

УДК 532.5

ДИВЕРГЕНЦИЯ ГЕЛИКОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ В ТРУБЕ С ТЕКУЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. В. Елисеев, Ю. М. Ветюков, Т. В. Зиновьева

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург
E-mails: yeliseyev@inbox.ru, vetyukov@mail.ru, tatiana.zinovieva@gmail.com

Рассматривается решение задачи связанной гидроупругости для геликоидальной оболочки в жесткой трубе с текущей идеальной несжимаемой жидкостью, представляющее интерес при проектировании теплообменных систем. Течение считается потенциальным, граничные условия ставятся на деформированной поверхности. Используется вариант классической теории упругих оболочек как лагранжевой механики деформируемых поверхностей. Изучаются продольно-крутильные колебания длинной оболочки и естественно закрученного стержня. Установлено, что найденные гидродинамические нагрузки консервативны, поэтому возможна потеря устойчивости типа дивергенции. Определена критическая комбинация параметров.

Ключевые слова: гидроупругость, геликоидальная оболочка, продольно-крутильные колебания, идеальная несжимаемая жидкость, потеря устойчивости, дивергенция.

Введение. В трубопроводах с целью интенсификации теплообмена устанавливаются завихрители потока в форме спиральной ленты — геликоида [1]. При большой скорости потока или малой жесткости ленты возможна потеря устойчивости с превращением энергии потока в катастрофические деформации [2, 3]. В настоящей работе для определения критической комбинации параметров рассматривается соответствующая задача связанной гидроупругости.

Для моделирования геликоидальной оболочки используется лагранжева механика классических оболочек с прямым тензорным исчислением; длинная лента моделируется естественно закрученным стержнем [4]. Как и во многих других работах по гидроупругости, рассматривается потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости [5]. Гидродинамическая нагрузка определена с учетом деформации ленты. Используемый в работе аналитический подход позволяет получить компактную формулу для критических параметров.

1. О теории оболочек Рассматривается материальная поверхность с зависимостью радиус-вектора от координат $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^\alpha)$, $\alpha = 1, 2$. Векторы производных $\mathbf{r}_\alpha \equiv \partial_\alpha \mathbf{r} \equiv \partial \mathbf{r} / \partial q^\alpha$ направлены по касательным к координатным линиям. Орт нормали $\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 / |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|$. В каждой точке поверхности вводится кобазис с условием $\mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta_\beta^\alpha$ (символы Кронекера). Любой вектор представляется в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + v_n \mathbf{n}$, $\mathbf{v}_\perp = v_\alpha \mathbf{r}^\alpha = v^\alpha \mathbf{r}_\alpha$ с ковариантными и контравариантными компонентами. Оператор Гамильтона на поверхности $\nabla = \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha$, поскольку для любого поля $d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi$.

Вводятся первый и второй метрические тензоры:

$$A = \nabla \mathbf{r} = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}_\alpha = I - \mathbf{n} \mathbf{n} = A_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta, \quad A_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta,$$

$$B = -\nabla \mathbf{n} = B_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta, \quad B_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}.$$

Здесь и далее используются диадные представления тензоров [4]; I — единичный тензор в трехмерном пространстве. Ковариантные компоненты $A_{\alpha\beta}$ задают метрику, т. е. длины и углы на поверхности. Функции $A_{\alpha\beta}(q^\alpha)$, $B_{\alpha\beta}(q^\alpha)$ определяют форму поверхности (с точностью до перемещения твердого тела).

Элементами классической оболочки являются материальные нормали с пятью степенями свободы [4, 6]. Вектор малого поворота $\boldsymbol{\omega}$ лежит в касательной плоскости, так же как и все моменты. Малое изменение нормали $\mathbf{n}^\circ = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \equiv \boldsymbol{\psi}$ выражается через перемещение \mathbf{u} :

$$\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\psi} = -\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (1)$$

(индекс “о” соответствует малым приращениям величин). Деформации оболочки в касательной плоскости заданы тензором

$$\varepsilon = A_{\alpha\beta}^\circ \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta = (\nabla \mathbf{u})_\perp^s \equiv (1/2)A \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \cdot A$$

(индекс s обозначает симметрирование, t — транспонирование). Для безмоментной оболочки этого тензора достаточно, но в моментной модели оболочки необходим второй тензор

$$\varkappa = B_{\alpha\beta}^\circ \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta = -(\nabla \boldsymbol{\psi})_\perp + B \cdot \nabla \mathbf{u}^T = (\nabla \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_\perp.$$

Последнее равенство имеет сходство с равенством классической теории изгиба пластин. Рассматриваемый вариант теории оболочек является обобщением представлений о плоском напряженном состоянии и изгибе пластин [4].

Энергия деформации (на единицу площади) $\Pi(\varepsilon, \varkappa)$ — квадратичная функция своих аргументов. При изотропии в касательной плоскости

$$\Pi = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\nu \varepsilon^2 + (1-\nu) \varepsilon \cdot \cdot \varepsilon + \frac{h^2}{12} [\nu \varkappa^2 + (1-\nu) \varkappa \cdot \cdot \varkappa] \right).$$

Здесь E — модуль Юнга; h — толщина; ν — коэффициент Пуассона; ε , \varkappa — первые инварианты (следы тензоров). В безмоментной модели слагаемые с \varkappa отсутствуют.

Система уравнений и граничных условий выводится из принципа виртуальной работы. Силowymi факторами являются симметричные тензоры в касательной плоскости $\tau = \partial \Pi / \partial \varepsilon$, $\mu = \partial \Pi / \partial \varkappa$ и векторный множитель Лагранжа $\mathbf{Q} = -(\nabla \cdot \mu)_\perp$ [4].

2. Лента как оболочка. На рис. 1 показано поперечное сечение ленты. Поверхность образована в результате движения отрезка $|x| \leq a$ вдоль оси z с вращением вокруг этой оси; угол поворота равен Ωz . Параметрическое задание геликоида имеет вид

$$q^1 = z, \quad q^2 = x, \quad \mathbf{r}(q^\alpha) = z \mathbf{k} + x \mathbf{i}(z), \quad \mathbf{i} = \mathbf{i}_1^0 \cos \Omega z + \mathbf{i}_2^0 \sin \Omega z,$$

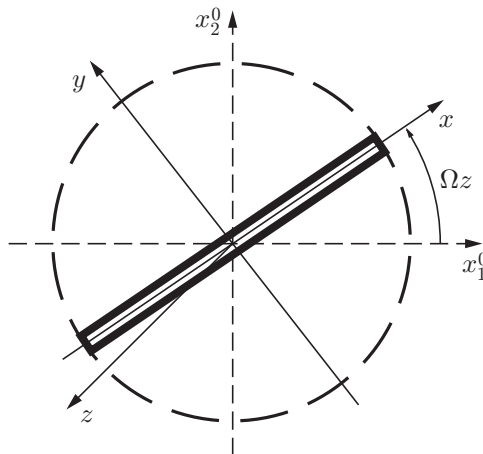


Рис. 1. Сечение ленты

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты “подвижных” осей x, y, z ; $\mathbf{i}_1^0, \mathbf{i}_2^0$ — орты неподвижных осей x_1^0, x_2^0 . Учитывая равенства $\mathbf{i}'(z) = \Omega \mathbf{j}, \mathbf{j}'(z) = -\Omega \mathbf{i}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{k} + \Omega x \mathbf{j} = H \mathbf{e}_1, & H &\equiv \sqrt{1 + \Omega^2 x^2}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{i} = \mathbf{r}^2, & \mathbf{r}^1 &= H^{-1} \mathbf{e}_1, & \nabla &= \mathbf{r}^1 \partial_z + \mathbf{i} \partial_x. \end{aligned} \quad (2)$$

Находим орт нормали и метрические тензоры:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= H^{-1}(\mathbf{j} - \Omega x \mathbf{k}) \Rightarrow \mathbf{j} = H^{-1}(\mathbf{n} + \Omega x \mathbf{e}_1), & \mathbf{k} &= H^{-1}(\mathbf{e}_1 - \Omega x \mathbf{n}), \\ A &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{i} \mathbf{i}, & B &= \Omega H^{-2}(\mathbf{e}_1 \mathbf{i} + \mathbf{i} \mathbf{e}_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Для любых векторов имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}, \\ \nabla \mathbf{u} &= \mathbf{r}^1 [(u'_x - \Omega u_y) \mathbf{i} + (u'_y + \Omega u_x) \mathbf{j} + u'_z \mathbf{k}] + \mathbf{i} (\partial_x u_x \mathbf{i} + \partial_x u_y \mathbf{j} + \partial_x u_z \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4)$$

(штрих обозначает частную производную по z).

Выделив симметричную часть в касательной плоскости, с помощью (2) находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \mathbf{e}_1 \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{e}_1 = H^{-2}[\Omega x (u'_y + \Omega u_x) + u'_z], & \varepsilon_x &= \mathbf{i} \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{i} = \partial_x u_x, \\ 2\varepsilon_{1x} &= H^{-1}(u'_x - \Omega u_y + \Omega x \partial_x u_y + \partial_x u_z). \end{aligned}$$

Из (4) определяется также поворот согласно (1):

$$\psi_x = H^{-1}(\Omega x \partial_x u_z - \partial_x u_y), \quad \psi_y = \Omega x \psi_z, \quad \psi_z = H^{-3}(\Omega x u'_z - u'_y - \Omega u_x).$$

Поскольку геликоид заключен в трубу радиусом a , наиболее вероятными представляются продольно-крутильные деформации со следующей аппроксимацией перемещений:

$$\mathbf{u} = \vartheta(z) x \mathbf{j} + u(z) \mathbf{k}. \quad (5)$$

При этом безмоментные деформации и повороты определяются формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= H^{-2}(u' + \Omega \vartheta' x^2), & \varepsilon_x &= \varepsilon_{1x} = 0, \\ \psi_x &= -H^{-1} \vartheta, & \psi_y &= \Omega x \psi_z, & \psi_z &= H^{-3} x (\Omega u' - \vartheta'). \end{aligned}$$

Для моментного тензора деформаций с помощью (4) получаем

$$\varkappa_1 = H^{-3} x (\vartheta'' - \Omega u''), \quad \varkappa_x = 0, \quad \varkappa_{1x} = H^{-4} (\vartheta' + \Omega^3 x^2 u').$$

Таким деформациям соответствует энергия

$$\Pi(\varepsilon, \varkappa) = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\varepsilon_1^2 + \frac{h^2}{12} [\varkappa_1^2 + 2(1-\nu)\varkappa_{1x}^2] \right).$$

Отметим, что элемент площади $dO = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n} dz dx = H dz dx$.

3. Естественно закрученный стержень. Длинную ленту можно рассматривать как естественно закрученный стержень [4]. В одномерной модели энергия определяется по формуле

$$\begin{aligned} \Pi(u', \vartheta', u'', \vartheta'') &= \int_{-a}^a \Pi(\varepsilon, \varkappa) H dx = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{S_{30} u'^2 + \Omega^2 S_{34} \vartheta'^2 + 2\Omega S_{32} u' \vartheta'}{+} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2}{12} [S_{52} (\vartheta'' - \Omega u'')^2 + 2(1-\nu)(S_{70} \vartheta'^2 + \Omega^6 S_{74} u'^2 + 2\Omega^3 S_{72} \vartheta' u')] \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

где $S_{ij} \equiv \int_{-a}^a H^{-i} x^j dx$ (эти величины вычисляются аналитически). Подчеркнуты слагаемые для безмоментной оболочки, их достаточно и для стержня.

При распределенной нагрузке \mathbf{p} (на единицу площади) виртуальная работа на единицу длины равна

$$\delta W = \int_{-a}^a \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} H dx = q \delta u + m \delta \vartheta, \quad q \equiv \int_{-a}^a p_z H dx, \quad m \equiv \int_{-a}^a p_y x H dx.$$

На “верхнюю” сторону ленты $y = +0$ действует давление жидкости p , выполняется равенство

$$\mathbf{p} = -p\mathbf{n}, \quad p_z = pH^{-1}\Omega x, \quad p_y = -pH^{-1} \Rightarrow q = -\Omega m, \quad m = - \int_{-a}^a px dx. \quad (7)$$

Отметим, что обе нагрузки определяются интегралом m , содержащим лишь нечетную (по x) часть функции. На “нижней” стороне ленты нагрузки определяются аналогично.

Для безмоментной оболочки-стержня $\Pi = \Pi(u', \vartheta')$. Выражения для крутящего момента и продольной силы содержат три коэффициента жесткости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta'} \equiv M &= A\vartheta' + Cu', & \frac{\partial \Pi}{\partial u'} \equiv Q &= Bu' + C\vartheta', \\ (A, B, C) &\equiv \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\Omega^2 S_{34}, S_{30}, \Omega S_{32}). \end{aligned} \quad (8)$$

Лента закреплена на конце $z = 0$ и не нагружена на свободном конце $z = l$. Из принципа виртуальной работы $\int_0^l (\delta W - \delta \Pi) dz = 0$ с учетом сил инерции получаем

$$Q' + q = \rho_2 S_{-10} \ddot{u}, \quad M' + m = \rho_2 S_{-12} \ddot{\vartheta}, \quad z = l: \quad Q = 0, \quad M = 0 \quad (9)$$

(ρ_2 — масса оболочки на единицу площади; точки — производные по времени).

В случае статики аналогичные построения с использованием выражения энергии (6) приводят к следующим выражениям и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial u'}\right)' - \Omega \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \chi'}\right)'' + q = 0, \quad \chi \equiv \Omega u' - \vartheta', \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta'}\right)' + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \chi'}\right)'' + m = 0, \\ z = 0: \quad u = \vartheta = \chi = 0, \quad z = l: \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u'} - \Omega \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \chi'}\right)' = \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta'} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \chi'}\right)' = \frac{\partial \Pi}{\partial \chi'} = 0. \end{aligned}$$

Однако дальнейшие вычисления показывают, что эта усложненная постановка дает практически тот же результат, что и (9).

Приведем выражения для интегралов в (8)

$$S_{34} = \Omega^{-5} [\eta H + 2\eta H^{-1} - 3 \ln(\eta + H)], \quad S_{30} = 2aH^{-1}, \quad S_{32} = 2\Omega^{-3} [\ln(\eta + H) - \eta H^{-1}]$$

($\eta \equiv \Omega a$; $H = \sqrt{1 + \eta^2}$).

4. Обтекание жесткой ленты. Потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнениями

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi, \quad \Delta \varphi = 0, \quad \rho(v^2/2 + \dot{\varphi}) + p = \Lambda(t), \quad (10)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости; φ — потенциал; ρ — плотность; p — давление; Λ — интеграл Лагранжа — Коши. При заданной на поверхности скорости $v_n = \partial_n \varphi$ (производная по нормали) получаем задачу Неймана.

Рассмотрим геометрические соотношения задачи для объема жидкости (два полукруга $x^2 + y^2 \leq a^2$ на рис. 1). Радиус-вектор \mathbf{R} представляется следующим образом:

$$\mathbf{R}(x_\alpha, z) = z\mathbf{k} + \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \equiv x_\alpha \mathbf{i}_\alpha(z), \quad x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad \mathbf{i}_1 \equiv \mathbf{i}, \quad \mathbf{i}_2 \equiv \mathbf{j}.$$

Учитывая равенства $\mathbf{i}'_\alpha(z) = \Omega \mathbf{k} \times \mathbf{i}_\alpha$, определим векторные базис и кобазис:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\alpha &= \partial \mathbf{R} / \partial x_\alpha \equiv \partial_\alpha \mathbf{R} = \mathbf{i}_\alpha, & \mathbf{R}_z &= \partial_z \mathbf{R} = \mathbf{k} + \Omega \mathbf{k} \times \mathbf{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathbf{R}^1 &= \mathbf{i}_1 + \Omega \mathbf{k} x_2, & \mathbf{R}^2 &= \mathbf{i}_2 - \Omega \mathbf{k} x_1, & \mathbf{R}^z &= \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Приведенных соотношений достаточно для построения оператора Гамильтона:

$$\nabla = \mathbf{R}^\alpha \partial_\alpha + \mathbf{R}^z \partial_z = \nabla_\perp + \mathbf{k}(\partial_z - \Omega D),$$

$$\nabla_\perp \equiv \mathbf{i}_\alpha \partial_\alpha, \quad \mathbf{k}D = \mathbf{x} \times \nabla_\perp, \quad D = \epsilon_{\alpha\beta} x_\alpha \partial_\beta$$

($\epsilon_{\alpha\beta} = \pm 1, 0$ — символы Леви-Чивиты). В полярных координатах r, θ имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta, & x_2 &= r \sin \theta, & \mathbf{x} &= r \mathbf{e}_r(\theta), & \mathbf{e}'_r(\theta) &\equiv \mathbf{e}_\theta, & \mathbf{e}'_\theta(\theta) &= -\mathbf{e}_r, \\ \nabla_\perp &= \mathbf{e}_r \partial_r + r^{-1} \mathbf{e}_\theta \partial_\theta & \Rightarrow \quad D &= \partial_\theta. \end{aligned}$$

Рассмотрим поле вектора скорости и его градиент:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_\perp + v_z \mathbf{k}, & \mathbf{v}_\perp &= \nabla_\perp \varphi, & v_z &= (\partial_z - \Omega D) \varphi, \\ \nabla \mathbf{v} &\equiv G = \nabla_\perp \mathbf{v}_\perp + (\partial_z - \Omega D) v_z \mathbf{k} \mathbf{k} + 2 \nabla_\perp v_z \mathbf{k}^s. \end{aligned}$$

Уравнение Лапласа для потенциала принимает вид

$$\Delta \varphi = \text{tr} G = [\Delta_\perp + (\partial_z - \Omega D)^2] \varphi = 0,$$

граничные условия для которого следующие:

$$r = a: \quad v_r = \partial_r \varphi = 0, \quad y = 0: \quad v_n = H^{-1}(v_y - \Omega x v_z) \equiv v_0(x) = 0.$$

Здесь учтено выражение для орта нормали из (3). Равенство $v_0(x) = 0$ имеет место для жесткой (недеформированной) ленты.

Постановку задачи можно преобразовать:

$$\begin{aligned} \varphi &= C_0 z + \Phi(x_\alpha) \Rightarrow \mathbf{v}_\perp = \nabla_\perp \Phi, & v_z &= C_0 - \Omega \epsilon_{\alpha\beta} x_\alpha \partial_\beta \Phi, \\ y = 0: & v_y = \partial_y \Phi = \Omega C_0 H^{-2} x. \end{aligned} \tag{11}$$

Константа C_0 определяется объемным расходом Q_0 :

$$Q_0 = 2 \int_0^\pi d\theta \int_0^a v_z r dr = C_0 \pi a^2 + 2\Omega \int_{-a}^a \Phi(x, 0) x dx. \tag{12}$$

Здесь использованы теорема о дивергенции и условие (11). Задача для Φ имеет вид

$$\begin{aligned} [\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + (r^{-2} + \Omega^2) \partial_\theta^2] \Phi &= 0, \\ r = a: \quad \partial_r \Phi = 0, & \quad \theta = 0, \pi: \quad \partial_\theta \Phi = \Omega C_0 H^{-2} r^2 \quad (H^2 = 1 + \Omega^2 r^2). \end{aligned} \tag{13}$$

Из этой постановки следует, что функция Φ нечетна по x , так же как и v_y , а четными являются v_x и v_z . Тогда согласно уравнению Бернулли (10) давление p — четная функция по x . Нагрузки q и m , определяемые формулами (7), оказываются равными нулю. Тем не

менее построение решения необходимо для дальнейшего анализа, так как поля скорости \mathbf{v} и давления p также представляют интерес.

Задача (13) решается с помощью разложения в ряд Фурье функции

$$\Phi(r, \theta) = C_0 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \Phi_k(r) \cos k\theta,$$

$$\Phi_k(r) = \frac{4}{\pi k^2 \Omega} \left(V_k(k\Omega r) - \frac{V'_k(k\Omega a)}{I'_k(k\Omega a)} I_k(k\Omega r) \right),$$

где $V_k(\xi) \equiv [\xi^2/(4-k^2)] {}_1F_2(1; 2-k/2, 2+k/2; \xi^2/4)$; ${}_1F_2$ — обобщенная гипергеометрическая функция [7]; I_k — модифицированная функция Бесселя. Согласно (12)

$$C_0 = v_{\infty} \left(1 + \frac{4\Omega}{\pi a^2} \int_0^a \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \Phi_k(r) r dr \right)^{-1}$$

($v_{\infty} = Q_0/(\pi a^2)$ — скорость потока в невозмущенной области).

Проведены расчеты для радиуса $a = 6$ мм и крутки $\Omega = 130$ м⁻¹. Поле вектора $v_{\infty}^{-1} \mathbf{v}_{\perp}$ и линии уровня функции $v_{\infty}^{-1} v_z$ показаны на рис. 2, 3.

Задача (13) решалась также методом конечных разностей (см. п. 6). Отличия полученного решения от аналитического решения для Φ , v_r не превышали 0,7 и 1,5 % соответственно.

5. Гидродинамические нагрузки в случае деформированной ленты. Рассмотрим процесс обтекания деформированной, но неподвижной ленты. Такая постановка позволяет найти позиционные, т. е. зависящие от положения ленты, гидродинамические нагрузки.

Поставим условие на ленте. Как и выше, индекс “о” обозначает малые приращения соответствующих величин, в данном случае обусловленные малыми перемещениями ленты \mathbf{u} . Нормальная компонента вектора скорости на ленте равна нулю:

$$(\mathbf{n} + \mathbf{n}^{\circ}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\circ})|_{r+\mathbf{u}} = 0.$$

Учитывая равенства

$$\mathbf{n}^{\circ} = \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{v}|_{r+\mathbf{u}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0,$$

получаем

$$v_n^{\circ} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (14)$$

Поскольку необходимо найти нагрузки на единицу длины, в (5) считаем постоянными поворот и продольное перемещение $\mathbf{u} = \Theta x \mathbf{j} + U \mathbf{k} \Rightarrow \boldsymbol{\psi} = -\Theta H^{-1} \mathbf{i}$. Тогда (14) принимает вид

$$H v_n^{\circ} + G_{yy} \Theta x - G_{zz} \Omega x U + G_{yz} (U - \Omega \Theta x^2) - \Theta v_x = 0,$$

где

$$G_{yy} = \partial_y v_y, \quad G_{zz} = \Omega (y \partial_x v_z - x \partial_y v_z), \quad G_{yz} = \partial_y v_z = \Omega (v_x - x \partial_y v_y + y \partial_y v_x).$$

Так как $\varphi^{\circ} = \Phi^{\circ}(x_{\alpha})$, то $v_z^{\circ} = \Omega (y v_x^{\circ} - x v_y^{\circ}) \Rightarrow y = 0$: $v_n^{\circ} = H v_y^{\circ}$.

Поскольку в граничном условии на ленте величины $y \partial_x v_z$, $y \partial_y v_x$ равны нулю,

$$v_y^{\circ} = (v_x - x \partial_y v_y) (\Theta - \Omega U) = \partial_y \Phi^{\circ} = \pm r^{-1} \partial_{\theta} \Phi^{\circ} \quad (15)$$

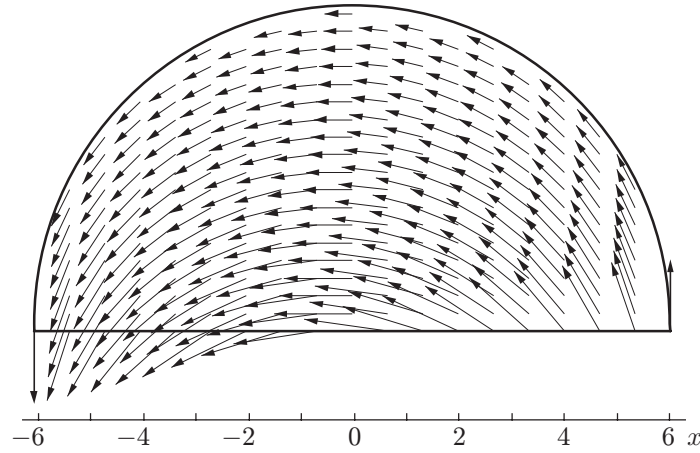


Рис. 2. Поле вектора $v_{\infty}^{-1} \mathbf{v}_{\perp}$ (максимальная длина стрелки соответствует безразмерной скорости, равной 0,67)

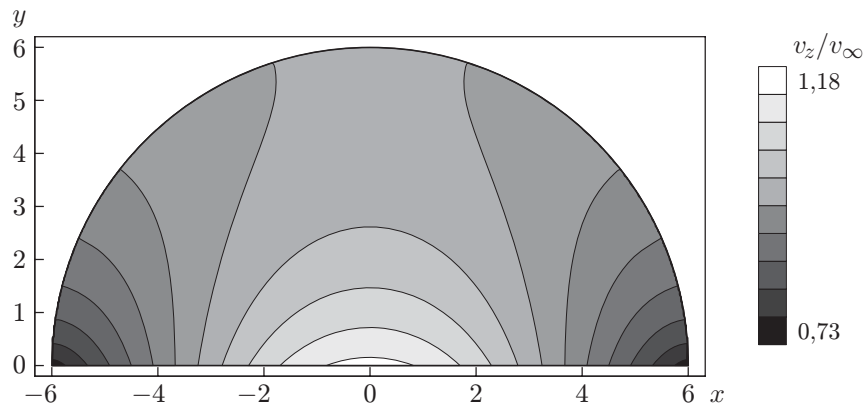


Рис. 3. Изолинии безразмерной осевой скорости

при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ соответственно. Заметим, что при $\theta = 0$

$$v_x = v_r = \partial_r \Phi, \quad \partial_y v_y = \partial_y^2 \Phi = (r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_{\theta}^2) \Phi.$$

Помимо (15) в постановку задачи для Φ° входят дифференциальное уравнение и условие при $r = a$ (такие же, как в (13)). Возможно построение решения тем же способом, что и в п. 4, но метод конечных разностей оказался более эффективным.

Отметим, что функция $v_x - x \partial_y v_y$ в (15) четна по x , поэтому Φ° и v_y° также четны, а v_x° и v_z° нечетны. Однако согласно уравнению (10) $p^{\circ} = -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^{\circ}$ является нечетной по x функцией. Следовательно, нагрузки q° и m° в формуле (7) отличны от нуля.

Поскольку решение задачи пропорционально комбинации параметров $\Theta - \Omega U$, далее рассматриваем задачу при $\Theta - \Omega U = 1$. Находим Φ° , \mathbf{v}° и с учетом “нижнего” полукруга, используя соотношения $v_y = \Omega x v_z$, $v_z^{\circ} = -\Omega x v_y^{\circ}$ при $y = 0$, в соответствии с (7) получаем

$$J \equiv 4 \int_0^a p^{\circ} x dx = -4 \int_0^a \rho v_x v_x^{\circ} x dx \quad \Rightarrow \quad q^{\circ} = \Omega J(\Theta - \Omega U), \quad m^{\circ} = -J(\Theta - \Omega U). \quad (16)$$

Эти выражения для гидродинамических реакций следует подставить в уравнения для ленты (9). Равенство $\partial q^{\circ} / \partial \Theta = \partial m^{\circ} / \partial U$ означает консервативность найденных позиционных нагрузок.

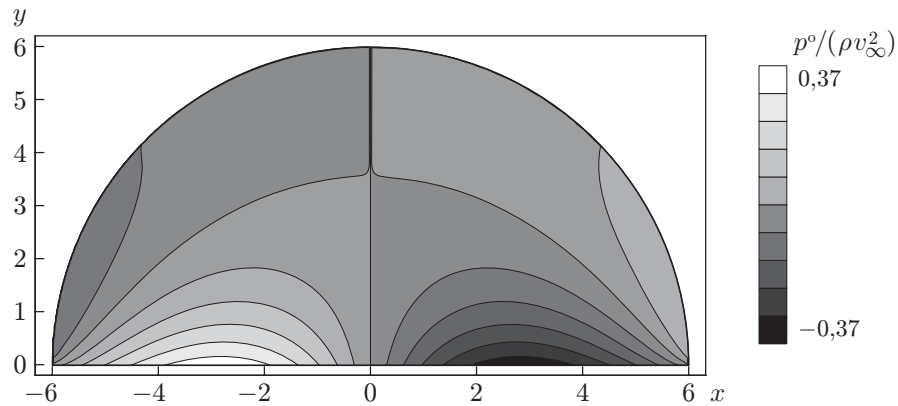


Рис. 4. Изолинии безразмерного возмущенного давления

Рассмотрим условие разрешимости задач для полукруга:

$$(\Delta + \Omega^2 \partial_\theta^2) \Phi = 0, \quad r = a: \quad \partial_r \Phi = 0, \quad y = 0: \quad \partial_y \Phi = f(x). \quad (17)$$

Имеем

$$\int \Delta \Phi dF = \oint \partial_\gamma \Phi d\sigma, \quad \int \partial_\theta^2 \Phi dF = \int_0^a \partial_\theta \Phi|_0^\pi r dr \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) H^2 dx = 0, \quad (18)$$

где γ — орт нормали на контуре области площадью F ($r = a: \partial_\gamma = \partial_r, y = 0: \partial_\gamma = -\partial_y$).

Условие разрешимости $\int_{-a}^a f(x) H^2 dx = 0$ выполнено в задаче для Φ , поскольку в этой задаче функция $f(x)$ нечетна. Это условие выполняется также в задаче для Φ^o , поскольку в ней

$$\int_0^a f H^2 dx = r \partial_r \Phi|_0^a = 0.$$

Решение данной задачи получено методом конечных разностей (для тех же a и Ω , что и в п. 4). На рис. 4 представлены изолинии безразмерного возмущенного давления $\rho^{-1} v_\infty^{-2} p^o = -v_\infty^{-2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^o$. При скорости $v_\infty = 10$ м/с и плотности $\rho = 10^3$ кг/м³ интеграл в (16) равен $J = -1,71$ Н.

6. Конечно-разностный метод. Альтернативой решению в виде тригонометрических рядов задачи (13) является численный анализ с помощью метода конечных разностей [8]. Неизвестная функция $\Phi(r, \theta)$ “проецируется” на сетку, состоящую из узлов r_i, θ_j . Численная схема позволяет вычислить приближенные значения функции $\Phi_{i,j} \equiv \Phi(r_i, \theta_j)$ в узлах; сама функция может быть затем восстановлена посредством интерполяции, а ее интегральные характеристики и производные вычисляются по узловым значениям с помощью стандартных методов вычислительной математики.

Задача рассматривается в области $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi/2$. В зависимости от варианта анализа (жесткая лента, невозмущенное течение (см. п. 4) или деформированная лента, возмущенное течение (см. п. 5) при $\theta = \pi/2$ ставим соответственно граничное условие антисимметрии или симметрии. Используется простейшая регулярная сетка с узлами $r_i = h_r i, \theta_j = h_\theta j$; межузловые расстояния равны $h_r = a/N, h_\theta = \pi/(2N)$, где N — количество подынтервалов в каждом направлении, с увеличением которого должна повышаться точность расчета.

Сетка содержит $(N + 1)^2$ узлов, и такое же количество неизвестных $\Phi_{i,j}$ необходимо определить. Для этого “проецируем” на сетку уравнения и граничные условия (17). Используем стандартные формулы для замены производных функции линейной комбинацией узловых значений [8]:

$$\begin{aligned}(\partial_r^2 \Phi)_{i,j} &\rightarrow \frac{1}{h_r^2} (\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j}), \\(\partial_\theta^2 \Phi)_{i,j} &\rightarrow \frac{1}{h_\theta^2} (\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j}), \\(\partial_r \Phi)_{i,j} &\rightarrow \frac{1}{2h_r} (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}).\end{aligned}\tag{19}$$

Подставляя (19) в дифференциальное уравнение и используя получившееся равенство для каждой точки внутри области, находим $(N - 1)^2$ линейных уравнений для $\Phi_{i,j}$. Остальные $(N + 1)^2 - (N - 1)^2 = 4N$ уравнений следуют из граничных условий.

Для симметричного поля $\partial_\theta \Phi|_{\theta=\pi/2} = 0$, что означает $\Phi_{i,N} = \Phi_{i,N-1}$ (т. е. использована конечно-разностная формула с аппроксимацией “назад”); $0 \leq i \leq N$. Для антисимметричного поля условие имеет более простой вид $\Phi_{i,N} = 0$.

На границе $\theta = 0$ условие (17) аппроксимируется следующим образом: $\Phi_{i,1} - \Phi_{i,0} = h_r r_i f(r_i)$, $0 \leq i \leq N$ (конечно-разностная аппроксимация “вперед”); в этом выражении учтена связь между производными по y и по θ .

На внешнем радиусе $r = a$ имеем $\Phi_{N-1,j} = \Phi_{N,j}$, $1 \leq j \leq N - 1$. Поскольку в точке $r = 0$ в качестве значения Φ можно выбрать произвольную аддитивную постоянную, задаем $\Phi_{0,j} = 0$, $1 \leq j \leq N - 1$.

Теперь количество уравнений соответствует количеству неизвестных, и узловые значения Φ находятся решением линейной системы уравнений. Отметим, что невыполнение условия разрешимости (18) приводит к появлению особенностей в решении Φ , которые нарастают с увеличением количества узлов. Сходящиеся решения могут быть получены лишь при сбалансированной нагрузке $f(x)$.

7. Дивергенция ленты в потоке. Поскольку исследуемая система консервативна, потеря устойчивости обнаруживается с помощью статического метода: при малых отклонениях от положения равновесия однородная задача имеет также нетривиальное решение [3, 4].

Используя (7), (8) и (16), получаем задачу

$$\begin{aligned}A\vartheta'' + C u'' - J(\vartheta - \Omega u) &= 0, & B u'' + C \vartheta'' + \Omega J(\vartheta - \Omega u) &= 0, \\z = 0: \quad \vartheta = 0, \quad u = 0, & \quad z = l: \quad M = 0, \quad Q = 0 &\Rightarrow \vartheta' = 0, \quad u' = 0.\end{aligned}$$

Нетривиальное решение существует при условии

$$\begin{aligned}\cos \lambda l = 0, \quad \lambda^2 \equiv J \frac{A\Omega^2 + B + 2C\Omega}{C^2 - AB} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) &\Rightarrow \lambda^2 = \frac{\pi^2}{4l^2}.\end{aligned}$$

Равенство $\lambda^2 = \pi^2/(4l^2)$ определяет критическую комбинацию параметров, при которых возникает дивергенция. При приведенных выше значениях a , Ω , v_∞ , ρ , толщине ленты $h = 0,8$ мм, модуле Юнга $E = 210$ ГПа и коэффициенте Пуассона $\nu = 0,28$ получаем критическую длину $l_* = 1,73$ м.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Щукин В. К.** Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. М.: Машиностроение, 1970.
2. **Вольмир А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979.
3. **Циглер Г.** Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971.
4. **Елисеев В. В.** Механика упругих тел. СПб.: Изд-во С.-Петербур. гос. политехн. ун-та, 2003.
5. **Бочкарев С. А., Матвеев В. П.** Численное моделирование устойчивости нагруженных оболочек вращения при внутреннем течении жидкости // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 185–195.
6. **Eliseev V. V., Vetyukov Y. M.** Finite deformation of thin shells in the context of analytical mechanics of material surfaces // Acta Mech. 2010. V. 209, N 1. P. 43–57.
7. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды: В 3 т. Т. 2. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Физматлит, 2003.
8. **Ильин В. П.** Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Ин-т математики, 2000.

*Поступила в редакцию 26/III 2009 г.,
в окончательном варианте — 16/IV 2010 г.*
