

УДК 532.5: 533.6

## К ПОСТАНОВКЕ НЕЛИНЕЙНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ

Д. Н. Горелов

Омский филиал Института математики СО РАН, 644099 Омск

E-mail: gorelov@iitam.omsk.net.ru

Рассматривается общая постановка нелинейной начально-краевой задачи нестационарного отрывного обтекания профиля потоком идеальной несжимаемой жидкости. Задача формулируется для комплексной скорости. Проведен детальный анализ условий схода вихревых следов с профиля. Предложенная система функциональных соотношений позволяет строить алгоритмы решения широкого класса задач теории крыла.

Ключевые слова: начально-краевая задача, отрывное обтекание, профиль, вихревой след.

В проблеме отрывного обтекания тел особое место занимает широкий класс задач, связанных с нестационарным обтеканием контура плоским потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Постановка таких задач и методы их решения зависят от многих факторов, главными из которых являются режим обтекания (безотрывный или отрывной) и вид контура (замкнутый или разомкнутый). Кроме того, следует различать случаи обтекания гладкого контура, не имеющего угловых точек, и контура с одной или несколькими угловыми точками. Теоретические исследования в этом направлении интенсивно ведутся с середины XX в. Предложены различные математические модели (см., например, [1–10]), однако до сих пор проблема нестационарного отрывного обтекания не решена.

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с постановкой нелинейной начально-краевой задачи нестационарного обтекания крылового профиля плоским потенциальным потоком идеальной жидкости. Основное внимание уделяется моделированию вихревых следов и анализу условий их схода с контура.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем декартову систему координат  $Oxy$ , в бесконечно удаленной точке которой жидкость движется со скоростью  $v_\infty$ . Предположим, что в жидкости находится контур крылового профиля  $L(t)$  с одной угловой точкой, который начал перемещаться в момент времени  $t = 0$  со скоростью  $U(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in L(t)$ . В общем случае циркуляция скорости  $\Gamma(t)$  вокруг профиля меняется с течением времени, порождая вихревой след при безотрывном обтекании или вихревые следы при отрывном обтекании профиля. Вихревые следы моделируются линиями тангенциального разрыва  $L_w(t)$  или  $L_{w1}(t)$ ,  $L_{w2}(t)$ , вдоль которых терпит разрыв касательная составляющая скорости (рис. 1). Движение жидкости вне профиля и вихревых следов предполагается потенциальным.

Потенциальность течения позволяет ввести в рассмотрение комплексную скорость  $\bar{v}(z, t) = v_x(x, y, t) - iv_y(x, y, t)$ ,  $z = x + iy$ . Начально-краевую задачу для комплексной скорости можно сформулировать следующим образом. В области течения вне контура  $L(t)$

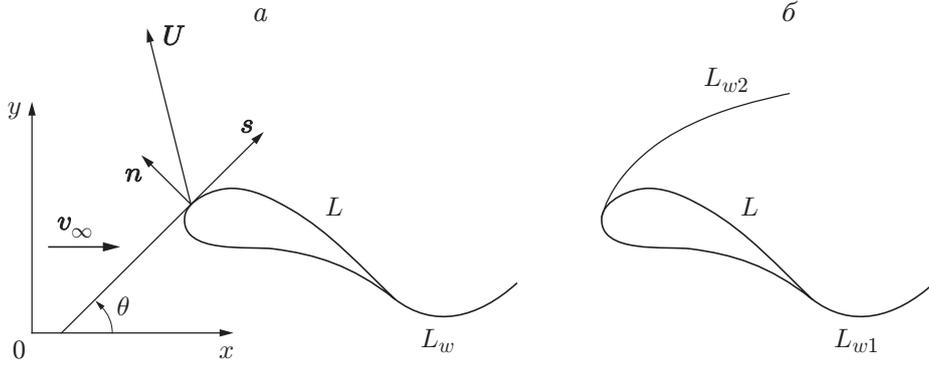


Рис. 1. Модели нестационарного течения вблизи профиля:  
 а — безотрывное обтекание; б — отрывное обтекание

и вихревых следов  $L_{wp}(t), p = 1, 2$  комплексная скорость  $\bar{v}(z, t)$  является аналитической функцией, удовлетворяющей граничным условиям затухания возмущенной скорости в бесконечно удаленной точке и непротекания жидкости через контур профиля, а также условиям непрерывности давления и нормальной составляющей скорости при переходе через вихревые следы. Область течения, в которой определяется функция  $\bar{v}(z, t)$ , заранее неизвестна и с течением времени меняется. В качестве начальных условий в момент времени  $t = 0$  задаются границы области течения и поле скорости жидкости. При этом обычно предполагается, что при  $t < 0$  профиль неподвижен ( $\mathbf{U} = 0$ ), течение стационарно и вихревые следы отсутствуют.

Контур профиля и вихревые следы моделируются вихревыми слоями (предполагается, что внутри замкнутого контура находится жидкость, движущаяся вместе с ним). Выражение для комплексной скорости  $\bar{v}(z, t)$  может быть представлено в виде

$$\bar{v}(z, t) = \bar{v}_\infty + \Delta\bar{v}(z, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L(t)} \frac{\gamma(s, t) ds}{z - \zeta(s, t)}, \quad \zeta(s, t) \in L(t), \quad (1.1)$$

$$\Delta\bar{v}(z, t) = \sum_{p=1}^{N_w} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{wp}(t)} \frac{\gamma_{wp}(\sigma, t) d\sigma}{z - \zeta_{wp}(\sigma, t)}, \quad \zeta_{wp}(\sigma, t) \in L_{wp}(t).$$

Здесь  $\Delta\bar{v}(z, t)$  — комплексная скорость, индуцируемая вихревыми следами  $L_{wp}(t)$ , сходящими с контура  $L(t)$ ;  $N_w, \gamma_{wp}(\sigma, t)$  — число вихревых следов и их интенсивность;  $\gamma(s, t)$  — интенсивность вихревого слоя, моделирующего контур  $L(t)$ ;  $s, \sigma$  — дуговые координаты. Интегрирование по контуру  $L(t)$  в формуле (1.1) ведется по часовой стрелке, а на вихревых следах дуговая координата  $\sigma$  отсчитывается от точки схода вихрей с контура  $L(t)$  вдоль каждого вихревого следа  $L_{wp}(t)$ .

Выражение (1.1) удовлетворяет условию затухания возмущенной скорости в бесконечно удаленной точке, так как  $\bar{v}(z, t) = \bar{v}_\infty$  при  $|z| \rightarrow \infty$ . Требование выполнения условия непротекания жидкости через контур  $L(t)$  приводит к двум сингулярным интегральным уравнениям второго и первого рода соответственно [10]:

$$\frac{1}{2} \gamma(s, t) + \operatorname{Re} \left[ e^{i\theta(z, t)} \left( \bar{v}_\infty + \Delta\bar{v}(z, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L(t)} \frac{\gamma(s, t) ds}{z - \zeta(s, t)} - \bar{U}(z, t) \right) \right] = 0, \quad z \in L(t); \quad (1.2)$$

$$\operatorname{Im} \left[ e^{i\theta(z, t)} \left( \bar{v}_\infty + \Delta\bar{v}(z, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L(t)} \frac{\gamma(s, t) ds}{z - \zeta(s, t)} - \bar{U}(z, t) \right) \right] = 0, \quad z \in L(t). \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2), (1.3) можно решать независимо. Искомой функцией в этих уравнениях является интенсивность вихревого слоя  $\gamma(s, t)$  на контуре  $L(t)$ . Интенсивности вихревых следов  $\gamma_{wp}(\sigma, t)$  и сами следы  $L_{wp}(t)$ , которые входят в выражение (1.1), связаны с  $\gamma(s, t)$  дополнительными соотношениями.

Что касается граничных условий на вихревых следах, то они выполняются, если вихревые следы свободно перемещаются вместе с жидкостью. Это имеет место, если комплексная координата  $z_{wp}(\sigma, t)$  вихря, сошедшего с точки  $z_{*p}$  контура профиля в некоторый момент времени  $\tau$  ( $0 \leq \tau < t$ ), определяется решением нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{z}_{wp}}{dt} = \bar{v}_0(z_{wp}, t) \quad (1.4)$$

с начальным условием  $\bar{z}_{wp}(0, \tau) = \bar{z}_{*p}(\tau)$ ,  $\tau \in [0, t)$  и заданным полем скоростей в момент времени  $\tau$ . Здесь  $\tau$  является лагранжевой координатой рассматриваемого вихря;  $\bar{v}_0(z_w, t)$  — комплексная скорость движения вихрей в следе, равная полусумме предельных значений комплексной скорости  $\bar{v}(z, t)$  при приближении к точке  $z_{wp} \in L_{wp}$ .

Уравнение (1.4) является нелинейным, а его решение зависит от всей предыстории движения профиля. В этом заключаются специфика и сложность рассматриваемой задачи. В настоящее время задачи такого типа обычно решают с использованием процедуры дискретизации по времени [9], позволяющей свести исходную задачу с неизвестными границами, зависящими от времени, к последовательному решению краевых задач в фиксированных областях для ряда значений времени  $t_1, \dots, t_n$ . Тем самым исходная начально-краевая задача сводится к решению двух задач, одна из которых представляет собой задачу Коши, связанную с решением нелинейного дифференциального уравнения (1.4) для момента времени  $t_n$  при задании начальных условий в момент времени  $t_{n-1}$ , а другая является краевой задачей для рассматриваемого момента времени  $t_n$ . При этом все границы области течения предполагаются известными. Краевая задача для замкнутого контура сводится к решению одного из линейных интегральных уравнений (1.2), (1.3), а для разомкнутого контура (дужки) — к решению интегрального уравнения первого рода (1.3). Уравнения (1.2), (1.3) обычно решают методом дискретных вихрей либо методом панелей [9]. Сравнительный анализ показал, что для замкнутых контуров метод панелей позволяет получать более точные результаты, в частности при решении интегрального уравнения второго рода [11].

## 2. СООТНОШЕНИЯ НА ВИХРЕВОМ СЛЕДЕ

Выведем дополнительные соотношения, связывающие характеристики вихревых следов с интенсивностью вихревого слоя на контуре профиля  $L(t)$ . Прежде всего определим разрыв потенциала скорости  $\varphi(x, y, t)$  при переходе через вихревой след. Предельные значения потенциала скорости при приближении к точке  $M \in L_{wp}$  обозначим через  $\varphi_+(M, t)$ ,  $\varphi_-(M, t)$ . Рассмотрим произвольный контур  $C$ , охватывающий вихревой след  $L_{wp}$  и пересекающий его один раз в точке  $M$  (рис. 2). Циркуляция скорости по контуру  $C$  равна  $\Gamma_C = \varphi_+(M, t) - \varphi_-(M, t)$ . Рассмотрим замкнутый контур, составленный из контура  $C$  и берегов разреза вдоль вихревого следа  $L_{wp}$ . Этот контур не пересекает вихревой след, и циркуляция скорости вокруг него равна нулю. На берегах разреза скорость жидкости равна соответственно  $v_\sigma^+(\sigma, t)$ ,  $v_\sigma^-(\sigma, t)$ , а разность этих скоростей определяет интенсивность вихревого следа:

$$\gamma_{wp}(\sigma, t) = v_\sigma^-(\sigma, t) - v_\sigma^+(\sigma, t). \quad (2.1)$$

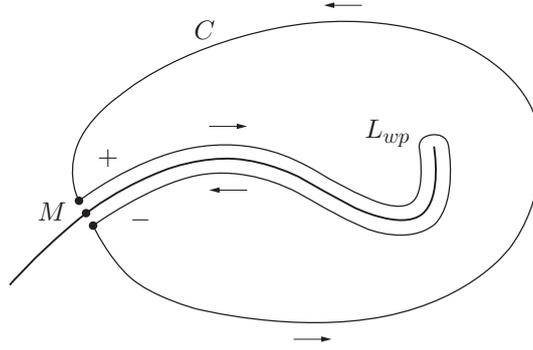


Рис. 2. Схема для определения разрыва потенциала скорости в точке  $M$  вихревого следа

С учетом соотношения (2.1) разрыв потенциала скорости в точке  $M \in L_{wp}$  определяется формулой

$$\varphi_+(M, t) - \varphi_-(M, t) = \int_{\sigma_M}^{l_{wp}} \gamma_{wp}(\sigma, t) d\sigma, \quad (2.2)$$

где  $\sigma_M$  — дуговая координата точки  $M$ ;  $l_{wp}$  — длина вихревого следа  $L_{wp}$  в момент времени  $t$ . Для получения другого важного соотношения на вихревом следе используем условие непрерывности давления  $p(x, y, t)$  при переходе через  $L_{wp}$ . Давление определяется интегралом Коши — Лагранжа, который в точках вихревого следа  $L_{wp}$  может быть преобразован к виду [12]

$$p = -\rho \left( \frac{\delta \varphi}{\delta t} + \frac{1}{2} (v_\sigma - v_{e\sigma})^2 - \frac{1}{2} v_e^2 \right) + C(t), \quad (2.3)$$

где оператор  $\delta/\delta t$  определяет производную по  $t$  в точке  $M \in L_{wp}$ , движущейся с переносной скоростью  $\mathbf{v}_e$ ;  $C(t)$  — произвольная функция времени. Из (2.1), (2.3) следует, что перепад давления в точках вихревого следа равен

$$\begin{aligned} p_+ - p_- &= -\rho \left( \frac{\delta}{\delta t} (\varphi_+ - \varphi_-) + \frac{1}{2} [(v_\sigma^+ - v_{e\sigma})^2 - (v_\sigma^- - v_{e\sigma})^2] \right) = \\ &= -\rho \left( \frac{\delta}{\delta t} (\varphi_+ - \varphi_-) + \gamma_{wp} (v_{e\sigma} - v_{0\sigma}) \right), \quad v_{0\sigma} = \frac{v_\sigma^+ + v_\sigma^-}{2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Пусть точка  $M$  движется вдоль вихревого следа  $L_{wp}$  со скоростью  $v_{0\sigma}$ . В этом случае переносная скорость точки  $M$  равна  $v_{e\sigma} = v_{0\sigma}$ . Тогда в соответствии с (2.2), (2.4) условие непрерывности давления при переходе через вихревой след  $L_{wp}$  выполняется, если

$$\frac{\delta}{\delta t} [\varphi_+(M, t) - \varphi_-(M, t)] = \frac{d}{dt} \int_{\sigma_M}^{l_{wp}} \gamma_{wp}(\sigma, t) d\sigma = 0. \quad (2.5)$$

Следует отметить, что скорость  $v_{0\sigma}$  в точке  $M \in L_{wp}$  определяется формулами (1.1), в которых соответствующий сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. С этой скоростью происходит движение вихрей вдоль вихревого следа, которое описывается уравнением (1.4).

Рассмотрим соотношение (2.5) для двух произвольных точек  $M_1 \in L_{wp}$ ,  $M_2 \in L_{wp}$ , движущихся вместе с жидкостью вдоль вихревого следа. Вычитая одно выражение из другого, получим

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \gamma_{wp}(\sigma, t) d\sigma = \text{const}, \quad (2.6)$$

где  $\sigma_1(t)$ ,  $\sigma_2(t)$  — дуговые координаты точек  $M_1$ ,  $M_2$ . Из (2.6) следует утверждение: суммарная интенсивность любого элемента вихревого следа, точки которого движутся вместе с жидкостью, остается постоянной в течение всего времени его движения. Сам элемент при этом деформируется, меняются его длина и интенсивность вихрей  $\gamma_{wp}(\sigma, t)$ ,  $\sigma_1(t) < \sigma < \sigma_2(t)$ .

Соотношение (2.6) лежит в основе математического моделирования вихревых следов системой свободных дискретных вихрей, сходящих с профиля в течение некоторого малого промежутка времени. Такая дискретная модель вихревого следа широко применяется в расчетах начиная с работы [1].

Соотношение (2.6) позволяет сделать вывод, что интенсивность вихревого следа  $L_{wp}$  определяется интенсивностью этого следа в точке его схода с контура  $L(t)$ .

### 3. УСЛОВИЯ В ТОЧКАХ СХОДА ВИХРЕВЫХ СЛЕДОВ С КОНТУРА

**3.1. Общее условие.** Вихревые следы  $L_{wp}(t)$  пополняются за счет вихрей, сходящих с контура в некоторых точках  $z_{*p}(t)$  с дуговыми координатами  $s_{*p}(t)$ . Эти точки могут быть фиксированными на контуре  $L(t)$  и перемещаться вместе с контуром с комплексной скоростью  $\bar{U}(z_{*p}, t)$  либо двигаться вдоль контура с некоторой скоростью  $ds_{*p}(t)/dt$ . При этом фиксированная точка обычно находится в острой или угловой точке на контуре, а подвижная — на гладком участке контура  $L(t)$ . В самом следе вихри движутся с комплексной скоростью  $\bar{v}_0(z_{wp}, t)$ , равной полусумме предельных значений скоростей жидкости с разных границ следа. Скорость схода вихрей определяется относительной скоростью, равной разности абсолютной скорости движения вихрей в следе (в точке  $z_{*p}(t)$ ) и переносной скорости движения точки схода. Сход вихрей происходит по касательной к контуру, поэтому скорость схода вихрей  $w_p(t)$  с контура  $L(t)$  в след  $L_{wp}(t)$  определяется выражением

$$w_p(t) = v_{0\sigma}(s_{*p}, t) - v_{e\sigma}(s_{*p}, t), \quad p = 1, \dots, N_w, \quad (3.1)$$

где  $v_{e\sigma}(s_{*p}, t)$  — переносная скорость точки схода, равная абсолютной скорости этой точки в исходной декартовой системе координат. Следует отметить, что сход вихрей с контура возможен только при  $w_p(t) > 0$ .

Получим общее соотношение, связывающее интенсивность сходящих вихрей  $\gamma_{wp}(0, t)$ , скорость их схода  $w_p(t)$  и циркуляцию скорости  $\Gamma_p(t)$  вокруг вихревого следа  $L_{wp}(t)$ . Для этого рассмотрим выражение (2.4), полагая, что точка  $M \rightarrow z_{*p}$  с границы вихревого следа ( $\sigma_M \rightarrow 0$ ). Задавая в этой точке условие непрерывности давления и используя формулы (2.2), (3.1), получим общее соотношение для точки схода вихрей с контура

$$\frac{d}{dt} \Gamma_p(t) = \gamma_{wp}(0, t) w_p(t), \quad p = 1, \dots, N_w.$$

С использованием теоремы Кельвина о постоянстве циркуляции скорости вокруг замкнутого жидкого контура можно записать еще одно соотношение:

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) + \sum_{p=1}^{N_w} \frac{d}{dt} \Gamma_p(t) = 0, \quad \Gamma(t) = \int_{L(t)} \gamma(s, t) ds,$$

которое связывает скорости схода и интенсивности сходящихся вихревых следов с циркулирующей скорости по контуру  $L(t)$ .

Рассмотрим более подробно условия схода вихрей в след для точек схода различного типа.

**3.2. Острая кромка.** На острой кромке (в точке возврата) касательная к вихревому следу  $L_{wp}(t)$  совпадает с касательной к контуру  $L(t)$  перед кромкой и направлена противоположно ей за кромкой. Поэтому  $v_{\sigma}^+(0, t) = v_s^+(s_{*p} - 0, t)$ ,  $v_{\sigma}^-(0, t) = -v_s^+(s_{*p} + 0, t)$ . Из определений (2.1) и  $\gamma(s, t) = v_s^-(s, t) - v_s^+(s, t)$  следует, что интенсивность сходящихся вихрей находится по соотношению

$$\gamma_{wp}(0, t) = \gamma(s_{*p} - 0, t) + \gamma(s_{*p} + 0, t). \quad (3.2)$$

Аналогично получим выражение для абсолютной скорости движения вихрей, поступающих в след:

$$v_{0\sigma}(s_{*p}, t) = \frac{v_s^+(s_{*p} - 0, t) - v_s^+(s_{*p} + 0, t)}{2} = U_{\sigma}(s_{*p}, t) - \frac{\gamma(s_{*p} - 0, t) - \gamma(s_{*p} + 0, t)}{2}. \quad (3.3)$$

Переносная скорость движения точки схода определяется по формуле  $v_{e\sigma}(s_{*p}, t) = U_{\sigma}(s_{*p}, t)$ . Отсюда следует, что скорость схода вихрей с острой кромки равна

$$w_p(t) = v_{0\sigma}(s_{*p}, t) - v_{e\sigma}(s_{*p}, t) = -[\gamma(s_{*p} - 0, t) - \gamma(s_{*p} + 0, t)]/2. \quad (3.4)$$

**3.3. Угловая кромка.** В случае угловой кромки сход вихрей происходит по касательной к одной из сторон контура в зависимости от знака производной  $d\Gamma_p(t)/dt$  (рис. 3).

Для угловой кромки соотношения (3.2)–(3.4) не меняются. В окрестности угловой кромки одна из линий тока, сходящихся с контура, имеет излом, в точке которого относительная скорость жидкости должна быть равна нулю. При сходе вихревого следа с верхней грани излом линии тока имеет место в точке пересечения нижней грани с вихревым следом. В результате в нижней угловой точке относительная скорость жидкости  $v_{r\sigma}$ , интенсивность сходящихся в след вихрей  $\gamma_{wp}$ , скорость их схода  $w_p$  и производная  $d\Gamma_p/dt$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} v_{r\sigma}(s_{*p} + 0, t) &= v_{\sigma}^+(s_{*p} + 0, t) - U_{\sigma}(s_{*p}, t) = \gamma(s_{*p} + 0, t) = 0, \\ \gamma_{wp}(0, t) &= \gamma(s_{*p} - 0, t), \quad w_p(t) = -\gamma(s_{*p} - 0, t)/2, \\ \frac{d}{dt}\Gamma_p(t) &= -\frac{1}{2}\gamma^2(s_{*p} - 0, t) < 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

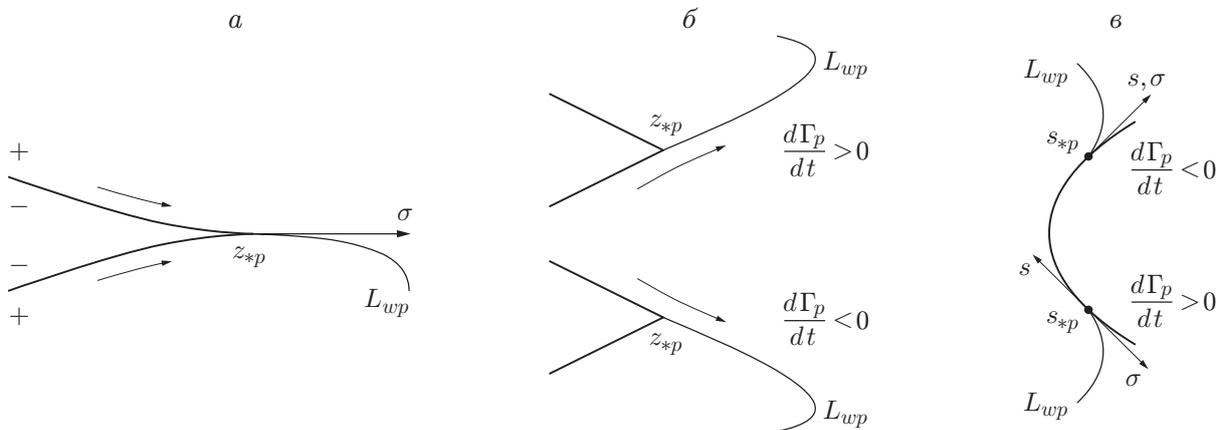


Рис. 3. Сход вихревого следа:

$a$  — острая кромка;  $b$  — угловая точка;  $v$  — точка на гладком контуре

Аналогично при сходе следа с нижней грани справедливы уравнения

$$\begin{aligned} v_{r\sigma}(s_{*p} - 0, t) &= v_{\sigma}^+(s_{*p} - 0, t) - U_{\sigma}(s_{*p}, t) = -\gamma(s_{*p} - 0, t) = 0, \\ \gamma_{wp}(0, t) &= \gamma(s_{*p} + 0, t), \quad w_p(t) = \gamma(s_{*p} + 0, t)/2, \\ \frac{d}{dt} \Gamma_p(t) &= \frac{1}{2} \gamma^2(s_{*p} + 0, t) > 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

**3.4. Гладкий контур.** Точку на гладком контуре можно рассматривать как предельный случай угловой точки с той лишь разницей, что точка схода вихревого следа может перемещаться вдоль контура  $L(t)$  со скоростью  $\dot{s}_{*p}$ . В результате переносная скорость точки схода равна

$$v_{e\sigma}(s_{*p}, t) = \begin{cases} U_{\sigma}(s_{*p}, t) + \dot{s}_{*p}(t), & d\Gamma_p/dt < 0, \\ U_{\sigma}(s_{*p}, t) - \dot{s}_{*p}(t), & d\Gamma_p/dt > 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

С учетом (3.7) в случае гладкого контура формулы (3.5), (3.6) преобразуются в соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Gamma_p(t) < 0: \quad v_{r\sigma}(s_{*p} + 0, t) &= \gamma(s_{*p} + 0, t) - \dot{s}_{*p}(t) = 0, \\ \gamma_{wp}(0, t) &= \gamma(s_{*p} - 0, t) + \dot{s}_{*p}(t), \quad w_p(t) = -[\gamma(s_{*p} - 0, t) + \dot{s}_{*p}]/2, \\ \frac{d}{dt} \Gamma_p(t) > 0: \quad v_{r\sigma}(s_{*p} - 0, t) &= \gamma(s_{*p} - 0, t) + \dot{s}_{*p}(t) = 0, \\ \gamma_{wp}(0, t) &= \gamma(s_{*p} + 0, t) + \dot{s}_{*p}(t), \quad w_p(t) = [\gamma(s_{*p} + 0, t) + \dot{s}_{*p}]/2. \end{aligned}$$

Определение дуговой координаты  $s_{*p}(t)$  точки схода вихревого следа с гладкого контура является сложной задачей. В работе [12] предложен основной критерий схода вихревого следа — обращение в нуль касательной составляющей градиента давления вдоль контура в точке схода. Для выполнения этого условия дуговая координата точки схода должна удовлетворять следующему уравнению:

— при  $d\Gamma_p/dt < 0$

$$\begin{aligned} \dot{U}_s(s_{*p}, t) - \dot{\gamma}(s_{*p} - 0, t) + [\gamma(s_{*p} - 0, t) + \dot{s}_{*p}(t)] \frac{\partial}{\partial s} \gamma(s, t) \Big|_{s=s_{*p}-0} - \\ - [U_s(s_{*p}, t) + \dot{s}_{*p}(t)] \frac{\partial}{\partial s} U_s(s, t) \Big|_{s=s_{*p}} - U_n(s_{*p}, t) \frac{\partial}{\partial s} U_n(s, t) \Big|_{s=s_{*p}} = 0; \end{aligned} \quad (3.8)$$

— при  $d\Gamma_p/dt > 0$

$$\begin{aligned} \dot{U}_s(s_{*p}, t) - \dot{\gamma}(s_{*p} + 0, t) + [\gamma(s_{*p} + 0, t) + \dot{s}_{*p}(t)] \frac{\partial}{\partial s} \gamma(s, t) \Big|_{s=s_{*p}+0} - \\ - [U_s(s_{*p}, t) + \dot{s}_{*p}(t)] \frac{\partial}{\partial s} U_s(s, t) \Big|_{s=s_{*p}} - U_n(s_{*p}, t) \frac{\partial}{\partial s} U_n(s, t) \Big|_{s=s_{*p}} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Уравнения (3.8), (3.9) представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка относительно  $s_{*p}(t)$ . Начальные условия определяются заданием дуговых координат  $s_{*p}(0)$  точек на контуре  $L$ , в которых гидродинамическое давление достигает локального минимального значения в стационарном потоке, а  $\dot{s}_{*p}(0) = 0$ . Функции  $U_s(s, t)$ ,  $U_n(s, t)$  являются заданными, а интенсивность вихревого слоя  $\gamma(s, t)$  определяется решением соответствующей нелинейной начально-краевой задачи, которое, в свою очередь, зависит от положения  $s_{*p}(t)$  точек отрыва потока и скорости их движения  $\dot{s}_{*p}(t)$ .

Таким образом, уравнения (3.8), (3.9) представляют собой лишь часть нелинейных уравнений, к совместному решению которых сводится конкретная начально-краевая задача нестационарного отрывного обтекания гладкого контура.

**3.5. Постулат Кутты — Жуковского — Чаплыгина.** Сход вихревого следа с острой или угловой кромки обеспечивает выполнение данного постулата, так как скорость жидкости в этих кромках остается конечной в течение всего времени движения контура. Однако строгое выполнение условий (3.5), (3.6) в угловой точке контура приводит к парадоксальному результату: решение задачи нестационарного обтекания контура со сколь угодно малым углом между касательными в угловой точке в предельном случае не переходит в решение задачи с острой кромкой (в виде точки возврата) [10, 13]. Этот парадокс является следствием ограниченности модели идеальной жидкости, которая допускает излом линий тока в окрестности угловой кромки. Корректировка этой модели путем локальной замены угловой кромки на острую приводит к физически приемлемым результатам. Следует отметить, что такая корректировка происходит автоматически в алгоритмах расчета, не требующих точного выполнения условия равенства нулю относительной скорости в угловой точке на линии тока (например, при моделировании вихревого следа системой дискретных вихрей). Численный эксперимент показал, что локальная замена угловой точки на острую позволяет эффективно решать задачи обтекания контуров различной формы включая окружность.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предпринята попытка строгого изложения основных уравнений и соотношений для широкого класса нелинейных начально-краевых задач теории крыла в плоском нестационарном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Приведенные результаты позволяют формулировать конкретные задачи и строить соответствующие алгоритмы их решения. Основное внимание уделено анализу условий схода вихревых следов с контура, которые являются дополнительными к краевым и начальным условиям. Эти условия связывают интенсивности вихревых следов с интенсивностью вихревого слоя на контуре профиля, что позволяет замкнуть систему уравнений в алгоритме решения конкретной задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Giesing J. P.** Nonlinear two-dimensional unsteady potential flow with lift // *J. Aircraft*. 1968. V. 5, N 2. P. 135–143.
2. **Горелов Д. Н., Куляев Р. Л.** Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1971. № 6. С. 38–48.
3. **Ильичев К. П., Постоловский С. Н.** Расчет нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1972. № 2. С. 72–82.
4. **Молчанов В. Ф.** Некоторые вопросы расчета течений с тангенциальными разрывами // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1975. Т. 6, № 4. С. 1–10.
5. **Белоцерковский С. М.** Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью / С. М. Белоцерковский, М. И. Ништ. М.: Наука, 1978.
6. **Бетяев С. К.** Эволюция вихревых пелен // *Динамика сплошной среды со свободными поверхностями*. Чебоксары: Чуваш. гос. ун-т, 1980. С. 27–38.

7. **Зобнин А. И.** Моделирование начальной стадии развития вихревого следа за телесным профилем // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1983. Вып. 60. С. 51–59.
8. **Белоцерковский С. М.** Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания / С. М. Белоцерковский, В. Н. Котовский, М. И. Ништ, Р. М. Федоров. М.: Наука, 1988.
9. **Сарпкая Т.** Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Тр. Американо-ва инж.-мех. Соврем. машиностроение. Сер. А. 1989. № 10. С. 1–60.
10. **Горелов Д. Н., Смолин Ю. С.** Нестационарное обтекание профиля с угловой кромкой // Вычисл. технологии. 2000. № 3. С. 21–28.
11. **Горелов Д. Н.** Методы решения плоских краевых задач теории крыла. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
12. **Горелов Д. Н.** Критерии отрыва нестационарного потока идеальной жидкости с гладкого контура // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 1. С. 74–81.
13. **Горелов Д. Н.** Парадокс угловой кромки профиля в нестационарном потоке // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 45–51.

*Поступила в редакцию 12/VII 2005 г.,  
в окончательном варианте — 15/VI 2006 г.*

---