7. **Luk'yanov G. A., Pavlova N. O., Zhinzhikov G. M.** Nonequilibrium phenomena in rapidly expanding plasma flows.— In: Proc. XV Intern. Conf. on Phenom. Ionized Gases: Contrib. Papers, pt II. Minsk, 1981.
8. **Лукьянов Г. А.** О рекомбинационном плазмодинамическом лазере на свободно расширяющейся струе плазмы водорода.— ЖТФ, 1976, т. 46, № 4.

Поступила 21/III 1984 г.

УДК 533.7+536.24

МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА МНОГОЭЛЕМЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Г. А. Павлов

(Черноголовка)

Исследования течения и процессов тепломассообмена многоэлементной плазмы с ограничивающими поверхностями необходимы при конструировании перспективных энергетических и других технических устройств [1]. Экспериментальное изучение тепломассообмена в данных устройствах затруднено, поэтому прибегают к численному моделированию движения многокомпонентной частично-ионизованной плазмы в приближении локального термодинамического равновесия (ЛТР) на основе определенной системы уравнений (см., например, [2]) с заданными граничными и начальными условиями. Диапазон параметров, в котором следует задать теплофизические свойства вещества для численного моделирования ($p \sim 10^{-1}$—10^3 МПа, $T \sim 10^3$—10^5 К), включает важную и недостаточно изученную область плазмы с сильным кулоновским взаимодействием. Последовательное описание свойств такой плазмы из-за сильного межчастичного взаимодействия невозможно, поэтому возникла проблема построения теоретических моделей, основанных, в частности, на известных экспериментальных данных.

В [3, 4] сформулирован модельный подход к вычислению кинетических коэффициентов неидеальной плазмы — коэффициентов вязкости ζ, η, транспортной теплопроводности λ', многокомпонентных коэффициентов диффузии D_{ik} и термодиффузии D_i^T. С этой целью предложено использовать систему классических кинетических уравнений, интегралы столкновений которой определены в больцмановской форме с учетом элементарных процессов, существенных в неидеальной плазме, качественных особенностей ее состава и данных по кинетическим коэффициентам неидеальных классических кулоновских систем. Такой подход позволяет разделить вклады в кинетические коэффициенты, обусловленные конкретным компонентным составом плазмы и сильным кулоновским взаимодействием в ней, т. е. некулоновские и кулоновские эффекты. При переходе от D_{ik}, D_i^T к эффективным коэффициентам переноса (ЭКП), через которые выражены массовые потоки химических элементов $\mathbf{J}_a$ (в том числе электрический ток $\mathbf{J}_e$) и поток тепла $\mathbf{J}_q$, следует, согласно [3, 4], принять во внимание неидеальность в термодинамических силах.

Изложенная выше схема вычисления ЭКП достаточно сложна. Поэтому для контроля численных значений ЭКП (ζ, η, $\lambda' > 0$) необходимо использовать общие ограничения на нелинейную, недиагональную матрицу ЭКП, описывающую перенос энергии и массы (заряда) в многоэлементной плазме в приближении ЛТР. Свойства матрицы ЭКП важны также при использовании последней в задачах высокотемпературной газодинамики. Элементы матрицы ЭКП связаны с коэффициентами при старших производных (но не совпадают с ними) в системе уравнений диффузии химических элементов и энергии. Очевидно, от свойств матрицы коэффициентов при старших производных в системе уравнений диффузии и энергии зависит характер решений данной системы. Исследуем матрицу коэффициентов при старших производных в системе уравнений диффузии химических элементов и энергии, а также матрицу ЭКП, исходя из соотношений термодинамики необратимых процессов, сформулированной относительно химических потенциалов элементов, и условий термодинамической устойчивости.

Уравнения диффузии химических элементов и энергии при условии, что E, $H = 0$, p — const, $\mathbf{v} = 0$ (излучение не принято во внимание), имеют вид [2]

$$(1)\qquad \rho dc_a/dt = -\operatorname{div} \mathbf{J}_a + \dot{c}_a,\ 1 \leqslant a \leqslant N_a - 1,\ \rho dh/dt = -\operatorname{div} \mathbf{J}_q + \dot{h},$$

где ρ — плотность; $\dot{c}_a$, $\dot{h}$ — источники; h — удельная энтальпия плазмы; $c_a = \Sigma u_{ia} c_i m_a / m_i$; $c_i = \rho_i \Big/ \sum\limits_{k=1}^{N} \rho_k$, $\rho_i = m_i n_i$; $n_i m_i$ — концентрация и масса компонента i; N — число компонентов в плазме; u_{ia} — количество ядер элемента a в компоненте i; m_a — масса элемента a; N_a — число химических элементов, образующих плазму; $\mathbf{J}_a$, $\mathbf{J}_q$ имеют вид

$$(2)\qquad \mathbf{J}_a = \sum_{b=1}^{N_a-1} D_{ab} \nabla c_b + D_a^{\mathrm{T}} \nabla T, \quad \mathbf{J}_q = -(\lambda' - \lambda^{\mathrm{T}}) \nabla T + \sum_{a=1}^{N_a-1} \lambda_a \nabla c_a,$$

где D_{ab}, D_a^{T} — эффективные коэффициенты диффузии и термодиффузии; λ^{T}, λ_a — эффективные коэффициент теплопроводности и диффузионно-термический коэффициент. Поскольку $h = h\left(p, T, c_1 \ldots c_{N_a-1}\right)$ и $\mathbf{J}_a$, $\mathbf{J}_q$ заданы в форме (2), запишем (1) в матричной форме

$$(3)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a(u) \nabla u) + \ldots, \quad u = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{N_a-1} \\ T/T_\delta \end{pmatrix},$$

$$a(u) = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ 0 & \rho & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \dfrac{\rho c_{c_1}}{\lambda} & \dfrac{\rho c_{c_2}}{\lambda} & \ldots & \dfrac{T_\delta \rho c_p}{\lambda} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_{11} & -D_{12} & \ldots & -T_\delta D_1^{\mathrm{T}} \\ -D_{21} & -D_{22} & \ldots & -T_\delta D_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{\lambda_1}{\lambda} & -\dfrac{\lambda_2}{\lambda} & \ldots & \dfrac{T_\delta(\lambda' - \lambda^{\mathrm{T}})}{\lambda} \end{pmatrix},$$

где $c_p = (\partial h/\partial T)_{p,\{c_a\}}$; $c_{c_i} = (\partial h/\partial c_i)_{p,T,c_a \neq c_i}$; T_δ, $\lambda > 0$ — нормировочные коэффициенты; первая матрица в выражении для $a(u)$ (обозначим ее через $b^{-1}(u)$) определяется термодинамическими свойствами плазмы, вторая $(a'(u))$ — ЭКП; здесь опущены члены при младших производных. Заметим, что матрица $a(u)$ не является нормальной, т. е. $a(u)\tilde{a}(u) \neq \tilde{a}(u)a(u)$; таким образом, $a(u)$ не диагонализуется с помощью унитарного преобразования [5]. Кроме того, матрица $a(u)$ является существенно нелинейной, так как D_a^{T} $(p,\ T;\ c_a = 0{,}1) = 0$. Традиционно при исследовании решений (3) с определенными граничными и начальными условиями (см., например, [6—8]) матрица $a(u)$ полагалась параболической (т. е. собственные значения матрицы должны иметь положительные вещественные части). Данное условие гарантирует непрерывность и положительность решений (3) [8]. Исследуем параболичность матриц $a'(u)$, $a(u)$. Выразим $a'(u)$ через феноменологические кинетические коэффициенты и термодинамические производные, воспользовавшись формулировкой производства энтропии $\dot{s}$ относительно химических потенциалов элементов. Запишем (см. [2]) $\dot{s}$ в данном случае в виде

$$(4)\qquad \dot{s} = -\frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q' \nabla T - \frac{1}{T} \sum_{a=1}^{N_a-1} \mathbf{J}_a \nabla_T (\mu_a - \mu_e),$$

где $\mathbf{J}_q' = \mathbf{J}_q - \sum\limits_{a=1}^{N_a} h_a \mathbf{J}_a$; μ_a (μ_e), h_a (h_e) — соответственно химические потенциалы и удельные энтальпии химических элементов (объемного заряда); $h = \sum_{a=1}^{N_a-1} c_a h_a$; $\mu_a = (\partial E/\partial c_a)_{p,s,c_b \neq c_a}$; $h_a = \mu_a + Ts_a$; $s_a = -(\partial F/\partial T)_{\rho,\{c_a\}}$; $F = E - Ts$; E — удельная внутренняя энергия плазмы. По принципу Кюри

$$\mathbf{J}_a = -\alpha_{aQ}\frac{\nabla T}{T^2} - \frac{1}{T}\sum_{b=1}^{N_a-1}\alpha_{ab}\nabla_T(\mu_b - \mu_e), \tag{5}$$

$$\mathbf{J}'_q = -\alpha_{QQ}\frac{\nabla T}{T^2} - \frac{1}{T}\sum_{b=1}^{N_a-1}\alpha_{Qa}\nabla_T(\mu_a - \mu_e)$$

(α_{ij} — феноменологические кинетические коэффициенты). Для того чтобы записать $\mathbf{J}_a$, $\mathbf{J}_q$ в форме (2), т. е. выразить ЭКП через α_{ij}, воспользуемся зависимостью $\mu_a = \mu_a(p, T, \{c_a\})$ и связью между $\mathbf{J}_q$ и $\mathbf{J}'_q$, тогда

$$D_{ab} = -\frac{1}{T}\sum_{l=1}^{N_a-1}\alpha_{al}\mu_b^l, \quad D_a^{\text{т}} = -\frac{\alpha_{aQ}}{T^2}, \tag{6}$$

$$\lambda_a = \sum_{b-1}^{N_a-1}\left[-\frac{\alpha_{Qb}}{T}\mu_a^b + (h_b - h_e)D_{ba}\right], \quad \tilde{\lambda}^{\text{т}} = \sum_{a=1}^{N_a-1}(h_a - h_e)D_a^{\text{т}}.$$

Здесь $\mu_b^a = [\partial(\mu_a - \mu_e)/\partial c_b]_{p,T,c_a \neq c_b}$; $(\alpha_{Qb}/T)\mu_a^b \equiv \lambda'_a$. Заметим, что $\tilde{\lambda}^{\text{т}}$ не совпадает с $\lambda^{\text{т}}$, поскольку при определении $\lambda^{\text{т}}$ $\mathbf{J}_q$ записан через компоненты плазмы. Точно так же $\alpha_{QQ}/T^2 \equiv \tilde{\lambda} \neq \lambda'$, но, очевидно, $\lambda' - \lambda^{\text{т}} = \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}^{\text{т}}$ и $\tilde{\lambda} = \lambda' + \lambda_R > 0$, где λ_R — так называемая «химическая» теплопроводность плазмы [2]. В матричной форме соотношения (6), т. е. выражения для ЭКП, имеют вид (с обратным знаком)

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{h_1 - h_e}{\lambda} & -\frac{h_2 - h_e}{\lambda} & \cdots & \frac{T}{T_\delta} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}}{T} & \frac{\alpha_{12}}{T} & \cdots & \frac{T_\delta}{T^2}\alpha_{1Q} \\ \frac{\alpha_{21}}{T} & \frac{\alpha_{22}}{T} & \cdots & \frac{T_\delta}{T^2}\alpha_{2Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{T_\delta}{T^2}\alpha_{Q1} & \frac{T_\delta}{T^2}\alpha_{Q2} & \cdots & \frac{T_\delta^2\tilde{\lambda}}{T\lambda^2} \end{pmatrix} \times \tag{7}$$

$$\times \begin{pmatrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \cdots & 0 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix} \right].$$

Матрица в квадратных скобках параболическая, так как является произведением двух положительно определенных матриц α и μ. Матрица $-D$, которая получается из матрицы $a'(u)$ без последних строки и столбца, также параболическая и определяет матрицу при старших производных в системе уравнений диффузии химических элементов (без баро- и термодиффузии) [9]. Матрица $a'(u)$, заданная выражением (7), вообще говоря, не является параболической.

Перепишем $a(u)$ в виде, более удобном, чем (3):

$$a(u) = \begin{pmatrix} 1/\rho & & \\ 0 & 1/\rho & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{(h_1 - h_e)'_{c_1}}{\rho c_p T_\delta} & \frac{(h_2 - h_e)'_{c_2}}{\rho c_p T_\delta} & \cdots & \frac{T}{T_\delta^2}\frac{\lambda}{\rho c_p} \end{pmatrix} \alpha\mu. \tag{8}$$

Первая матрица в правой части (8) диагональная в «идеальном» случае, когда $(h_a - h_e)$ не зависят от $\{c_a\}$. Поскольку матрица в квадратных скобках в (7) параболическая, то $a(u)$ в «идеальном» случае также параболическая, в «неидеальном» ($(h_a - h_e)$ зависят от $\{c_a\}$) — $a(u)$, вообще говоря, непараболическая. В качестве примера рассмотрим собственные числа $a(u)$ для двухэлементной среды. Матрица при старших производных в системе (3) и ее собственные числа в данном случае есть

$$a(u) = \begin{pmatrix} -D_{aa}/\rho & -T_\delta D_a^{\text{т}}/\rho \\ \dfrac{c_c D_{aa}}{\rho T_\delta c_p} - \dfrac{\lambda_a}{\rho T_\delta c_p} & \dfrac{c_c T_\delta D_a^{\text{т}}}{\rho T_\delta c_p} + \dfrac{T_\delta(\lambda' - \lambda^{\text{т}})}{\rho T_\delta c_p} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{D_{aa}}{2\rho} + \frac{c_c D_a^{\text{т}}}{2\rho c_p} + \frac{\lambda' - \lambda^{\text{т}}}{2\rho c_p} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + 4\frac{D_{aa}}{\rho^2 c_p}\left((h_a - h_e)'_c\, c D_a^{\text{т}} + \widetilde{\lambda}\right) + 4\frac{D_a^{\text{т}}}{\rho^2 c_p}(-c_c D_{aa} + \lambda_a)},$$

где $-d$ — удвоенное предкоренное выражение в формуле для $\lambda_{1,2}$. С помощью (6) легко показать, что знак d в «неидеальном» случае не определен, а в «идеальном» $d < 0$. Выражение под корнем

$$D_{aa}\left((h_a - h_e)'_c\, c D_a^{\text{т}} + \widetilde{\lambda}\right) + D_a^{\text{т}}(-c_c D_{aa} + \lambda_a) = D_{aa}\widetilde{\lambda} +$$

$$+ D_a^{\text{т}}\left(-(h_a - h_e) D_{aa} - \lambda'_a + (h_a - h_e) D_{aa}\right) = D_{aa}\widetilde{\lambda} - D_a^{\text{т}}\lambda'_a < 0$$

и свойства матрицы $a(u)$ в (9) определяются в основном знаком d.

Таким образом, исследованы свойства нелинейной и недиагональной матрицы при старших производных в системе уравнений диффузии и энергии для многоэлементной плазмы в приближении ЛТР. Показано, что данная матрица в идеальной многоэлементной плазме является параболической. В неидеальной многоэлементной плазме $a(u)$, вообще говоря, непараболическая, и необходимо проводить совместное, согласованное вычисление переносных и термодинамических характеристик для определения свойств матрицы при старших производных, т. е., например, знака выражения $-D_{aa}/2\rho + c_c D_a^{\text{т}}/2\rho\, c_p + (\lambda' - \lambda^{\text{т}})/2\rho c_p$ в (9). Надо также выяснить газодинамические следствия возможной непараболичности $a(u)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иевлев В. М.** Некоторые результаты исследований по газофазному полостному ядерному реактору.— Изв. АН СССР. Энергетика и трансп., 1977, № 6.
2. **Теплофизические** свойства рабочих сред газофазного ядерного реактора/Под ред. В. М. Иевлева. М.: Атомиздат, 1980.
3. **Павлов Г. А.** Коэффициенты переноса плазмы с сильным кулоновским взаимодействием.— ЖТФ, 1984, № 5.
4. **Кучеренко В. И., Павлов Г. А.** К расчету эффективных коэффициентов термодиффузии неидеальной многоэлементной плазмы.— ПМТФ, 1978, № 5.
5. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1970.
6. **Ширяев А. А., Павлов Г. А.** Гиперзвуковое обтекание сферического зонда в атмосфере Юпитера. Препринт ОИХФ АН СССР, 1982.
7. **Павлов Г. А., Ширяев А. А.** Диссипативные структуры в плазме с объемным тепловыделением.— Письма ЖТФ, 1983, т. 9, № 21.
8. **Вольперт А. И., Тишакова Р. С.** Положительные решения второй краевой задачи для квазилинейных параболических уравнений. Препринт ОИХФ АН СССР, 1981.
9. **Gupta P. K., Cooper A. R.** The [D]-matrix for multicomponent diffusion.— Physica, 1971, v. 54, N 1.

Поступила 23/III 1984 г.