Однако уравнения (1.2) не записываются в дивергентной форме. Проблема определения разрывных решений недивергентных уравнений давно привлекает внимание специалистов. В данной работе разрывные решения определяются с использованием следующей недивергентной формы уравнений (1.2):

$$
\begin{gathered}
u_{\lambda t} + \Big(\frac{u^2+v^2}{2}\Big)_{\lambda x} - (v(v_x - u_y))_\lambda = 0, \qquad v_{\lambda t} + \Big(\frac{u^2+v^2}{2}\Big)_{\lambda y} + (u(v_x - u_y))_\lambda = 0,\\
H_t + (uH)_x + (vH)_y = 0,\\
\Big(\int_0^1 Hu\,d\lambda\Big)_t + \Big(\int_0^1 Hu^2\,d\lambda + \frac{gh^2}{2}\Big)_x + \Big(\int_0^1 Huv\,d\lambda\Big)_y = 0,\\
\Big(\int_0^1 Hv\,d\lambda\Big)_t + \Big(\int_0^1 Huv\,d\lambda\Big)_x + \Big(\int_0^1 Hv^2\,d\lambda + \frac{gh^2}{2}\Big)_y = 0.
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

Отметим, что на гладких решениях система уравнений (2.1) эквивалентна системе (1.2).

3. Соотношения на сильном разрыве. Рассмотрим класс обобщенных решений уравнений (2.1), описывающих течения с сильным разрывом. Будем предполагать, что решение имеет разрыв первого рода на цилиндрической поверхности Γ в пространстве переменных (t, x, y, λ), заданной уравнением $S(t, x, y) = 0$, а по обе стороны от поверхности является непрерывно дифференцируемым. Вектор нормали $\boldsymbol{\xi}$ к Γ в пространстве переменных (t, x, y) имеет вид

$$
\boldsymbol{\xi} = (\tau, \xi, \eta) = \frac{(S_t, S_x, S_y)}{\sqrt{S_t^2 + S_x^2 + S_y^2}}.
$$

Пусть $\boldsymbol{u} = (u, v)$ — проекция вектора скорости на горизонтальную плоскость. Введем нормальный $\boldsymbol{n} = (\xi, \eta)/\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ и касательный $\boldsymbol{\tau} = (-\eta, \xi)/\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ векторы к фронту разрыва Γ_t — сечению поверхности Γ плоскостью $t = \mathrm{const}$. Затем определим на Γ_t касательную $u_\tau = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau}$ и нормальную $u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$ компоненты вектора скорости, а также скорость движения фронта разрыва Γ_t $D_n = -\tau/\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Квадратные скобки обозначают скачок функции при переходе через разрыв: $[f] = f_2 - f_1$, где f_2, f_1 — предельные значения f с двух сторон от поверхности разрыва.

Рассмотрим решения системы (2.1) в классе функций, характеризуемом следующим свойством: функции u, v, H, а также вертикальная компонента вектора вихря $v_x - u_y$ и их производные по переменной λ являются разрывными кусочно-гладкими функциями, имеющими разрыв первого рода на поверхности Γ. Выясним условия, которым в этом случае должен удовлетворять скачок вектора скорости на Γ. Пусть Ω — область в пространстве (t, x, y, λ), расположенная по обе стороны от Γ, φ — гладкая пробная функция, обращающаяся в нуль на границе области Ω. Интегрированием по частям получим формулу

$$
\int_\Omega (v_x - u_y)\varphi\,d\Omega = \int_\Omega (-v\varphi_x + u\varphi_y)\,d\Omega + \int_{\Gamma_\Delta} [u_\tau]\varphi\,d\Sigma. \tag{3.1}
$$

Здесь Γ_Δ — часть поверхности Γ, принадлежащая области Ω. Рассмотрим последовательность областей Ω_k $(k \to \infty)$, таких что объем области стремится к нулю при $k \to \infty$, а

$\bigcap\limits_k \Omega_k = \Gamma_\Delta$. Так как функция $v_x - u_y$ локально интегрируема, то интегралы по области Ω_k в формуле (3.1) стремятся к нулю, тогда в силу произвольности φ и Γ_Δ на Γ должно выполняться соотношение

$$[u_\tau] = 0. \tag{3.2}$$

Следовательно, в выбранном классе функций на фронте разрыва выполняется условие (3.2).

Выясним, какие соотношения на сильном разрыве можно получить из уравнений (2.1) в указанном выше классе решений. При выводе этих соотношений уравнения (2.1) интегрируются по аналогичным областям Ω_k, при этом учитывается, что в рассматриваемом классе функций

$$\int\limits_{\Omega_k} ((v_x - u_y)u)_\lambda \varphi \, d\Omega \to 0, \qquad \int\limits_{\Omega_k} ((v_x - u_y)v)_\lambda \varphi \, d\Omega \to 0 \tag{3.3}$$

при $k \to \infty$.

Аналогично тому как описано выше, используя (3.3), получаем соотношения на разрыве

$$[H(u_n - D_n)] = 0, \qquad [-D_n \boldsymbol{u}_\lambda + (|\boldsymbol{u}|^2/2)_\lambda \boldsymbol{n}] = 0; \tag{3.4}$$

$$\Big[\int\limits_0^1 H(u_n - D_n)\boldsymbol{u} \, d\lambda + \frac{gh^2}{2}\,\boldsymbol{n}\Big] = 0. \tag{3.5}$$

Умножая второе уравнение системы (3.4) на касательный и нормальный векторы, получаем соответственно следующие соотношения:

$$D_n[u_\tau]_\lambda = 0, \qquad [(u_n - D_n)^2 + u_\tau^2]_\lambda = 0. \tag{3.6}$$

Первое соотношение в выбранном классе функций выполнено в силу (3.2). Учитывая (3.2), второе соотношение в (3.6) можно записать в виде

$$[(u_n - D_n)^2]_\lambda = 0. \tag{3.7}$$

Умножая скалярно уравнение (3.5) на касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$, получаем равенство

$$\int\limits_0^1 H(u_n - D_n)[u_\tau] \, d\lambda = 0,$$

которое выполняется автоматически в силу (3.2). Умножая уравнения (3.5) скалярно на нормальный вектор $\boldsymbol{n}$, после некоторых преобразований получаем следующее соотношение на скачке:

$$\Big[\int\limits_0^1 H(u_n - D_n)^2 \, d\lambda + \frac{gh^2}{2}\Big] = 0. \tag{3.8}$$

Таким образом, введенное определение класса решений является согласованным с системой соотношений на разрыве. В этом классе ряд соотношений, следующих из (2.1), выполняется автоматически в силу выбора класса, а на фронте разрыва нужно удовлетворить только первому соотношению в (3.4) и соотношениям (3.7), (3.8).

Из системы уравнений (1.2) можно также получить дифференциальный закон сохранения полной энергии жидкого слоя

$$\Big(\int\limits_0^1 H\,\frac{u^2+v^2}{2}\,d\lambda+\frac{gh^2}{2}\Big)_t+\Big(\int\limits_0^1 Hu\Big(\frac{u^2+v^2}{2}+gh\Big)\,d\lambda\Big)_x+{}$$
$$+\Big(\int\limits_0^1 Hv\Big(\frac{u^2+v^2}{2}+gh\Big)\,d\lambda\Big)_y=0.$$

Пусть на фронте скачка выполняется неравенство $[u_n-D_n]\neq 0$. Ту сторону фронта скачка, с которой жидкость натекает на фронт, будем называть стороной перед скачком, а другую сторону — стороной за скачком. Ниже величины с индексом 2 соответствуют состоянию за скачком, а нормаль к фронту скачка направлена в сторону состояния за скачком. Потребуем, чтобы на скачке выполнялось условие убывания полной энергии жидкого слоя

$$\Big[\int\limits_0^1 H(u_n-D_n)\Big(\frac{(u_n-D_n)^2}{2}+gh\Big)\,d\lambda\Big]\leqslant 0 \qquad (3.9)$$

(знак равенства в (3.9) соответствует сохранению энергии при переходе через скачок). Используя соотношения (3.4) и (3.7), это условие можно записать в виде

$$\Big[\frac{(u_n-D_n)^2}{2}+gh\Big]\int\limits_0^1 H(u_n-D_n)\,d\lambda\leqslant 0.$$

Так как в силу выбора направления нормали $u_n-D_n>0$, то условие убывания энергии сводится к неравенству

$$\Big[\frac{(u_n-D_n)^2}{2}+gh\Big]=\Big(\frac{(u_{n2}-D_n)^2}{2}+gh_2\Big)-\Big(\frac{(u_{n1}-D_n)^2}{2}+gh_1\Big)\leqslant 0. \qquad (3.10)$$

Таким образом, получены система соотношений на разрыве (3.4), (3.7), (3.8) и условие устойчивости разрыва (3.10).

4. Свойство определенности системы соотношений на скачке. Докажем, что если известны скорость движения поверхности разрыва в направлении нормали D_n и параметры набегающего потока по одну сторону от разрыва, то система соотношений на разрыве позволяет определить параметры течения по другую сторону от разрыва.

Используя обозначение $v_n=u_n-D_n$, представим соотношения (3.4), (3.7), (3.8), (3.10) в виде

$$[Hv_n]=0; \qquad (4.1а)$$

$$\Big[\int\limits_0^1 Hv_n^2\,d\lambda+\frac{gh^2}{2}\Big]=0; \qquad (4.1б)$$

$$[v_n^2]_\lambda=0; \qquad (4.1в)$$

$$[v_n^2/2+gh]\leqslant 0. \qquad (4.1г)$$

Пусть известны параметры H_1, v_{n1}. Для доказательства сформулированного утверждения достаточно показать, что соотношения (4.1) позволяют однозначно определить параметры за скачком H_2, v_{n2}.

Интегрируя по переменной λ соотношение (4.1в), получаем равенство

$$v_{n2}^2 = v_{n1}^2 - K,$$

где K — неизвестная величина, не зависящая от λ. Используя это равенство и соотношение (4.1а), находим

$$v_{n2} = \pm\sqrt{v_{n1}^2 - K}, \qquad H_2 = \pm H_1 v_{n1} / \sqrt{v_{n1}^2 - K}\,. \tag{4.2}$$

В соответствии с выбором нормали (см. п. **3**) $v_{n1} > 0$, $v_{n2} > 0$, поэтому в (4.2) выбирается знак “+”. Подставляя найденные величины в соотношение (4.1б), получаем уравнение

$$\int\limits_0^1 H_1 v_{n1}\sqrt{v_{n1}^2 - K}\,d\lambda + \frac{g}{2}\Big(\int\limits_0^1 \frac{H_1 v_{n1}}{\sqrt{v_{n1}^2 - K}}\,d\lambda\Big)^2 = \int\limits_0^1 H_1 v_{n1}^2\,d\lambda + \frac{g}{2}\Big(\int\limits_0^1 H_1\,d\lambda\Big)^2$$

для определения неизвестной K. Если K найдено, то параметры течения за скачком определяются приведенными выше формулами (4.2).

Удобно ввести функцию $F(K)$, определенную при $K < K_* \equiv \min\limits_{\lambda} v_{n1}^2(\lambda)$ формулой

$$F(K) = \int\limits_0^1 H_1 v_{n1}\sqrt{v_{n1}^2 - K}\,d\lambda + \frac{g}{2}\Big(\int\limits_0^1 \frac{H_1 v_{n1}}{\sqrt{v_{n1}^2 - K}}\,d\lambda\Big)^2,$$

и преобразовать уравнение для K к виду

$$F(K) - F(0) = 0. \tag{4.3}$$

Согласно условию (4.1г) требуется найти корень уравнения (4.3), удовлетворяющий неравенству

$$G(K) = g(h_2 - h_1) + \frac{v_{n2}^2 - v_{n1}^2}{2} = g\int\limits_0^1 \frac{H_1 v_{n1}}{\sqrt{v_{n1}^2 - K}}\,d\lambda - g\int\limits_0^1 H_1\,d\lambda - \frac{K_1}{2} \leqslant 0.$$

Производная функции $F(K)$ вычисляется в виде

$$F'(K) = -\frac{\omega(K)}{2}\int\limits_0^1 \frac{H_1 v_{n1}}{\sqrt{v_{n1}^2 - K}}\,d\lambda = -\frac{1}{2}\,h_2(K)\,\omega(K) = h_2(K)\,G'(K), \tag{4.4}$$

где

$$\omega(K) = 1 - g\int\limits_0^1 \frac{H_1 v_{n1}}{(v_{n1}^2 - K)^{3/2}}\,d\lambda.$$

Заметим, что

$$G''(K) = -\frac{1}{2}\,\omega'(K) = \frac{3g}{4}\int\limits_0^1 \frac{H_1 v_{n1}}{(v_{n1}^2 - K)^{5/2}}\,d\lambda > 0$$

и, следовательно, функция $G(K)$ является выпуклой вниз. Предположим, что K_1 — корень уравнения (4.3), удовлетворяющий неравенству $G(K_1) \leqslant 0$. Покажем, что $G(K) < 0$ на промежутке $(0, K_1)$. Действительно, так как $F(K_1) = F(0)$, то в указанном промежутке найдется точка K_0, в которой $F'(K_0) = 0$. Согласно (4.4) в этой точке $G'(K_0) = 0$, а в силу неравенства $G''(K) > 0$ такая точка единственна. В точке K_0 функция $G(K)$ достигает единственного отрицательного минимума, а ее максимальное значение достигается на концах промежутка $K = 0$, $K = K_*$. Так как $G(0) = 0$ и $G(K_1) \leqslant 0$, то $G(K) < 0$ на промежутке $(0, K_1)$. Покажем, что корень уравнения (4.3) удовлетворяет неравенству $K_1 > 0$. Из соотношений (4.4) следуют равенства

$$0 = F(K_1) - F(0) = \int\limits_0^{K_1} F'(K)\,dK = \int\limits_0^{K_1} h_2(K)\,G'(K)\,dK =$$

$$= h_2(K_1)\,G(K_1) - \int\limits_0^{K_1} G(K)\,h_2'(K)\,dK.$$

Так как $h_2'(K) > 0$, $h_2(K) > 0$, а $G(K) < 0$, легко заметить, что последнее равенство выполняется только при $K_1 > 0$. Тогда на промежутке $(0, K_0)$ функция $F(K)$ убывает, на промежутке (K_0, K_*) — возрастает, а точка K_0 является точкой локального минимума. В итоге установлено, что если корень K_1 уравнения (4.3) удовлетворяет неравенству $G(K_1) \leqslant 0$, то $K_1 \in (0, K_*]$. Отметим, что из условия $K_1 > 0$ следует неравенство $G'(0) < 0$. Это означает, что $\omega(0) > 0$ и, кроме того, выполнены неравенства $\omega(K_1) < 0$, $F'(0) < 0$, $F'(K_1) > 0$. Используя соотношения (4.3), два последних неравенства можно записать в эквивалентном виде

$$1 - g\int\limits_0^1 \frac{H_1}{v_{n1}^2}\,d\lambda > 0, \qquad 1 - g\int\limits_0^1 \frac{H_2}{v_{n2}^2}\,d\lambda < 0. \tag{4.5}$$

Согласно работе [8] уравнение

$$1 - g\int\limits_0^1 \frac{H}{(u_n - D_n)^2}\,d\lambda = 0$$

определяет скорость D_n движения характеристической поверхности в направлении нормали $\boldsymbol{n}$. Поэтому неравенства (4.5) означают, что перед фронтом скачка течение является сверхкритическим, а за фронтом скачка — докритическим. Корень $K_1 \in (0, K_*]$ уравнения (4.3) существует только в том случае, если

$$F(K_* - 0) \geqslant F(0).$$

При $F(K_* - 0) < F(0)$ корней уравнения (4.3) на интервале $(0, K_*)$ не существует. В этом случае можно строить решения с зонами возвратного (относительно скачка) течения за скачком. Течение за скачком будет состоять из слоя частиц жидкости, прошедших через скачок (параметры течения в ней определяются формулами (4.2) при $K = K_*$), и слоя частиц жидкости, движущихся только за разрывом. При этом соотношения на разрыве позволяют определить лишь толщину зоны возвратного течения. В работах [3, 5] изучены подобные конфигурации в случае плоскопараллельных течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тешуков В. М.** Пространственные стационарные длинные волны на сдвиговом потоке // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 28–39.
2. **Тешуков В. М.** Пространственные простые волны на сдвиговом течении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 28–40.
3. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 11–20.
4. **Тешуков В. М.** Гидравлический прыжок на сдвиговом течении баротропной жидкости // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 73–81.
5. **Чесноков А. А.** О взаимодействии сдвиговых потоков идеальной несжимаемой жидкости в канале // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 34–47.
6. **Монахов В. Н., Хуснутдинова Н. В.** О сопряжении основных каналовых и фильтрационных течений вязкой несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 95–99.
7. **Монахов В. Н., Хуснутдинова Н. В.** Сопряжение основных математических моделей фильтрации двухфазных жидкостей // Мат. моделирование. 2002. Т. 14, № 10. С. 109–115.
8. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–559.

Поступила в редакцию 22/VIII 2007 г.