ЛИТЕРАТУРА

1. **Журков С. Н., Нарзуллаев Б. Н.** Временная зависимость прочности тведых тел.— ЖТФ, 1953, т. 23, с. 1677.
2. **Регель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. И.** Кинетическая природа прочности твердых тел. М., «Наука», 1974.
3. **Никитенко А. Ф., Соснин О. В.** О разрушении при ползучести.— ПМТФ, 1967, № 3, с. 74.
4. **Иванова В. С., Одинг И. А., Фридман З. Г.** Некоторые закономерности длительной прочности.— «Изв. АН СССР. Металлургия и топливо», 1960, № 5, с. 33.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ВИДЕ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ ЛЕЖАНДРА

Г. В. Иванов

(Новосибирск)

Используя полиномы Лежандра, можно указать другую, по сравнению с известными в литературе [1, 2], процедуру сведения задачи к решению алгебраической системы или к решению краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Формулировка задачи. Плоская смешанная краевая задача теории упругости состоит в отыскании функций p, q, τ, u, v, удовлетворяющих уравнениям

$$\partial p/\partial x + \partial\tau/\partial y + \gamma_1 = 0,\ \partial\tau/\partial x + \partial q/\partial y + \gamma_2 = 0,$$

$$p - \alpha\partial u/\partial x - \beta\partial v/\partial y = 0,\ q - \alpha\partial v/\partial y - \beta\partial u/\partial x = 0,$$

$$\tau - \mu(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) = 0,\ \alpha = 2\mu\,(1-\nu)/(1-2\nu),\ \nu < 1/2,\quad \mu > 0,$$

$$\beta = \alpha\nu/(1-\nu)$$

внутри некоторой области Ω и принимающих на границе области заданные значения. Ограничимся случаем, когда Ω — квадрат, $\Omega = \{x, y \mid x\in[-1, 1], y\in[-1,1]\}$, граничные условия таковы, что преобразованием искомых функций задача сводится к отысканию функций p, q, τ, u, v, удовлетворяющих нулевым граничным условиям

$$(pu)_{x=\pm1} = (qv)_{y=\pm1} = (\tau v)_{x=\pm1} = (\tau u)_{y=\pm1} = 0 \tag{1.1}$$

и уравнениям

$$\partial p/\partial x + \partial\tau/\partial y + f_1 = 0,\ \partial\tau/\partial x + \partial q/\partial y + f_2 = 0,$$

$$p - \alpha\partial u/\partial x - \beta\partial v/\partial y + f_3 = 0,\ q - \alpha\partial v/\partial y - \beta\partial u/\partial x + f_4 = 0,$$

$$\tau - \mu\,(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) + f_5 = 0,$$

где f_σ ($\sigma = 1, \ldots, 5$) — известные квадратично суммируемые по Ω функции. Полагаем, что в каждом из равенств (1.1) одна из перемножаемых функций равна нулю на всей стороне квадрата.

Если в случае перемещения квадрата как абсолютно твердого тела

$$u = a + \omega y,\ v = b - \omega x$$

(a, b, ω — постоянные) из граничных условий (1.1) не следуют равенства

$$a = b = \omega = 0, \tag{1.2}$$

то условия (1.1) будем дополнять теми из уравнений

$$\int\limits_{\Omega} u d\Omega = 0, \ \int\limits_{\Omega} v d\Omega = 0, \ \int\limits_{\Omega} (uy - vx)\, d\Omega = 0, \tag{1.3}$$

которые вместе с условиями (1.1) обеспечивают выполнение равенств (1.2). В тех случаях, когда используются какие-либо из уравнений (1.3), функции f_1, f_2 не могут быть произвольными. Уравнениям (1.3) сопоставим уравнения

$$\int\limits_{\Omega} f_1 d\Omega = 0, \ \int\limits_{\Omega} f_2 d\Omega = 0, \ \int\limits_{\Omega} (f_1 y - f_2 x)\, d\Omega = 0. \tag{1.4}$$

При использовании каких-либо из уравнений (1.3) функции f_1, f_2 должны удовлетворять соответствующим уравнениям в (1.4).

2. Приближенное решение. Обозначим

$$p^{nm} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} p_{ki}^{nm} P_k Q_i, \quad q^{nm} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} q_{ki}^{nm} P_k Q_i, \tag{2.1}$$

$$\tau_1^{nm} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m+1} \tau_{ki}^{nm} P_k Q_i, \quad \tau_2^{nm} = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{m-1} \tau_{ki}^{nm} P_k Q_i,$$

$$u_0^{nm} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} u_{ki}^{nm} P_k Q_i, \quad v_0^{nm} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m} v_{ki}^{nm} P_k Q_i,$$

$$u_1^{nm} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m+1} u_{ki}^{nm} P_k Q_i, \quad v_1^{nm} = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{m} v_{ki}^{nm} P_k Q_i,$$

$$u_2^{nm} = \sum_{k=0}^{n+2} \sum_{i=0}^{m-1} u_{ki}^{nm} P_k Q_i, \quad v_2^{nm} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m+2} v_{ki}^{nm} P_k Q_i,$$

где n, $m \geqslant 1$; $p_{ki}^{nm}, q_{ki}^{nm}, \tau_{ki}^{nm}, u_{ki}^{nm}, v_{ki}^{nm}$ — постоянные; $P_k = P_k(y)$, $Q_i = Q_i(x)$ — полиномы Лежандра [3], ортогональные на промежутке $[-1, 1]$; k, i — степени полиномов.

Потребуем, чтобы функции (2.1) удовлетворяли нулевым граничным условиям

$$(p^{nm} u_1^{nm})_{x=\pm 1} = (q^{nm} v_1^{nm})_{y=\pm 1} = (\tau_1^{nm} v_2^{nm})_{x=\pm 1} = (\tau_2^{nm} u_2^{nm})_{y=\pm 1} = 0 \tag{2.2}$$

и уравнениям

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial p^{nm}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2^{nm}}{\partial y} + f_1 \right) P_k Q_i d\Omega = 0, \ k = 0, 1, \ldots, n, \ i = 0, 1, \ldots, m-1; \tag{2.3}$$

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \tau_1^{nm}}{\partial x} + \frac{\partial q^{nm}}{\partial y} + f_2 \right) P_k Q_i d\Omega = 0, \ k = 0, 1, \ldots, n-1, \ i = 0, 1, \ldots, m;$$

$$\int\limits_{\Omega} \left(p^{nm} - \alpha \frac{\partial u_1^{nm}}{\partial x} - \beta \frac{\partial v_1^{nm}}{\partial y} + f_3 \right) P_k Q_i d\Omega = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega} \left(q^{nm} - \alpha \frac{\partial v_1^{nm}}{\partial y} - \beta \frac{\partial u_1^{nm}}{\partial x} + f_4 \right) P_k Q_i d\Omega = 0,$$

$$k = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots, m;$$

$$\int\limits_{\Omega}\left[\tau_2^{nm}-\mu\left(\frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y}+\frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x}\right)+f_5\right]P_kQ_id\Omega=0,$$

$$k=0,1,2,\ldots,n+1,\quad i=0,1,2,\ldots,m-1;$$

$$\int\limits_{\Omega}\left[\tau_1^{nm}-\mu\left(\frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y}+\frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x}\right)+f_5\right]P_kQ_id\Omega=0,$$

$$k=0,1,2,\ldots,n-1,\quad i=0,1,2,\ldots,m+1.$$

Предполагается, что в каждом из равенств (2.2) один из сомножителей (тот же, что и в (1.1)) равен нулю на всей стороне квадрата.

Если формулировка задачи содержит какие-либо из уравнений (1.3), то систему (2.2), (2.3) будем дополнять соответствующими равенствами

$$u_{00}^{nm}=0,\, v_{00}^{nm}=0,\; u_{10}^{nm}-v_{01}^{nm}=0 \tag{2.4}$$

и исключать из (2.3) те из уравнений

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial p^{nm}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_2^{nm}}{\partial y}+f_1\right)P_jd\Omega=0,\; j=0,1,\; \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial \tau_1^{nm}}{\partial x}+\frac{\partial q^{nm}}{\partial y}+f_2\right)d\Omega=0,$$

которые являются следствием остальных уравнений системы (2.2), (2.3) и равенств (1.4).

Уравнения (2.2), (2.3) вместе с соответствующими равенствами (2.4) образуют замкнутую систему для функций (2.1). Решение этой системы назовем приближенным решением. Касательное напряжение в приближенном решении можно вычислять по формуле

$$\tau^{nm}=\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{m-1}\tau_{ki}^{nm}P_kQ_i+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=m}^{m+1}\tau_{ki}^{nm}P_kQ_i.$$

Функция τ^{nm} удовлетворяет уравнениям (2.3), если вместо τ_1^{nm}, τ_2^{nm} подставить τ^{nm}. Граничным условиям τ^{nm} удовлетворяет приближенно.

3. Энергетическое свойство приближенного решения. Полагаем, что приближенное решение существует. Используя (2.2), (2.3) и очевидные равенства типа

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial p^{nm}}{\partial x}u_0^{nm}d\Omega=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial p^{nm}}{\partial x}u_1^{nm}d\Omega,$$

можно найти

$$\int\limits_{\Omega}\left[f_1u_0^{nm}+f_2v_0^{nm}+f_3\frac{\partial u_1^{nm}}{\partial x}+f_4\frac{\partial v_1^{nm}}{\partial y}+f_5\left(\frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y}+\frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x}\right)\right]d\Omega=E_{nm}, \tag{3.1}$$

где

$$E_{nm}=G_1(u_1^{nm},v_1^{nm})+G_2(u_2^{nm},v_2^{nm});$$

$$G_1(\varphi,\psi)=\int\limits_{\Omega}\left[\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]d\Omega;$$

$$G_2(\varphi,\psi)=\int\limits_{\Omega}\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2d\Omega.$$

4. Оценка перемещений, обусловленных деформацией. Пусть u — функция из $L_2(\Omega)$, имеющая принадлежащую $L_2(\Omega)$ обобщенную производную $\partial u/\partial x$ [4]. Обозначим через $u_{k,i}$, $a_{k,i}$ коэффициенты Фурье функций u, $\partial u/\partial x$

$$u \sim \sum_{k,i=0}^{\infty} u_{k,i} P_k Q_i, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \sim \sum_{k,i=0}^{\infty} a_{k,i} P_k Q_i.$$

Используя свойство полиномов Лежандра [3]

$$(4.1)\qquad \frac{\partial}{\partial x}(Q_{s+1} - Q_{s-1}) = (1+2s) Q_s, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

находим

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} P_r\, (Q_{s+1} - Q_{s-1})\, d\Omega = (1+2s) \int_\Omega u P_r Q_s d\Omega,$$

и, следовательно

$$u_{r,s} = [1/(2s-1)] a_{r,s-1} - [1/(2s+3)] a_{r,s+1},$$
$$r = 0, 1, 2, \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Очевидно,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1+2s} u_{r,s}^2 \leqslant a_{r,0}^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{2s-1} a_{r,s-1}^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2s+3} a_{r,s+1}^2,$$

поэтому

$$(4.2)\qquad \left\| u - \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,0} P_k \right\| \leqslant \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|.$$

В (4.2) и ниже символ $\| \ \|$ означает норму в $L_2(\Omega)$. Используя (4.2) и положительную определенность подынтегрального выражения в функционале G_1, находим

$$(4.3)\qquad \left\| u_1^{nm} - \sum_{k=0}^{n} u_{k0}^{nm} P_k \right\|^2 + \left\| v_1^{nm} - \sum_{i=0}^{m} v_{0i}^{nm} Q_i \right\|^2 \leqslant CG(u_1^{nm}, v_1^{nm}).$$

Буквой C в (4.3) и ниже обозначается постоянная, не зависящая от n, m.

Согласно (4.1),

$$(4.4)\qquad \int_\Omega \left(\frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y} + \frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x} \right) (P_{r+1} - P_{r-1})(Q_{s+1} - Q_{s-1})\, d\Omega =$$
$$= \int_\Omega \left[(1+2r) u_2^{nm} P_r (Q_{s+1} - Q_{s-1}) + (1+2s) v_2^{nm} Q_s (P_{r+1} - P_{r-1}) \right] d\Omega,$$
$$s, r = 1, 2, \ldots$$

Обозначим

$$\frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y} + \frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x} = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{m+1} b_{k,i}^{nm} P_k Q_i.$$

Полагая в (4.4) $s = 1$, получим

$$u_{r0}^{nm} = \frac{1}{2r-1} b_{r-1,0}^{nm} - \frac{1}{2r+3} b_{r+1,0}^{nm} - \frac{1}{5(2r-1)} b_{r-1,2}^{nm} +$$
$$+ \frac{1}{5(2r+3)} b_{r+1,2}^{nm} + \frac{1}{5} u_{r2}^{nm} - \frac{1}{2r-1} v_{r-11}^{nm} + \frac{1}{2r+3} v_{r+11}^{nm}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

и, следовательно,

$$(u_{10}^{nm}+v_{01}^{nm})^2 \leqslant \frac{1}{5}\Big[(u_{12}^{nm}+v_{21}^{nm})^2+25(b_{0,0}^{nm})^2+(b_{2,0}^{nm})^2+(b_{0,2}^{nm})^2+ + \frac{1}{9}(b_{2,2}^{nm})^2\Big], \tag{4.5}$$

$$\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{2r+1}(u_{r0}^{nm})^2 \leqslant \sum_{r=0}^{n+1}\frac{1}{2r+1}\Big[(b_{r,0}^{nm})^2+\frac{1}{5}(b_{r,2}^{nm})^2\Big]+ + \frac{7}{5}\Big[\frac{1}{5}\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{2r+1}(u_{r2}^{nm})^2+\frac{1}{3}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2r+1}(v_{r1}^{nm})^2\Big].$$

Из (4.3), (4.5) находим

$$(u_{10}^{nm}+v_{01}^{nm})^2 \leqslant CE_{nm},\quad \Big\|\sum_{k=2}^{n}u_{k0}^{nm}P_k\Big\|^2 \leqslant CE_{nm}. \tag{4.6}$$

Аналогично получаем оценку

$$\Big\|\sum_{i=2}^{m}v_{0i}^{nm}Q_i\Big\|^2 \leqslant CE_{nm}. \tag{4.7}$$

Из (4.3), (4.6), (4.7) следует

$$\Big\|u_1^{nm}-\sum_{k=0}^{1}u_{k0}^{nm}P_k\Big\|^2+\Big\|v_1^{nm}-\sum_{i=0}^{1}v_{0i}^{nm}Q_i\Big\|^2 \leqslant CE_{nm}, \tag{4.8}$$

$$(u_{10}^{nm}+v_{01}^{nm})^2 \leqslant CE_{nm}.$$

Очевидно,

$$\|u_2^{nm}\|^2=\|u_0^{nm}\|^2+\Big\|\sum_{i=0}^{m-1}u_{n+1i}^{nm}P_{n+1}Q_i\Big\|^2+\Big\|\sum_{i=0}^{m-1}u_{n+2i}^{nm}P_{n+2}Q_i\Big\|^2, \tag{4.9}$$

$$\Big\|\frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y}+\frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x}\Big\|^2 \geqslant \Big\|\sum_{i=0}^{m-1}u_{n+1i}^{nm}(2n+1)P_nQ_i\Big\|^2+\Big\|\sum_{i=0}^{m-1}u_{n+2i}^{nm}(2n+3)P_{n+1}Q_i\Big\|^2.$$

Из (4.8), (4.9) следует

$$\Big\|u_2^{nm}-\sum_{k=0}^{1}u_{k0}^{nm}P_k\Big\|^2 \leqslant CE_{nm}. \tag{4.10}$$

Аналогично получается оценка

$$\Big\|v_2^{nm}-\sum_{i=0}^{1}v_{0i}^{nm}Q_i\Big\|^2 \leqslant CE_{nm}. \tag{4.11}$$

Неравенства (4.8), (4.10), (4.11) оценивают в приближенном решении обусловленные деформацией перемещения через энергию упругого деформирования.

Из доказательства неравенств (4.8) можно видеть, что для любых функций u, $v \in L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y \in L_2(\Omega)$ и обобщенную сумму производных $(\partial u/\partial y+\partial v/\partial x) \in L_2(\Omega)$, справедливы неравенства

$$\Big\|u-\sum_{k=0}^{1}u_{k0}P_k\Big\|^2+\Big\|v-\sum_{i=0}^{1}v_{0i}Q_i\Big\|^2 \leqslant CE(u,v), \tag{4.12}$$

$$(u_{10}+v_{01})^2 \leqslant CE(u,v),$$

где

$$u_{k0} = \frac{1}{4}(1 + 2k)\int_{\Omega} uP_k d\Omega;\ v_{0i} = \frac{1}{4}(1 + 2i)\int_{\Omega} vQ_i d\Omega;$$

$$E(u, v) = G_1(u, v) + G_2(u, v).$$

Под обобщенной суммой производных $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x$ функций u, v понимается такая функция $\psi \in L_2(\Omega)$, для которой имеет место равенство

$$\int_{\Omega}\left(\psi\varphi + u\frac{\partial\varphi}{\partial y} + v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)d\Omega = 0,$$

где φ — любая равная нулю на сторонах квадрата функция из $W_2^1(\Omega)$ [4].

5. Оценка «жесткого» перемещения. Пусть τ_*, u_*, v_* — удовлетворяющие условиям

$$(5.1)\qquad (p_* u_*)_{x=\pm 1} = (q_* v_*)_{y=\pm 1} = (\tau_* v_*)_{x=\pm 1} = (\tau_* u_*)_{y=\pm 1} = 0$$

функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$; p_*, q_* — функции из $L_2(\Omega)$, имеющие обобщенные производные $\partial p_*/\partial x$, $\partial q_*/\partial y \in L_2(\Omega)$ и удовлетворяющие условиям (5.1). Предполагается, что в каждом из равенств (5.1) один из сомножителей (тот же, что и в (1.1)) равен нулю по всей стороне квадрата.

Из (2.2), (5.1) следует

$$(5.2)\qquad \int_{\Omega}\left(\frac{\partial p_*}{\partial x}u_1^{nm} + p_*\frac{\partial u_1^{nm}}{\partial x}\right)d\Omega = 0,\quad \int_{\Omega}\left(\frac{\partial q_*}{\partial y}v_1^{nm} + q_*\frac{\partial v_1^{nm}}{\partial y}\right)d\Omega = 0,$$

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial \tau_*}{\partial y}u_2^{nm} + \frac{\partial \tau_*}{\partial x}v_2^{nm} + \tau_*\left(\frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y} + \frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x}\right)\right]d\Omega = 0.$$

Выделяя в (5.2) слагаемые, соответствующие перемещению квадрата как абсолютно твердого тела, можно (5.2) записать в виде

$$(5.3)\qquad u_{00}^{nm}\int_{-1}^{1}(p_*)_{x=-1}^{x=1}dy + u_{10}^{nm}\int_{-1}^{1}(p_*)_{x=-1}^{x=1}y\,dy = F_1,$$

$$v_{00}^{nm}\int_{-1}^{1}(q_*)_{y=-1}^{y=1}dx + v_{01}^{nm}\int_{-1}^{1}(q_*)_{y=-1}^{y=1}x\,dx = F_2,$$

$$u_{00}^{nm}\int_{-1}^{1}(\tau_*)_{y=-1}^{y=1}dx + u_{10}^{nm}\int_{-1}^{1}(\tau_* y)_{y=-1}^{y=1}dx + v_{00}^{nm}\int_{-1}^{1}(\tau_*)_{x=-1}^{x=1}dy +$$

$$+ v_{01}^{nm}\int_{-1}^{1}(\tau_* x)_{x=-1}^{x=1}dy = F_3.$$

В (5.3) $F_i (i = 1, 2, 3)$ зависят от p_*, q_*, τ_*, производных этих функций и перемещений, обусловленных деформацией. Поэтому F_i оцениваются через энергию упругого деформирования, нормы функций p_*, q_*, τ_* и нормы производных этих функций.

Подбирая соответствующим образом функции p_*, q_*, τ_* и используя второе из неравенств (4.8) и те из равенств (2.4), которыми пополняется система (2.2), (2.3), можно доказать, что имеет место неравенство

$$(5.4)\qquad \max\{|u_{00}^{nm}|, |u_{10}^{nm}|, |v_{00}^{nm}|, |v_{01}^{nm}|\} \leqslant CE_{nm}^{1/2}.$$

Аналогично используя неравенства (4.12), находим, что справедливо неравенство

$$\max\{|u_{00}|,\ |u_{10}|,\ |v_{00}|,\ |v_{01}|\} \leqslant CE(u,\ v) \tag{5.5}$$

для любых функций $u,\ v \in L_2(\Omega)$, которые имеют обобщенные производные $\partial u/\partial x,\ \partial v/\partial y \in L_2(\Omega)$, обобщенную сумму производных $(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяют уравнениям

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial p_*}{\partial x} u + p_* \frac{\partial u}{\partial x}\right) d\Omega = 0,\quad \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial q_*}{\partial y} v + q_* \frac{\partial v}{\partial y}\right) d\Omega = 0, \tag{5.6}$$

$$\int\limits_\Omega \left[u \frac{\partial \tau_*}{\partial y} + v \frac{\partial \tau_*}{\partial x} + \tau_* \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] d\Omega = 0$$

и дополнительным к условиям (1.1) равенствам в (1.3). В (5.5) u_{ko}, v_{ko} $(k = 0{,}1)$ имеют тот же смысл, что и в (4.12).

6. Существование приближенного решения. Из (3.1), (4.8), (4.10), (4.11), (5.4), (2.3) находим, что нулевое решение однородной системы уравнений приближенного решения единственно и, следовательно, определитель этой системы отличен от нуля.

7. Обобщенное решение. Из (3.1), (4.8), (4.10), (4.11), (5.4), (2.3) следует, что равномерно по n, m ограничены нормы в $L_2(\Omega)$ функций (2.1), производных

$$\frac{\partial u_1^{nm}}{\partial x},\quad \frac{\partial v_1^{nm}}{\partial y} \tag{7.1}$$

и сумм производных

$$\frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y} + \frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x},\quad \frac{\partial p^{nm}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2^{nm}}{\partial y},\quad \frac{\partial \tau_1^{nm}}{\partial x} + \frac{\partial q^{nm}}{\partial y}. \tag{7.2}$$

Поэтому из любой последовательности решений (2.1) можно извлечь последовательность решений с номерами r, s, удовлетворяющую условиям:

1) последовательность сходится при $r,\ s \to \infty$ слабо в $L_2(\Omega)$ [4]

$$u_0^{rs},\ u_1^{rs},\ u_2^{rs} \to u;\quad \tau_1^{rs},\ \tau_2^{rs} \to \tau;$$
$$v_0^{rs},\ v_1^{rs},\ v_2^{rs} \to v;\quad p^{rs} \to p;\quad q^{rs} \to q;$$

2) последовательность производных (7.1) сходится слабо в $L_2(\Omega)$ к обобщенным производным [4]

$$\frac{\partial u_1^{rs}}{\partial x} \to \frac{\partial u}{\partial x};\quad \frac{\partial v_1^{rs}}{\partial y} \to \frac{\partial v}{\partial y};$$

3) последовательность сумм производных (7.2) сходится к обобщенным суммам производных

$$\frac{\partial u_2^{rs}}{\partial y} + \frac{\partial v_2^{rs}}{\partial x} \to \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial p^{rs}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2^{rs}}{\partial y} \to \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y};$$
$$\frac{\partial \tau_1^{rs}}{\partial x} + \frac{\partial q^{rs}}{\partial y} \to \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Из (2.3) переходом к пределу при $r,\ s \to \infty$ находим

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + f_1\right) \omega_1 d\Omega = 0,\quad \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + f_2\right) \omega_2 d\Omega = 0, \tag{7.3}$$

$$\int_\Omega \left(p - \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \beta \frac{\partial v}{\partial y} + f_3\right) \omega_3 d\Omega = 0,$$

$$\int_\Omega \left(q - \alpha \frac{\partial v}{\partial y} - \beta \frac{\partial u}{\partial x} + f_4\right) \omega_4 d\Omega = 0,$$

$$\int_\Omega \left[\tau - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + f_5\right] \omega_5 d\Omega = 0,$$

где ω_k ($k = 1, \ldots, 5$) — произвольные функции из $L_2(\Omega)$.

Из (2.2), (2.3), (5.1) следует

$$\int_\Omega \left(p^{rs} \frac{\partial u_*}{\partial x} + \tau_2^{rs} \frac{\partial u_*}{\partial y} - f_1^{r,s-1} u_*\right) d\Omega = 0, \tag{7.4}$$

$$\int_\Omega \left(\tau_1^{rs} \frac{\partial v_*}{\partial x} + q^{rs} \frac{\partial v_*}{\partial y} - f_2^{r-1,s} v_*\right) d\Omega = 0,$$

$$f_\sigma^{r,s} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{r} \sum_{i=0}^{s} (1 + 2k)(1 + 2i) \left(\int_\Omega f_\sigma P_k Q_i d\Omega\right) P_k Q_i.$$

Переходя в (5.2), (7.4) к пределу при $r, s \to \infty$, находим, что функции p, q, τ, u, v удовлетворяют уравнениям (5.6) и уравнениям

$$\int_\Omega \left(p \frac{\partial u_*}{\partial x} + \tau \frac{\partial u_*}{\partial y} - f_1 u_*\right) d\Omega = 0, \tag{7.5}$$

$$\int_\Omega \left(\tau \frac{\partial v_*}{\partial x} + q \frac{\partial v_*}{\partial y} - f_2 v_*\right) d\Omega = 0.$$

Очевидно,

$$\lim_{r,s\to\infty} \left[G_1(u - u_1^{rs}, v - v_1^{rs}) + G_2(u - u_2^{rs}, v - v_2^{rs})\right] = \tag{7.6}$$

$$= \lim_{r,s\to\infty} E_{rs} - E(u, v) \geqslant 0.$$

Из (3.1), (7.6) следует

$$\Phi(u, v) \geqslant E(u, v), \tag{7.7}$$

где

$$\Phi(\varphi, \psi) = \int_\Omega \left[f_1\varphi + f_2\psi + f_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f_4 \frac{\partial \psi}{\partial y} + f_5\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right] d\Omega.$$

Функции p, q, τ, u, v, удовлетворяющие уравнениям (5.6), (7.3), (7.5) и неравенству (7.7),— обобщенное решение плоской смешанной задачи теории упругости.

Полагая в (7.3)

$$\omega_3 = \frac{\partial u_*}{\partial x}, \quad \omega_4 = \frac{\partial v_*}{\partial y}, \quad \omega_5 = \frac{\partial u_*}{\partial y} + \frac{\partial v_*}{\partial x}$$

и используя (7.5), находим

$$2\Phi(u_*, v_*) = E(u_*, v_*) - E(u - u_*, v - v_*) + E(u, v). \tag{7.8}$$

Допустим, что среди функций $p_*, q_*, \tau_*, u_*, v_*$ имеются такие, которые удовлетворяют уравнениям (7.3) и дополнительным к условиям (1.1) равенствам в (1.3). Подставляя эти функции в (7.3), полагая

$$\omega_1 = u,\ \omega_2 = v,\ \omega_3 = \partial u/\partial x,\ \omega_4 = \partial v/\partial y,\ \omega_5 = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x$$

и используя (5.6), (7.7), находим

$$2\Phi(u, v) = E(u, v) - E(u - u_*, v - v_*) + E(u_*, v_*) \geqslant 2E(u, v). \tag{7.9}$$

Из (7.8), (7.9) следует

$$E(u - u_*, v - v_*) = 0. \tag{7.10}$$

Согласно (4.12), (5.5), уравнение (7.10) имеет только нулевое решение.

Таким образом, если плоская смешанная задача теории упругости имеет достаточно гладкое решение, то оно совпадает (в смысле $L_2(\Omega)$) с обобщенным решением и единственно. Из единственности решения следует, что к нему сходится слабо в $L_2(\Omega)$ вся последовательность решений (2.1) при $m,\ n \to \infty$.

8. Сведение задачи к последовательности краевых задач для обыкновенных уравнений. Обозначим

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k^n P_k,\quad q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k^n P_k,\quad \tau_n' = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k^n P_k,$$
$$\tau_n'' = \sum_{k=0}^{n+1} \tau_k^{\ddot{n}} P_k,\quad u_n' = \sum_{k=0}^{n} u_k^{\ddot{n}} P_k,\quad u_n'' = \sum_{k=0}^{n+2} u_k^n P_k,$$
$$v_n' = \sum_{k=0}^{n+1} v_k^{\ddot{n}} P_k,\quad v_n'' = \sum_{k=0}^{n-1} v_k^n P_k, \tag{8.1}$$

где $p_k^n, q_k^n, \tau_k^n, u_k^n, v_k^n$ — функции x; $P_k = P_k(y)$ — полиномы Лежандра; k — степень полинома.

Приближенное решение плоской смешанной задачи теории упругости ищем в виде функций (8.1), удовлетворяющих граничным условиям

$$(q_n v_n')_{y=\pm 1} = (\tau_n'' u_n'')_{y=\pm 1} = 0; \tag{8.2}$$

$$(p_n^n u_n^n)_{x=\pm 1} = (p_k^n u_k^n)_{x=\pm 1} = (\tau_k^n v_k^n)_{x=\pm 1} = 0,\quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{8.3}$$

и уравнениям

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{\partial \tau_n''}{\partial y} + f_1^n\right) P_k dy = 0,\quad \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial \tau_n'}{\partial x} + \frac{\partial q_n}{\partial y} + f_2^{n-1}\right) P_k dy = 0, \tag{8.4}$$
$$\int_{-1}^{1} \left(p_n - \alpha \frac{\partial u_n'}{\partial x} - \beta \frac{\partial v_n'}{\partial y} + f_3^n\right) P_k dy = 0,$$
$$\int_{-1}^{1} \left(q_n - \alpha \frac{\partial v_n'}{\partial y} - \beta \frac{\partial u_n'}{\partial x} + f_4^n\right) P_k dy = 0,$$
$$\int_{-1}^{1} \left[\tau_n'' - \mu \left(\frac{\partial u_n''}{\partial y} + \frac{\partial v_n''}{\partial x}\right) + f_5^{n+1}\right] P_k dy = 0,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\tau_n' - \mu\left(\frac{\partial u_n''}{\partial y} + \frac{\partial v_n''}{\partial x}\right) + f_5\right] P_i dy = 0,$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где f_σ^r — отрезок ряда

$$f_\sigma^r = \sum_{k=0}^{n} f_{\sigma k} P_k, \quad f_{\sigma k} = \frac{1}{2}(1+2k)\int_{-1}^{1} f_\sigma P_k dy.$$

Предполагается, что в каждом из равенств (8.2) один из сомножителей (тот же, что и в (1.1)) равен нулю на всей стороне квадрата.

Если формулировка задачи содержит какие-либо из уравнений (1.3), то система (8.2), (8.4) дополняется соответствующими равенствами

$$\int_{-1}^{1} u_0^n dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} v_0^n dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} (u_1^n - 3v_0^n x)\, dx = 0. \tag{8.5}$$

Из равномерной по m, n ограниченности норм функций τ_1^{nm}, τ_2^{nm}, q^{nm}, u_2^{nm} и производных (7.1), (7.2) следует, что при фиксированном n будут равномерно по m ограничены нормы производных

$$\frac{\partial \tau_2^{nm}}{\partial y}, \; \frac{\partial p^{nm}}{\partial x}, \; \frac{\partial q^{nm}}{\partial y}, \; \frac{\partial \tau_1^{nm}}{\partial x}, \; \frac{\partial u_2^{nm}}{\partial y}, \; \frac{\partial v_2^{nm}}{\partial x}.$$

Поэтому из решений (2.1) можно образовать сходящие слабо в $L_2(\Omega)$ при фиксированном n и $s \to \infty$ подпоследовательности

$$u_1^{ns}, u_0^{ns} \to u_n'; \; u_2^{ns} \to u_n''; \; p^{ns} \to p_n; \; v_0^{ns}, v_2^{ns} \to v_n''; \; v_1^{ns} \to v_n'; \tag{8.6}$$

$$q^{ns} \to q_n; \; \tau_1^{ns} \to \tau_n'; \; \tau_2^{ns} \to \tau_n''; \; \frac{\partial p^{ns}}{\partial x} \to \frac{\partial p_n}{\partial x}; \; \frac{\partial q^{ns}}{\partial y} \to \frac{\partial q_n}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \tau_2^{ns}}{\partial y} \to \frac{\partial \tau_n''}{\partial y}; \; \frac{\partial \tau_1^{ns}}{\partial x} \to \frac{\partial \tau_n'}{\partial x}; \; \frac{\partial u_2^{ns}}{\partial y} \to \frac{\partial u_n''}{\partial y}; \; \frac{\partial v_2^{ns}}{\partial x} \to \frac{\partial v_n''}{\partial x}.$$

При этом предельные функции будут удовлетворять уравнениям

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{\partial \tau_n''}{\partial y} - f_1^n\right) P_k \varphi_1 d\Omega = 0, \tag{8.7}$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \tau_n'}{\partial x} + \frac{\partial q_n}{\partial y} - f_2^{n-1}\right) P_k \varphi_2 d\Omega = 0,$$

$$\int_\Omega \left(p_n - \alpha\frac{\partial u_n'}{\partial x} - \beta\frac{\partial v_n'}{\partial y} + f_3^n\right) P_k \varphi_3 d\Omega = 0,$$

$$\int_\Omega \left(q_n - \alpha\frac{\partial v_n'}{\partial y} - \beta\frac{\partial u_n'}{\partial x} + f_4^n\right) P_k \varphi_4 d\Omega = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega}\left[\tau_n'' - \mu\left(\frac{\partial u_n''}{\partial y} + \frac{\partial v_n''}{\partial x}\right) + f_5^{n+1}\right] P_k \varphi_5 d\Omega = 0,$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

$$\int\limits_{\Omega}\left[\tau_n' - \mu\left(\frac{\partial u_n''}{\partial y} + \frac{\partial v_n''}{\partial x}\right) + f_5\right] P_i \varphi_6 d\Omega = 0,$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $\varphi_r = \varphi_r(x)(r = 1, 2, \ldots, 6)$ — произвольные функции из $L_2[-1, 1]$.

Обозначим через S_* множество непрерывных, непрерывно дифференцируемых функций $p_*, q_*, \tau_*', \tau_*'', u_*', u_*'', v_*', v_*''$, удовлетворяющих условиям

$$(p_* u_*')_{x=\pm 1} = (q_* v_*')_{y=\pm 1} = (\tau_*' v_*'')_{x=\pm 1} = (\tau_*'' u_*'')_{y=\pm 1} = 0. \tag{8.8}$$

Предполагается, что в каждом из равенств (8.8) один из сомножителей (тот же, что и в (1.1)) равен нулю по всей стороне квадрата.

Обозначим через S_{**} множество функций

$$p_{**},\ q_{**},\ \tau_{**}',\ \tau_{**}'',\ u_{**}',\ u_{**}'',\ v_{**}',\ v_{**}'', \tag{8.9}$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial p_{**}}{\partial x} u_*' + p_{**}\frac{\partial u_*'}{\partial x}\right) d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial q_{**}}{\partial y} v_*' + q_{**}\frac{\partial v_*'}{\partial y}\right) d\Omega = 0, \tag{8.10}$$

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial \tau_{**}'}{\partial x} v_*'' + \tau_{**}'\frac{\partial v_*''}{\partial x}\right) d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial \tau_{**}''}{\partial y} u_*'' + \tau_{**}''\frac{\partial u_*''}{\partial y}\right) d\Omega = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial p_*}{\partial x} u_{**}' + p_*\frac{\partial u_{**}'}{\partial x}\right) d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial q_*}{\partial y} v_{**}' + q_*\frac{\partial v_{**}'}{\partial y}\right) d\Omega = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial \tau_*'}{\partial x} v_{**}'' + \tau_*'\frac{\partial v_{**}''}{\partial x}\right) d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial \tau_*''}{\partial y} u_{**}'' + \tau_*''\frac{\partial u_{**}''}{\partial y}\right) d\Omega = 0,$$

где $p_*,\ q_*,\ \tau_*',\ \tau_*'', u_*', u_*'', v_*', v_*''$ — любые функции из S_*. Предполагается, что функции (8.9) имеют те квадратично суммируемые обобщенные производные, которые входят в (8.10).

Приближенное решение (2.1) принадлежит S_*. Подставляя функции (2.1) в (8.10) и переходя к пределу при $s \to \infty$, получим, что предельные функции подпоследовательностей (8.6) удовлетворяют уравнениям

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial p_{**}}{\partial x} u_n' + p_{**}\frac{\partial u_n'}{\partial x}\right) d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial q_{**}}{\partial y} v_n' + q_{**}\frac{\partial v_n'}{\partial y}\right) d\Omega = 0, \tag{8.11}$$

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial \tau_{**}'}{\partial x} v_n'' + \tau_{**}'\frac{\partial v_n''}{\partial x}\right) d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial \tau_{**}''}{\partial y} u_n'' + \tau_{**}''\frac{\partial u_n''}{\partial y}\right) d\Omega = 0,$$