

УДК 534.1, 539.3

## ФАЗОВАЯ ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОЧНЫХ СТРУКТУР

В. А. Крысько, М. И. Коч, М. В. Жигалов, А. В. Крысько

Саратовский государственный технический университет, 410054 Саратов

E-mails: mariacsit@mail.ru, ZhigalovM@yandex.ru

Рассмотрены сложные детерминированные колебания многослойного пакета балок, связанных между собой только с помощью краевых условий. Математическая модель пакета построена с учетом геометрической и физической нелинейностей балок и контактного взаимодействия их слоев. Разработан метод изучения фазовой синхронизации колебаний на основе вейвлет-анализа. Исследовано влияние граничных условий для нижней балки, а также различных типов нелинейности (физической, геометрической, контактной) и их комбинаций на характер и фазовую синхронизацию колебаний многослойного пакета балок.

**Ключевые слова:** балочные структуры, детерминированные колебания, фазовая хаотическая синхронизация, вейвлет-анализ.

**Введение.** Фазовая синхронизация систем, находящихся в режиме динамического хаоса, является важным эффектом, рассматриваемым в современной теории нелинейных колебаний [1]. Хаотическая синхронизация экспериментально наблюдается для радиотехнических генераторов [2], лазеров [3], электромеханических осцилляторов [4], при сердечных сокращениях, в газовом разряде и т. д. Кроме того, явление хаотической синхронизации играет важную роль при передаче информации с помощью детерминированных хаотических колебаний [5]. В настоящее время явление фазовой хаотической синхронизации колебаний динамических механических систем не обнаружено. В настоящей работе изучается фазовая хаотическая синхронизация колебаний консервативных механических систем, представляющих собой пакет балок, связанных между собой с помощью краевых условий, под действием поперечной нагрузки. Такие системы являются элементами различных космических аппаратов, поэтому изучение хаотической синхронизации их колебаний и способов управления этими колебаниями — важная задача, которая до настоящего времени не рассматривалась. Исследованию хаотической динамики механических систем и способов управления ими посвящены работы [6–12]. Однако в [6–12], как и во многих других работах, не изучалась фазовая хаотическая синхронизация колебаний механических балочных структур.

Традиционно при решении задач о контактном взаимодействии различных конструкций (балок, пластин, оболочек) используется система уравнений, состоящая из дифференциального уравнения движения, краевых условий и условия непроникания. Решением таких задач являются вектор-функция перемещения, форма и размер зоны контакта и контактное давление. В случае если форма и размер зоны контакта неизвестны, имеет место конструктивно-нелинейная задача. (В данной работе под конструктивной нелинейностью

понимается нелинейность, при которой в процессе деформации во времени изменяется расчетная схема задачи.) Для решения таких задач часто используется метод, основанный на сведении их к интегральному уравнению Фредгольма первого или второго рода. В работе [13] рассмотрен подход к решению контактных задач нелинейной теории оболочек, основанный на исключении из числа неизвестных функций контактного давления  $q_k$  с помощью модели Винклера. Такой учет обжатия балки в зоне контакта позволяет избежать трудоемкой процедуры численного построения функции Грина и находить искомые решения непосредственно с помощью уравнений равновесия.

**Постановка задачи.** В данной работе построена теория исследования нелинейной хаотической динамики многослойных балок, связанных между собой с помощью краевых условий. При этом балки в пакете могут иметь различные толщину и механические свойства, а между балками могут существовать зазоры. Как правило, балки проскальзывают с трением или без него. Появление зон сцепления маловероятно, поскольку контактное давление между слоями невелико. Условия контакта балок зависят от координат. Условия спайки балок (в нормальном направлении — отсутствие отрыва, в тангенциальном — отсутствие сдвига) не рассматриваются. Для каждой балки характерны различные типы нелинейности (физическая, геометрическая). Функция контактного давления исключена из числа неизвестных. Рассматриваемые механические системы имеют бесконечное число степеней свободы, при их изучении используются качественная теория дифференциальных уравнений и вейвлет-анализ.

В качестве примера рассматривается двухслойный пакет балок, в котором каждая балка удовлетворяет гипотезе Эйлера — Бернулли. Учитываются геометрическая и физическая нелинейности.

Рассмотрим двухслойный пакет (рис. 1), состоящий из балок высотой  $h_l$  ( $l = 1, 2$  — номер балки). Материал, из которого изготовлены балки, считаем изотропным, но неоднородным.

Используем следующие обозначения:  $h_l = h_l(x)$  — высота балки;  $h_{0l}$  — высота балки в ее центре;  $w_l(x, t)$  — прогиб балки;  $u_l(x, t)$  — перемещения срединной линии;  $E_l = E_l(x, z)$  — модуль Юнга материала балки;  $G_{0l} = G_{0l}(x, z)$  — модуль сдвига;  $\rho_l$  — удельная плотность материала;  $\nu_l$  — коэффициент Пуассона;  $b_l = b_l(x)$  — толщина балки;  $b_{0l}$  — толщина балки в ее центре;  $t$  — время;  $\varepsilon_l$  — коэффициент демпфирования;  $a$  — длина балки;  $e_{il}$ ,  $\sigma_{il}$  — интенсивности деформаций и напряжений соответственно;  $e_{sl} = e_{sl}(x, z)$  и  $\sigma_{sl} = \sigma_{sl}(x, z)$  — интенсивности деформаций и напряжений в состоянии текучести соответственно;  $K_l(x, z)$  — объемный модуль упругости;  $\varepsilon_{0l}$  — объемная деформация;  $K$  — коэффициент пропорциональности Винклера;  $\gamma_l$  — коэффициент поперечной деформации.

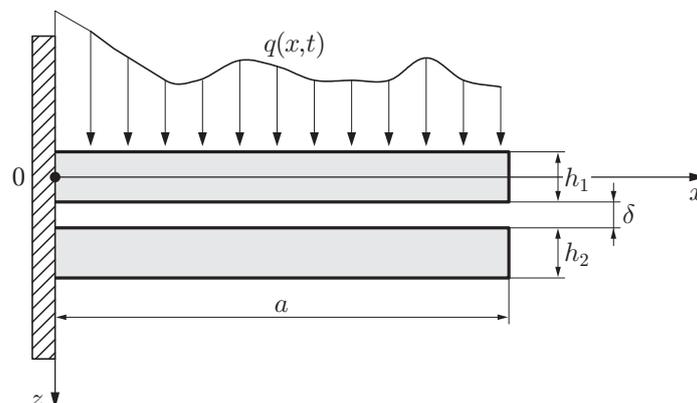


Рис. 1. Схема двухслойного пакета балок

Пусть балки занимают в пространстве  $\mathbb{R}^2$  области  $\Omega_l = \{(x, z): 0 \leq x \leq a, \alpha_l \leq z \leq \beta_l\}$ , где  $\alpha_1 = -h_1/2$ ,  $\alpha_2 = h_2/2 + \delta$  и  $\beta_1 = h_1/2$ ,  $\beta_2 = h_1/2 + \delta + h_2$  для первой и второй балок рассматриваемого пакета соответственно. Начало координат находится на левом конце верхней балки на ее срединной линии, ширина зазора между балками равна  $\delta$ . Ось  $z$  направлена вниз.

Введем следующие безразмерные параметры:

$$x = \bar{x}a, \quad z = \bar{z}h_{0l}, \quad h_l = \bar{h}_l h_{0l}, \quad w_l = \bar{w}_l h_{0l}, \quad E_l = \bar{E}_l G_{0l}, \quad b_l = \bar{b}_l b_{0l}, \quad p_l = \bar{p}_l h_{0l},$$

$$K = \bar{K} \frac{h_0^4 b_0}{a^4}, \quad t = \bar{t} \frac{a^2}{h_{0l}} \sqrt{\frac{\rho_l}{G_{0l} b_{0l}}}, \quad \varepsilon_l = \bar{\varepsilon}_l \frac{a^2}{h_{0l}^2} \sqrt{\frac{\rho_l}{G_{0l} b_{0l}}}.$$

С использованием вариационных принципов Остроградского — Гамильтона с учетом гипотезы Эйлера — Бернулли, нелинейной зависимости между деформациями и перемещениями и теории малых упругопластических деформаций в безразмерных переменных уравнения движения балки записываются в виде (черта над безразмерными параметрами опущена):

$$b_l h_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ E_{0l} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_l}{\partial x} \right)^2 \right) - E_{1l} \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} \right],$$

$$b_l h_l \frac{\partial^2 w_l}{\partial t^2} + \varepsilon_l \frac{\partial w_l}{\partial t} = q_l^* + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E_{0l} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_l}{\partial x} \right)^2 \right) - E_{2l} \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w_l}{\partial x} \left[ E_{0l} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_l}{\partial x} \right)^2 \right) - E_{2l} \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} \right] \right\}, \quad l = 1, 2, \quad (1)$$

где

$$E_{il} = b \int_{\alpha_l}^{\beta_l} E_l z^i dz, \quad q_l^* = q_l + q_{kl}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Усилие  $q_l^*$ , действующее на балку, определяется суммой внешней периодической нагрузки  $q_l$  и контактных усилий  $q_{kl}$ . При взаимодействии балок учитывается явление отскока. Как отмечено выше, при решении контактных задач теории балок, удовлетворяющих гипотезе Эйлера — Бернулли, используется связь Винклера между перемещением и контактным давлением между двумя балками [14]

$$q_{kl} = (-1)^l K (E_l/h_l) (w_1 - \delta - w_2 h_{02}/h_{01}) \psi, \quad l = 1, 2, \quad (2)$$

где  $K$  — коэффициент пропорциональности между контактным давлением и обжатием; функция  $\psi$  определяет размеры зоны контакта и находится по формуле

$$\psi = (1/2)[1 + \text{sign}(w_1 - \delta - w_2 h_{02}/h_{01})].$$

Функция  $q_{kl}$ , определяемая формулой (2), линейна относительно меры трансверсального обжатия балки в зоне контакта. Напомним, что при наличии множителя  $\psi$  в уравнениях движения балок возникает новый тип нелинейности, при этом задача становится конструктивно-нелинейной.

Граничные условия закрепления балки могут быть произвольными. В настоящей работе проанализированы двухслойные пакеты трех типов:

1) обе балки консольные:

$$w_l(0, t) = u_l(0, t) = w'_{lx}(0, t) = 0,$$

$$M_x(1, t) = 0, \quad N_x(1, t) = 0, \quad Q_x(1, t) = 0, \quad l = 1, 2;$$

2) первая балка консольная, вторая шарнирно-опертая:

$$w_1(0, t) = u_1(0, t) = w'_{1x}(0, t) = 0, \quad M_x(1, t) = 0, \quad N_x(1, t) = 0, \quad Q_x(1, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 w_2(0, t)}{\partial x^2} = w_2(0, t) = \frac{\partial^2 w_2(1, t)}{\partial x^2} = w_2(1, t) = 0, \quad u_2(0) = u_2(1) = 0;$$

3) первая балка консольная, вторая — балка с жестко защемленными концами:

$$w_1(0, t) = u_1(0, t) = w'_{1x}(0, t) = 0, \quad M_x(1, t) = 0, \quad N_x(1, t) = 0, \quad Q_x(1, t) = 0, \\ \frac{\partial w_2(0, t)}{\partial x} = w_2(0, t) = \frac{\partial w_2(1, t)}{\partial x} = w_2(1, t) = 0, \quad u_2(0) = u_2(1) = 0.$$

Далее предполагается, что зависимость  $E_l = E_l(x, z, \varepsilon_0, e_i)$  задана в начальный момент времени. Для того чтобы конкретизировать эту зависимость, необходимо использовать теорию малых упругопластических деформаций Генки [15]. Согласно методу переменных параметров упругости [16] модуль упругости и коэффициент Пуассона связаны с модулями сдвига и деформации следующими соотношениями:

$$E_l = 9K_l G_l / (3K_l + G_l). \quad (3)$$

Модуль  $K_l$  считается постоянным и равным  $1,94G_{0l}$ . В деформационной теории модуль сдвига определяется по формуле

$$G_l = \sigma_{il}(e_{il}) / (3e_{il}). \quad (4)$$

В рассматриваемой теории диаграмма деформирования материала балки  $\sigma_{il}(e_{il})$  может быть произвольной. В данной работе рассматриваются балки, диаграмма деформирования которых имеет вид

$$\sigma_{il} = \sigma_{sl} [1 - \exp(-e_{il}/e_{sl})]. \quad (5)$$

Интенсивность деформаций определяется выражением

$$e_{il} = \left| \frac{2}{3} e_{xx} \right| = \frac{2}{3} \left| \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_l}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} \right|, \quad (6)$$

справедливым для условия плоского напряженного состояния. Закон изменения нагрузки во времени вдоль оси балки может быть произвольным. Выше описана теория для двух балок постоянной и равной высоты, однако она справедлива и для  $n$  балок.

Интегрирование уравнений движения (1) с учетом геометрической и физической нелинейностей проводится методом конечных разностей. Исследована сходимость метода по пространственной координате. Установлено, что для получения результатов с необходимой степенью точности при использовании метода конечных разностей достаточно разбить интервал интегрирования  $[0, 1]$  на 40 частей.

Достоверность численных результатов обеспечивается совпадением решений, полученных описанным ниже методом, с результатами, полученными с помощью метода конечных элементов по пространственной координате в форме метода Бубнова — Галеркина с последующим решением задачи Коши методом Рунге — Кутты от второго до шестого порядка точности.

Чтобы применить метод переменных параметров упругости [16], балку нужно разбить по высоте на  $n_z$  слоев. Далее на каждом шаге по времени для узла  $x_j$  послойно находится интенсивность деформаций (6), по формулам (3), (4) определяются модули упругости сдвига и методом Симпсона вычисляются интегралы (2).

Получаемые в результате применения метода конечных разностей значения  $w_l(x, t)$ ,  $u_l(x, t)$  анализируются с использованием качественной теории дифференциальных уравнений и нелинейной динамики: строятся фазовые и модальные портреты, отображения Пуанкаре, спектры мощности (с помощью быстрого преобразования Фурье), автокорреляционная функция, поверхность изменения контактного давления во времени и пространстве,

энергетические спектры вейвлет-преобразования в зависимости от времени и масштабного параметра в двумерном и трехмерном пространствах, определяются знак старшего показателя Ляпунова и разность фаз (для анализа режима фазовой хаотической синхронизации). С помощью вейвлет-преобразования можно исследовать частотные характеристики сигнала, которые могут существенно меняться во времени и анализ которых с помощью быстрого преобразования Фурье может привести к принципиально ошибочным результатам. Таким образом, вейвлет-анализ позволяет исследовать динамическую систему в каждый момент времени, а не интегрально.

В работах [10, 11] показано, что в случае механических систем из всего многообразия вейвлетов следует выбрать вейвлет Морле. В настоящей работе для рассматриваемого класса задач также проводился анализ всего многообразия вейвлетов и, так же как в [10], сделан вывод о предпочтительном использовании вейвлета Морле

$$\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} \exp(i\omega_0\eta) \exp(-\eta^2/2),$$

где  $\omega_0 = 2\pi$  — параметр вейвлета, который обеспечивает соотношение  $s \approx 1/f$  между временным масштабом  $s$  и частотой  $f$  преобразования Фурье.

Применение вейвлет-преобразования хаотических сигналов  $w_i(t)$ ,  $u_i(t)$  рассматриваемой механической системы, характеризующегося плохой определенностью фазы, позволяет разработать новый метод выявления фазовой синхронизации.

Вейвлетную поверхность представим в виде  $W(s, t) = |W(s, t)| e^{i\varphi_s(t)}$ . Эта поверхность характеризует поведение механической системы на каждом временном масштабе  $s$  в любой момент времени  $t$ . Введем также интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по временным масштабам  $E(s) = \int |W(s, t)|^2 dt$ . Использование вейвлет-преобразования позволяет вычислить фазу  $\varphi_s(t) = \arg W(s, t)$  для каждого временного масштаба  $s$ , т. е. охарактеризовать изменение каждого временного масштаба с помощью ассоциированной с ним фазы.

Следует отметить, что фазовая синхронизация означает “захват” хаотических сигналов, при котором амплитуды этих сигналов остаются не связанными между собой и представляются хаотическими. “Захват” фаз обуславливает совпадение частот сигналов. Частота хаотического сигнала определяется как средняя скорость изменения фазы  $\langle \varphi(t) \rangle$ . Синхронизированными оказываются те временные масштабы, которым соответствуют наибольшие доли энергии  $E(s)$ . Остальные временные масштабы по-прежнему остаются рассинхронизированными. При этом фазовая синхронизация приводит к появлению и “захвату” фаз на синхронизированных временных масштабах  $s$ :  $|\varphi_1 - \varphi_2| < \text{const}$  ( $\varphi_1, \varphi_2$  — непрерывные фазы колебаний первой и второй балок, соответствующие синхронизированным временным масштабам  $s$ ). На рис. 2–7 эти зоны показаны черным цветом.

**Результаты численных расчетов.** В качестве примера рассмотрим пакет, состоящий из двух изотропных балок одинаковой высоты ( $h_1 = h_2 = h$ ), изготовленных из одного и того же материала ( $E_1 = E_2 = E$ ) и связанных между собой с помощью краевых условий. Ширина зазора между балками составляет 0,05 высоты балки. На верхнюю балку действует внешняя знакопеременная поперечная нагрузка

$$q = q_0 \sin \omega_p t$$

( $q_0 = 0,5$  — амплитуда внешней нагрузки;  $\omega_p = 6,28$  — частота возбуждения).

На рис. 2–7 приведены характеристики динамического процесса при граничных условиях различного типа.

Рассмотрим влияние граничных условий для второй балки на характер колебаний пакета балок и их синхронизацию.

При малой амплитуде нагрузки до того момента, в который верхняя балка касается второй балки, наблюдаются колебания, не являющиеся гармоническими. Следует отме-

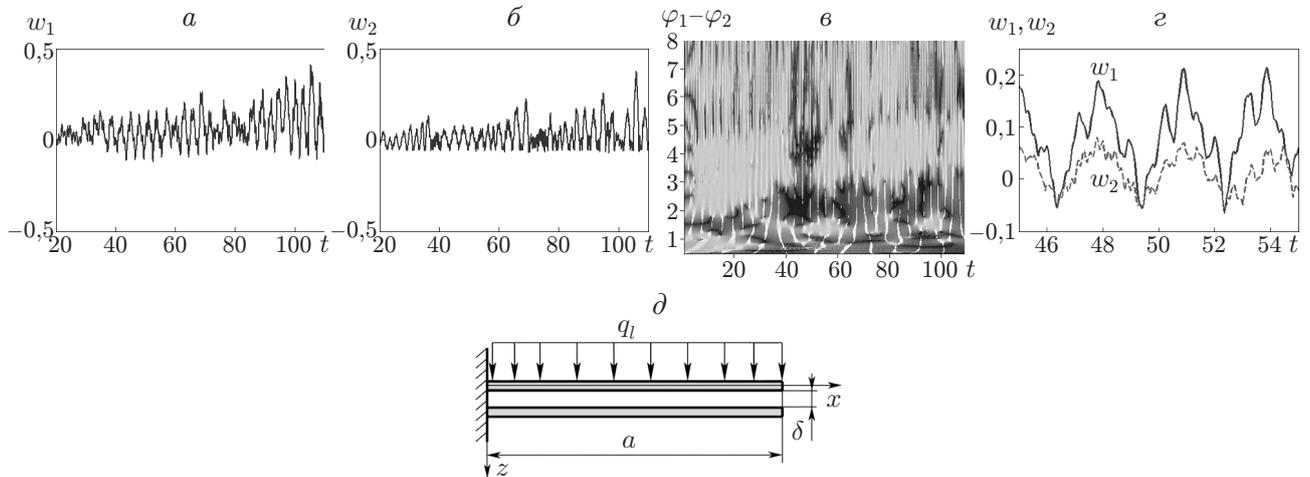


Рис. 2. Характеристики динамического процесса в случае, когда обе балки являются геометрически нелинейными, при граничных условиях первого типа:  $a, б$  — прогибы  $w_l \in (1, t)$  ( $a — w_1, б — w_2$ );  $в$  — результаты вейвлет-анализа разности фаз в диапазоне времени  $t = 20 \div 100$ ;  $г$  — прогибы  $w_l$  в диапазоне времени  $t = 45 \div 55$ ;  $д$  — схема закрепления балок

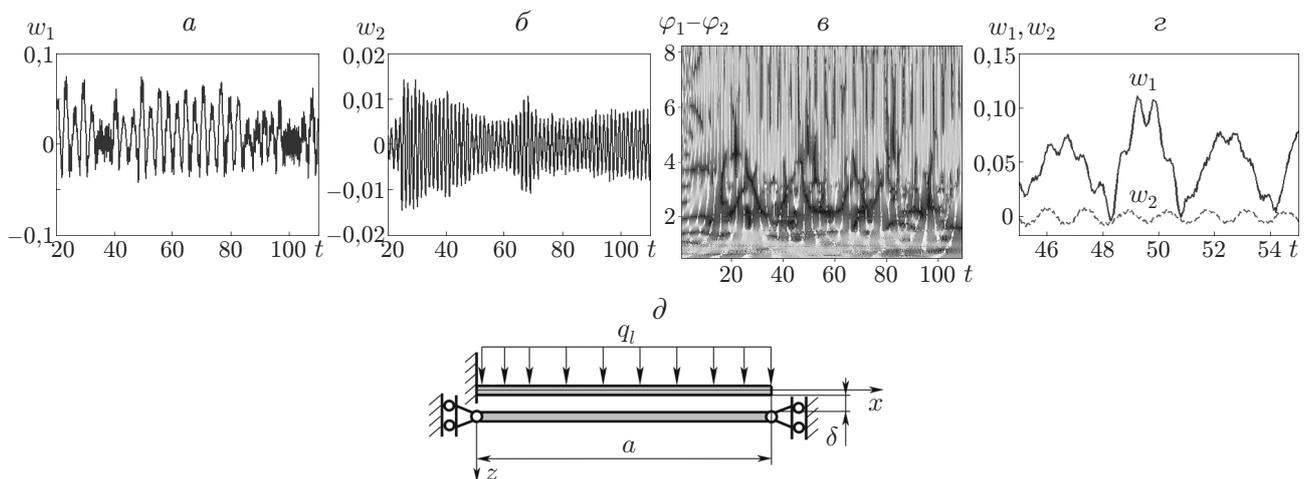


Рис. 3. Характеристики динамического процесса в случае, когда обе балки являются геометрически нелинейными, при граничных условиях второго типа:  $a, б$  — прогибы  $w_l \in (0,5, t)$  ( $a — w_1, б — w_2$ );  $в$  — результаты вейвлет-анализа разности фаз в диапазоне времени  $t = 20 \div 100$ ;  $г$  — прогибы  $w_l$  в диапазоне времени  $t = 45 \div 55$ ;  $д$  — схема закрепления балок

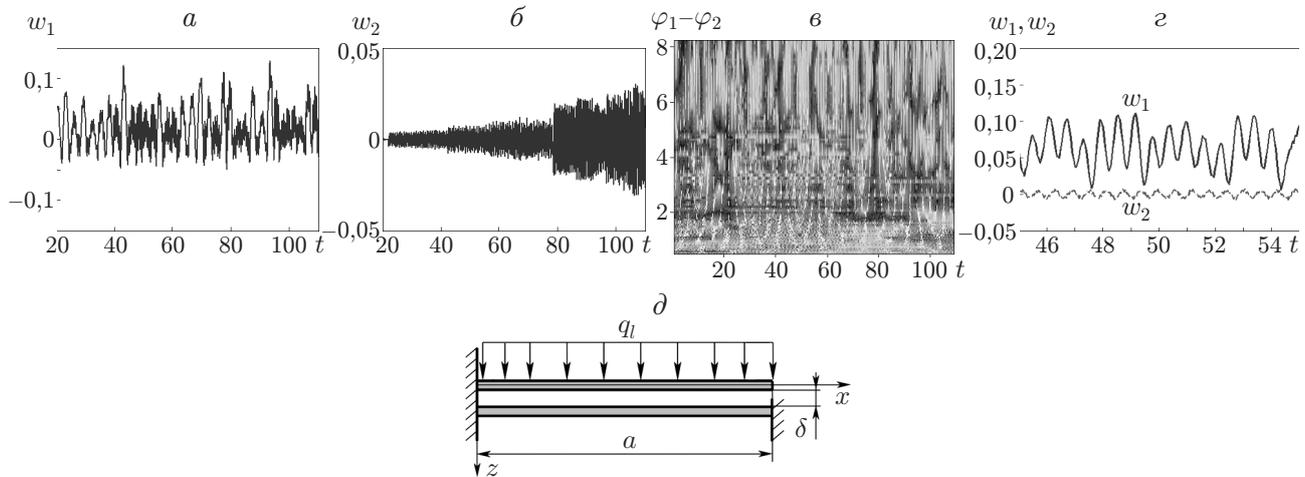


Рис. 4. Характеристики динамического процесса в случае, когда обе балки являются геометрически нелинейными, при граничных условиях третьего типа: а, б — прогибы  $w_l \in (0,5, t)$  (а —  $w_1$ , б —  $w_2$ ); в — результаты вейвлет-анализа разности фаз в диапазоне времени  $t = 20 \div 100$ ; г — прогибы  $w_l$  в диапазоне времени  $t = 45 \div 55$ ; д — схема закрепления балок

тить, что колебания являются регулярными. Независимо от типа граничных условий для второй балки наблюдаются хаотические начальные совместные колебания геометрически нелинейных двухслойных пакетов балок при  $\varepsilon_l = 0$  (см. рис. 2–4). Для первой балки наиболее “энергонасыщенной” является частота  $\omega_p/3$ , однако присутствуют и другие частоты. Различным типам граничных условий соответствуют разные частоты, на которых происходят колебания второй балки: первому типу соответствует частота  $\omega_p/3$ , второму — частота  $\omega \approx 4,5$ , третьему типу — частота  $\omega \approx 8$ . Заметим, что в процессе колебаний пакета балок первого типа наблюдается “захват” частот, в то время как для других рассмотренных типов граничных условий подобный “захват” отсутствует (см. рис. 2,г, 3,г, 4,г). Также граничные условия оказывают влияние на фазовую синхронизацию колебаний пакета балок: фазовая синхронизация колебаний пакета первого типа происходит в диапазоне частот  $\omega = 0 \div 3$ , а также на некоторых других частотах. Следует отметить, что с течением времени области синхронизации увеличиваются. Для пакета балок второго типа синхронизация осуществляется в диапазоне частот  $\omega = 1,5 \div 5,0$ , а также на некоторых других частотах. Область синхронизации имеет вид “всплесков” (при  $t = 20, 50, 70, 85$ ). Для пакета балок третьего типа синхронизация наблюдается во всем диапазоне частот, но неравномерна во времени (см. рис. 2,в, 3,в, 4,в).

Если учитывать не только геометрическую, но и физическую нелинейность, то характер колебаний пакетов второго и третьего типов не изменится. В случае двухслойного консольного пакета балок при начальных совместных колебаниях наблюдается потеря устойчивости (состояние системы, при котором первоначальная форма ее равновесия становится неустойчивой, в частности наблюдается резкое увеличение прогибов, сопровождающееся изменением характера колебаний). Учет физической нелинейности для второй балки не влияет на синхронизацию колебаний двухслойных пакетов балок.

Рассмотрим двухслойные пакеты, в которых одна балка характеризуется физической и геометрической нелинейностями, а другая — только геометрической нелинейностью (см. рис. 5–7). При начальных совместных колебаниях двухслойных пакетов балок ( $\varepsilon_l = 0$ ) наблюдается потеря устойчивости (см. рис. 5,а,б, 6,а,б, 7,а,б). Независимо от типа граничных условий колебания балок имеют четко выраженный хаотический характер. Колебания

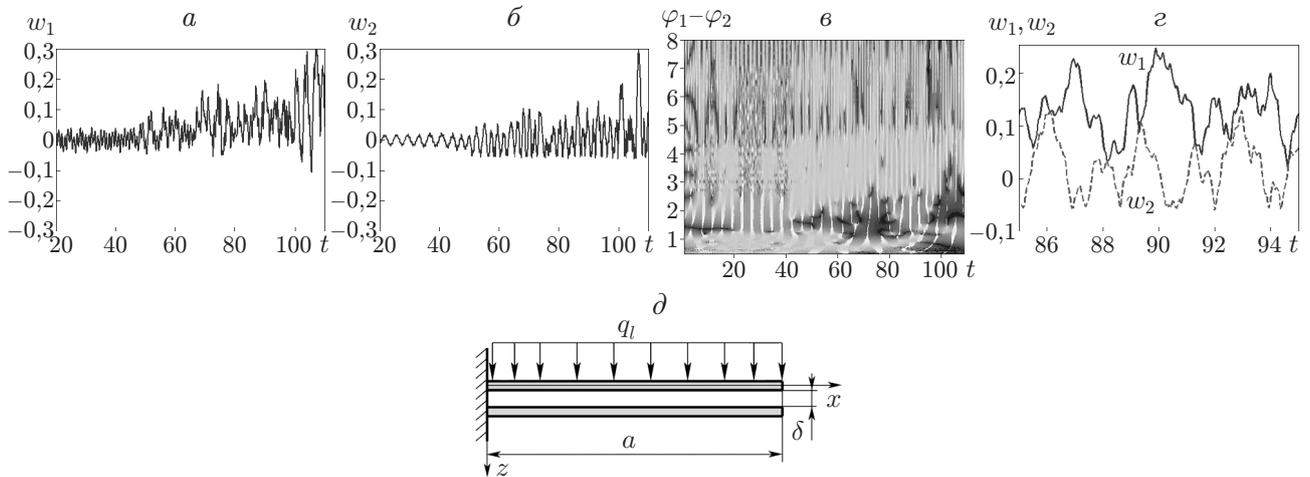


Рис. 5. Характеристики динамического процесса в случае, когда одна балка является физически и геометрически нелинейной, а другая — геометрически нелинейной, при граничных условиях первого типа:

*a, б* — прогибы  $w_l \in (1, t)$  (*a* —  $w_1$ , *б* —  $w_2$ ); *в* — результаты вейвлет-анализа разности фаз в диапазоне времени  $t = 20 \div 100$ ; *г* — прогибы  $w_l$  в диапазоне времени  $t = 45 \div 55$ ; *д* — схема закрепления балок

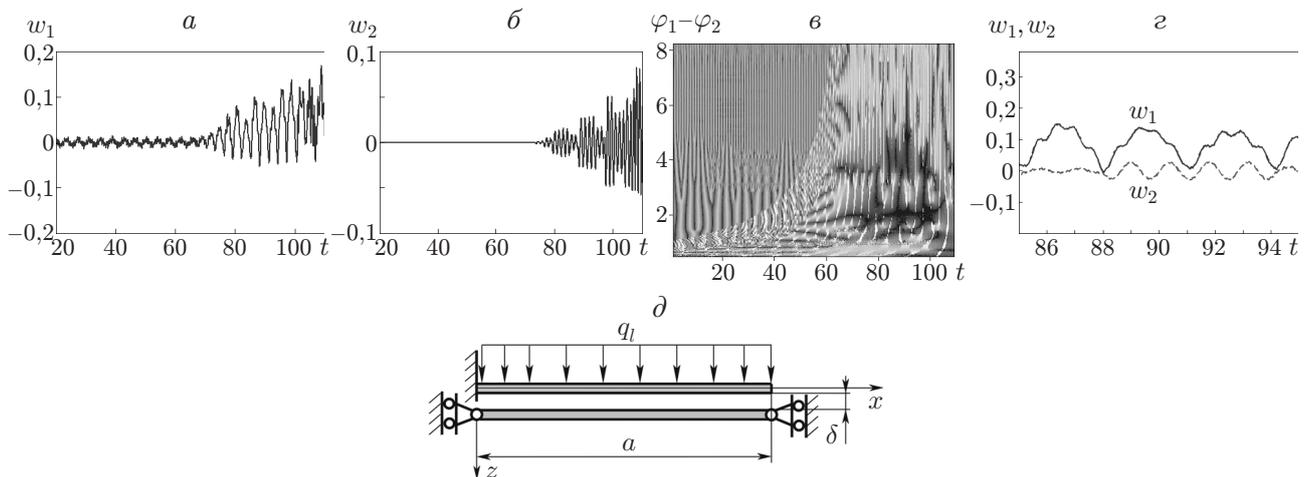


Рис. 6. Характеристики динамического процесса в случае, когда одна балка является физически и геометрически нелинейной, а другая — геометрически нелинейной, при граничных условиях второго типа:

*a, б* — прогибы  $w_l \in (0,5, t)$  (*a* —  $w_1$ , *б* —  $w_2$ ); *в* — результаты вейвлет-анализа разности фаз в диапазоне времени  $t = 20 \div 100$ ; *г* — прогибы  $w_l$  в диапазоне времени  $t = 45 \div 55$ ; *д* — схема закрепления балок

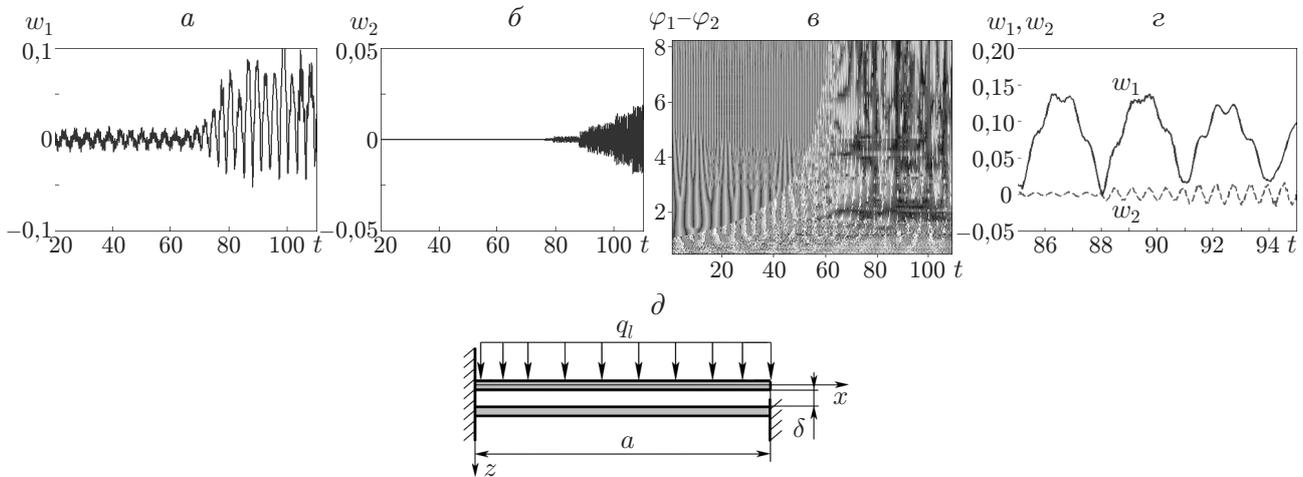


Рис. 7. Характеристики динамического процесса в случае, когда одна балка является физически и геометрически нелинейной, а другая — геометрически нелинейной, при граничных условиях третьего типа:

$a, б$  — прогибы  $w_l \in (0,5, t)$  ( $a$  —  $w_1$ ,  $б$  —  $w_2$ );  $в$  — результаты вейвлет-анализа разности фаз в диапазоне времени  $t = 20 \div 100$ ;  $г$  — прогибы  $w_l$  в диапазоне времени  $t = 45 \div 55$ ;  
 $д$  — схема закрепления балок

происходят на тех же частотах, что и в случае геометрически нелинейных пакетов. Учет физической и геометрической нелинейностей балок приводит к тому, что в некоторые моменты времени при любом типе граничных условий фазовая синхронизация практически отсутствует (см. рис. 5, в, 6, в, 7, в). В случае граничных условий первого типа синхронизация наступает при  $t > 40$  на частоте  $\omega = 1,5$ . С течением времени область синхронизации увеличивается, оставаясь в диапазоне низких частот. Для граничных условий второго и третьего типов синхронизация наступает при  $t > 70$  (для условий второго типа — на частотах  $\omega = 1,5; 3,5$ , для условий третьего типа — в диапазоне частот  $\omega = 1,5 \div 8,0$ ). Учет физической нелинейности для верхней балки оказывает существенное влияние на характер колебаний всего пакета и соответственно на область синхронизации.

В случае, когда для обеих балок (независимо от типа граничных условий для нижней балки) характерны физическая и геометрическая нелинейности, колебания и фазовая синхронизация происходят аналогично рассмотренному выше случаю отсутствия физической нелинейности для второй балки.

**Выводы.** В работе исследована хаотическая динамика многослойных механических балочных структур с учетом физической, геометрической и контактной нелинейностей. Учет физической нелинейности для нижней балки приводит к потере устойчивости при начальных совместных колебаниях рассмотренных балочных структур. Впервые обнаружено явление фазовой синхронизации колебаний многослойных механических балочных структур. На основе вейвлет-анализа с использованием вейвлета Морле разработан метод изучения фазовой синхронизации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Pikovsky A. S.** Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences / A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurhs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
2. **Parlitz U., Junge L., Lauterborn W., Kocarev L.** Experimental observation of phase synchronization // Phys. Rev. E. 1996. V. 54, N 2. P. 2115–2117.

3. **Allaria E., Arechi F. T., Garbo A. D., Meucci R.** Synchronization of homoclinic chaos // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 791–794.
4. **Kiss I. Z., Hudson J. L.** Phase synchronization and suppression of chaos through intermittency in forcing of an electrochemical oscillator // Phys. Rev. E. 2001. V. 64, N 4, pt 2. 046215.
5. **Дмитриев А. С.** Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи / А. С. Дмитриев, А. Н. Панас. М.: Физматлит, 2002.
6. **Awrejcewicz J.** Nonlinear dynamics of continuous elastic systems / J. Awrejcewicz, V. A. Krysko, A. Vakakis. N. Y.: Springer, 2004.
7. **Awrejcewicz J.** Thermo-dynamics of plates and shells / J. Awrejcewicz, V. A. Krysko, A. V. Krysko. N. Y.: Springer, 2007.
8. **Krysko V. A.** Chaos in structural mechanics / V. A. Krysko, J. Awrejcewicz. N. Y.: Springer, 2008.
9. **Крысько В. А., Жигалов М. В., Салтыкова О. А., Десятова А. С.** Диссипативная динамика геометрически нелинейных балок Бернулли — Эйлера // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 6. С. 128–136.
10. **Крысько В. А., Папкова И. В., Солдатов В. В.** Анализ нелинейных хаотических колебаний пологих оболочек вращения с помощью вейвлет-преобразования // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 1. С. 107–117.
11. **Awrejcewicz J., Krysko A. V.** Wavelets-based analysis of parametric vibrations of flexible plates // Intern. Appl. Mech. 2003. V. 39, N 9. P. 997–1028.
12. **Крысько В. А., Жигалов М. В., Салтыкова О. А., Крысько А. В.** Об учете влияния поперечных сдвигов на сложные нелинейные колебания упругих балок // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 5. С. 186–193.
13. **Кантор Б. Я., Богатыренко Т. Л.** Метод решения контактных задач нелинейной теории оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. 1986. № 1. С. 18–21.
14. **Александров В. М., Бабешко В. А.** Контактные задачи для упругой полосы малой толщины // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 95–107.
15. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Основы общей математической теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
16. **Биргер И. А.** Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // Прикл. математика и механика. 1951. Т. 15, вып. 6. С. 765–770.

*Поступила в редакцию 23/VIII 2011 г.*

---