УДК 532.5.032

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ТРЕХСЛОЙНОМ СТОКСОВОМ ТЕЧЕНИИ С НЕОДНОРОДНОЙ ТОЛЩИНОЙ СЛОЕВ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ СКЛАДОК

В. В. Пак

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН,
690041 Владивосток, Россия
E-mail: pakvv@poi.dvo.ru

Исследуется неустойчивость при нулевых числах Рейнольдса в трехслойном стоксовом течении вязкой жидкости с неоднородной толщиной слоев в двумерной области со свободной границей. С использованием метода многих масштабов построено асимптотическое разложение решения краевой задачи для уравнений Стокса. Результаты анализа устойчивости системы уравнений первого приближения с использованием метода Фурье показывают, что наиболее существенный рост неустойчивости при нулевых числах Рейнольдса имеет место в области волн, длины которых соизмеримы с толщиной среднего слоя. В отличие от случая постоянной толщины слоев параметры неустойчивости являются переменными величинами. Исследуется механизм образования геологических складок.

Ключевые слова: стоксово течение, многослойное течение, неустойчивость при нулевых числах Рейнольдса, тектонофизика, складкообразование.

DOI: 10.15372/PMTF20190606

Введение. В настоящее время существует большое количество теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию неустойчивости в многослойных течениях вязкой жидкости по наклонной плоскости [1–7].

Многослойные течения, в отличие от однослойных, могут быть неустойчивыми и в случае, когда инерционные члены в уравнениях движения жидкости пренебрежимо малы, т. е. число Рейнольдса близко к нулю. В настоящей работе такую неустойчивость будем называть неустойчивостью при нулевых числах Рейнольдса (в англоязычной литературе используются термины “zero-Reynolds-number instability” и “inertialess instability”). Механизм ее возникновения не изучен полностью, однако результаты большинства исследований свидетельствуют о том, что одними из основных причин потери устойчивости течения являются деформируемость свободной поверхности и ее взаимодействие с остальными границами слоев [3–6].

В двухслойном течении для возникновения неустойчивости не только в длинноволновой области, но и в диапазоне длин волн порядка общей толщины слоев вязкость верхнего

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований Тихоокеанского океанологического института ДВО РАН “Математическое моделирование и анализ динамических процессов в океане” № 0271-2019-0001.

слоя должна быть больше вязкости нижнего слоя [3, 4]. Однако в трехслойном течении необходимо лишь различие вязкостей слоев. Как показывают результаты исследований [5, 6], в случае, когда относительно тонкий средний слой расположен в центре многослойной структуры и заключен между слоями с одинаковой вязкостью, рост неустойчивости на порядок больше, чем в двухслойном течении. В работах [2–6] представлены результаты экспериментального и теоретического исследований зависимости параметров неустойчивости от отношения толщин, вязкости и плотности слоев, угла наклона для различных моделей (например, при наличии поверхностно-активных веществ [7]).

Помимо теоретического интереса результаты исследования имеют важное прикладное значение, поскольку неустойчивость возникает в многослойных течениях различного масштаба, наблюдаемых во многих областях. В работе [3] сделана попытка применить эти результаты в геофизике для объяснения причины образования поперечных хребтов на леднике. Однако в настоящее время большинство исследований ориентированы на технические приложения (производство многослойных лакокрасочных покрытий, фотопленок и т. д.), в которых возникновение неустойчивости значительно ухудшает качество продукции.

Во всех работах невозмущенные границы задавались плоскими, поэтому слои имеют одинаковую толщину. Это предположение приемлемо для большинства технических приложений. Однако в геофизике толщина слоев может значительно меняться. Как показано в [3] при моделировании поперечных хребтов на ледниках, изменение толщины может вызывать возмущения в течениях, поэтому ее необходимо учитывать. Исследование течений с неоднородной толщиной слоев связано со значительными трудностями и требует применения асимптотических методов [8].

В настоящей работе с использованием метода многих масштабов [9] проведено асимптотическое исследование неустойчивости в трехслойном течении с неоднородной толщиной слоев. Полученные результаты применены для исследования механизма образования складок.

1. Система уравнений и краевые условия. Рассмотрим вязкую жидкость, состоящую из трех слоев (обозначенных индексами $i = \overline{1,3}$), которые ограничены поверхностями раздела $z = z_i$, $i = \overline{1,4}$. Верхняя граница области z_1 является подвижной и непроницаемой (т. е. отсутствует поток жидкости через границу), а нижняя граница z_4 представляет собой горизонтальную твердую неподвижную стенку. Течение в слоях создается переменной внешней нагрузкой на верхней границе $-Q(x)$. Используются декартовы координаты (x, z), где ось x совпадает с положением нижней границы z_4. Границы z_i, $i = \overline{1,3}$ являются функциями x, t.

Пусть ρ_i, μ_i ($i = \overline{1,3}$) — плотности и вязкости слоев (постоянные внутри слоев); u_1, u_2 — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости; p — давление; g — ускорение свободного падения; t — время. Обозначим через L, ρ_0, μ_0 масштабы длины, плотности и вязкости. Приведем все переменные к безразмерному виду: $x = L\bar{x}$, $z = L\bar{z}$, $\mu_i = \mu_0\bar{\mu}_i$, $\rho_i = \rho_0\bar{\rho}_i$, $u_j = (\rho_0 g L^2/\mu_0)\bar{u}_j$, $p = \rho_0 g L\bar{p}$, $Q = \rho_0 g L\bar{Q}$, $t = (R/u_0)\bar{t}$. Далее черта над безразмерными переменными опускается.

Для того чтобы уравнения движения жидкости привести к общепринятой форме, используемой в [3–6] для описания течения по наклонной плоскости, представим давление следующим образом: $p = p_Q + Q$. Получаем систему уравнений

$$-p_{Q,x} + \mu_i(u_{1,xx} + u_{1,zz}) - q = 0, \qquad -p_{Q,z} + \mu_i(u_{2,xx} + u_{2,zz}) - \rho_i g = 0,$$
$$u_{1,x} + u_{2,z} = 0, \qquad q = Q_{,x}. \tag{1}$$

На верхней границе z_1 задается условие свободной поверхности

$$
\begin{aligned}
&[(-p_Q + 2\mu_i u_{1,x})n_1^1 + \mu_i(u_{1,z} + u_{2,x})n_1^2]\big|_{z=z_1} = 0,\\
&[\mu_i(u_{2,x} + u_{1,z})n_1^1 + (-p_Q + 2\mu_i u_{2,z})n_1^2]\big|_{z=z_1} = 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где n_i^j — направляющие косинусы нормали к границе z_i.

На границах раздела z_i, $i = \overline{2,3}$ ставятся условия непрерывности скоростей и напряжений

$$
\begin{gathered}
u_j\big|_{z_i-0}^{z_i+0} = 0, \quad j = \overline{1,2},\\
[(-p_Q + 2\mu_i u_{1,x})n_i^1 + \mu_i(u_{1,z} + u_{2,x})n_i^2]\big|_{z_i-0}^{z_i+0} = 0,\\
[\mu_i(u_{2,x} + u_{1,z})n_i^1 + (-p_Q + 2\mu_i u_{2,z})n_i^2]\big|_{z_i-0}^{z_i+0} = 0,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где $F\big|_{z_i-0}^{z_i+0} = F\big|_{z=z_i+0} - F\big|_{z=z_i-0}$.

На нижней границе $z = z_4$ задаются условия прилипания

$$
u_j\big|_{z=z_4} = 0, \quad j = \overline{1,2}.
\tag{4}
$$

Задаются начальные положения границ $z_i(x,0) = y_i(x)$, $i = \overline{1,3}$.

Кроме того, задается кинематическое условие отсутствия потока жидкости через подвижные границы z_i:

$$
u_2\big|_{z=z_i} - z_{i,x}u_1\big|_{z=z_i} - z_{i,t} = 0, \quad i = \overline{1,3}.
\tag{5}
$$

2. Асимптотическое исследование с помощью метода многих масштабов. Для исследования уравнений (1)–(5) используем обобщенный метод многих масштабов [9].

Предположим, что характерная толщина слоев много меньше их характерного горизонтального размера, и в качестве малого параметра ε выберем их отношение. Введем следующие масштабы: $\xi = \varepsilon x$, $\eta = \theta(\xi)/\varepsilon$, $\tau = \varepsilon t$. Масштаб θ определим таким образом, чтобы выполнялось условие $\theta(0) = 0$. Пусть функции p_Q, u_j, z_i явным образом зависят от ξ, η, τ и ε, а q не зависит от η. Тогда уравнения движения и граничные условия (1)–(5) преобразуются к виду

$$
\begin{gathered}
\varepsilon p_{Q,\xi} - p_{Q,\eta}\theta_\xi + \mu_i(\varepsilon^2 u_{1,\xi\xi} + \varepsilon(2u_{1,\xi\eta}\theta_\xi + u_{1,\eta}\theta_{\xi\xi}) + u_{1,\eta\eta}\theta_\xi^2 + u_{1,zz}) - q = 0,\\
-p_{Q,z} + \varepsilon\mu_i(\varepsilon^2 u_{2,\xi\xi} + \varepsilon(2u_{2,\xi\eta}\theta_\xi + u_{2,\eta}\theta_{\xi\xi}) + u_{2,\eta\eta}\theta_\xi^2 + u_{2,zz}) - \rho_i g = 0,\\
\varepsilon u_{1,\xi} + u_{1,\eta}\theta_\xi + u_{2,z} = 0;
\end{gathered}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
&[(-p_Q + 2\mu_i(\varepsilon u_{1,\xi} + u_{1,\eta}\theta_\xi))n_1^1 + \mu_i(u_{1,z} + \varepsilon u_{2,\xi} + u_{2,\eta}\theta_\xi)n_1^2]\big|_{z=z_1} = 0,\\
&[\mu_i(u_{1,z} + \varepsilon u_{2,\xi} + u_{2,\eta}\theta_\xi)n_1^1 + (-p_Q + 2\mu_i(\varepsilon u_{2,\xi} + u_{2,\eta}\theta_\xi))n_2^2]\big|_{z=z_1} = 0;
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{gathered}
u_j\big|_{z_i-0}^{z_i+0} = 0, \quad j = \overline{1,2};\\
[(-p_Q + 2\mu_i(\varepsilon u_{1,\xi} + u_{1,\eta}\theta_\xi))n_1^i + \mu_i(u_{1,z} + \varepsilon u_{2,\xi} + u_{2,\eta}\theta_\xi)n_i^2]_{z_i-0}^{z_i+0} = 0,\\
[\mu_i(u_{1,z} + \varepsilon u_{2,\xi} + u_{2,\eta}\theta_\xi)n_i^1 + (-p_Q + 2\mu_i(\varepsilon u_{1,\xi} + u_{2,\eta}\theta_\xi))n_i^2]_{z_i-0}^{z_i+0} = 0;
\end{gathered}
\tag{8}
$$

$$u_j\big|_{z=z_4} = 0, \quad j = 1, 2, \qquad z_i(\xi, \eta, 0, 0) = y_i(\xi, \eta), \quad i = \overline{1, 3}; \tag{9}$$

$$u_2\big|_{z=z_i} - (\varepsilon z_{i,\xi} + z_{i,\eta}\theta_\xi) u_1\big|_{z=z_i} - \varepsilon z_{i,\tau} - z_{i,t} = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \tag{10}$$

Предположим также, что существуют асимптотические представления давления, скоростей и подвижных границ расчетной области:

$$\begin{gathered} p_Q = p_0 + \varepsilon p_1 + \ldots, \qquad u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \ldots, \qquad u_2 = \varepsilon u_{21} + \ldots, \\ z_i = z_{i0} + \varepsilon z_{i1} + \ldots, \qquad y_i = y_{i0} + \varepsilon y_{i1} + \ldots, \qquad i = \overline{1, 3}, \end{gathered} \tag{11}$$

удовлетворяющие равномерно по ξ и η во всей области определения следующим условиям регулярности разложений [9]:

$$\frac{p_m}{p_{m-1}} < \infty, \qquad \frac{u_{jm}}{u_{jm-1}} < \infty, \qquad \frac{z_{im}}{z_{im-1}} < \infty, \qquad \frac{y_{im}}{y_{im-1}} < \infty. \tag{12}$$

Коэффициенты разложения, входящие в (11), представим в виде сумм

$$p_m = p'_m + p''_m, \qquad u_{jm} = u'_{jm} + u''_{jm}, \qquad z_{im} = z'_{im} + z''_{im}, \qquad y_{im} = y'_{im} + y''_{im},$$

где p''_m, u''_{jm}, z''_{im}, y''_{im} не зависят от η и соответствуют невозмущенному течению, p'_m, u'_{jm}, z'_{im} и y'_{im} соответствуют возмущениям течения.

Подставляя (11) в (6)–(10), получаем последовательность уравнений для определения коэффициентов разложения по ε.

Решая систему нулевого приближения, находим

$$u'_{10} = 0, \qquad p'_0 = 0, \qquad z'_{i0} = 0, \qquad z''_{i0,t} = 0, \tag{13}$$

откуда следует $y'_{i0} = 0$.

Таким образом, имеем

$$\begin{gathered} u''_{10} = \begin{cases} q\Big(\dfrac{(z - z''_{20})^2}{2\mu_1} - \dfrac{(z - z''_{20})h_1}{\mu_1} - \dfrac{h_2 h_1}{\mu_2} - \dfrac{h_2^2}{2\mu_2} - H_3\Big), & z''_{20} \leqslant z \leqslant z''_{10}, \\ q\Big(\dfrac{(z - z''_{30})^2}{2\mu_2} - (z - z''_{20})\,\dfrac{h_1 + h_2}{\mu_2} - H_3\Big), & z''_{30} \leqslant z \leqslant z''_{20}, \\ q\Big(\dfrac{(z - z''_{40})^2}{2\mu_3} - (z - z''_{40})\,\dfrac{h_1 + h_2 + h_3}{\mu_3}\Big), & z''_{40} \leqslant z \leqslant z''_{30}, \end{cases} \\ p''_0 = \sum_{l=1}^{i-1} \rho_l g h_i + \rho_1 g (z''_{i0} - z). \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь $h_i = z''_{i0} - z''_{i+1\,0}$; $H_3 = h_3(h_1 + h_2 + h_3/2)/\mu_3$.

Используя условие несжимаемости из (6), преобразуем уравнения (10) и подставим в них выражения для u''_{10} из (14). С учетом (13) получаем систему уравнений для описания медленной эволюции z''_{i0}:

$$\begin{gathered} z''_{i0,\tau} = \Big(q \sum_{l=i}^{3} h_l \sum_{m=1}^{3} h_m \sum_{k=j}^{3} \frac{1}{\mu_k}\,\frac{h_k}{1 + \delta_{mk} + \delta_{lm}}\Big)_{,\xi}, \qquad i = \overline{1, 3}, \\ z''_{i0}\big|_{\tau=0} = y''_{i0} \end{gathered} \tag{15}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера).

Таким образом, имеем $u_{10} = u''_{10}(\xi, \tau)$, $z_{i0} = z''_{i0}(\xi, \tau)$, $y_{i0} = y''_{i0}(\xi)$.

Система уравнений первого приближения для p_1', u_{j1}', z_{i1}' имеет вид

$$-p'_{1,\eta}+\mu_i(u'_{11,\eta\eta}\theta^2_{,\xi}+u'_{11,zz})=0,\qquad -p'_{1,z}+\mu_i(u'_{21,\eta\eta}\theta^2_{,\xi}+u'_{21,zz})=0,$$
$$u'_{11,\eta}\theta_{,\xi}+u'_{21,z}=0. \tag{16}$$

На свободной поверхности и границах раздела слоев ($z_i, i=\overline{1,3}$) граничные условия разлагаются в асимптотический ряд в окрестности z''_{i0} и линеаризуются по ε. Получаем систему уравнений

$$[\mu_1(u''_{10,zz}z'_{11}+u'_{11,z}+u'_{21,\eta}\theta_{,\xi})]\big|_{z=z''_{10}}=0,$$
$$[2\mu_1u'_{21,z}+\rho_1z'_{11}-p'_1]\big|_{z=z''_{10}}=0; \tag{17}$$

$$[u'_{11}+u''_{10,z}z'_{i1}]\big|^{z''_{i0}+0}_{z''_{i0}-0}=0,\qquad [u'_{21}]\big|^{z''_{i0}+0}_{z''_{i0}-0}=0,$$
$$[\mu_i(u''_{10,zz}z'_{i1}+u'_{11,z}+u'_{21,\eta}\theta_{,\xi})]^{z''_{i0}+0}_{z''_{i0}-0}=0, \tag{18}$$
$$[2\mu_iu'_{21,z}+(\rho_i-\rho_{i-1})z'_{i1}-p'_1]^{z''_{i0}+0}_{z''_{i0}-0}=0,\qquad i=2,3;$$

$$[u'_{j1}]\big|_{z=z''_{40}}=0,\qquad j=1,2; \tag{19}$$

$$u'_{21}\big|_{z=z''_{i0}}-z'_{i1,\eta}\theta_{,\xi}u''_{10}\big|_{z=z''_{i0}}-z'_{i1,t}=0,\qquad i=\overline{1,3}. \tag{20}$$

3. Анализ устойчивости системы уравнений первого приближения. Будем искать решение уравнений (16)–(20) в следующей форме (например, для u'_{11}):

$$u'_{11}=U_{11}(\xi,k,z,\tau,\lambda)\,\mathrm{e}^{\lambda t+ik\eta/\theta_{,\xi}} \tag{21}$$

(k — волновое число; λ — комплексный инкремент).

Подставляя (21) в (16)–(20), получаем

$$-ikP_1+\mu_i(-k^2U_{11}+U_{11,zz})=0,\qquad -P_{1,z}+\mu_i(-k^2U_{21}+U_{21,zz})=0,$$
$$ikU_{11}+U_{21,z}=0; \tag{22}$$

$$[\mu_1(u''_{10,zz}Z_{11}+U_{11,z}+ikU_{21})]\big|_{z=z''_{10}}=0,\qquad [2\mu_1U_{21,z}+\rho_1Z_{11}-P_1]\big|_{z=z''_{10}}=0; \tag{23}$$

$$[U_{11}+u''_{10,z}Z_{i1}]\big|^{z''_{i0}+0}_{z''_{i0}-0}=0,\qquad [U_{21}]\big|^{z''_{i0}+0}_{z''_{i0}-0}=0,$$
$$[\mu_i(u''_{10,zz}Z_{i1}+U_{11,z}+ikU_{21})]\big|^{z''_{i0}+0}_{z''_{i0}-0}=0, \tag{24}$$
$$[2\mu_iU_{21,z}-P_1+(\rho_i-\rho_{i-1})Z_{i1}]^{z''_{i0}+0}_{z''_{i0}-0}=0,\qquad i=2,3;$$

$$U_{j1}\big|_{z=z''_{40}}=0,\quad j=1,2; \tag{25}$$

$$U_{21}\big|_{z=z''_{i0}}-ikZ_{i1}u''_{10}\big|_{z=z''_{i0}}-\lambda Z_{i1}=0,\qquad i=\overline{1,3}. \tag{26}$$

Общее решение для U_{21} в каждом слое можно записать с помощью гиперболических функций

$$U_{21}=C_{i1}\,\mathrm{ch}\,(kz)+C_{i2}\,\mathrm{sh}\,(kz)+C_{i3}kz\,\mathrm{ch}\,(kz)+C_{i4}kz\,\mathrm{sh}\,(kz), \tag{27}$$

где C_{ij} — произвольные функции, зависящие от ξ и τ.

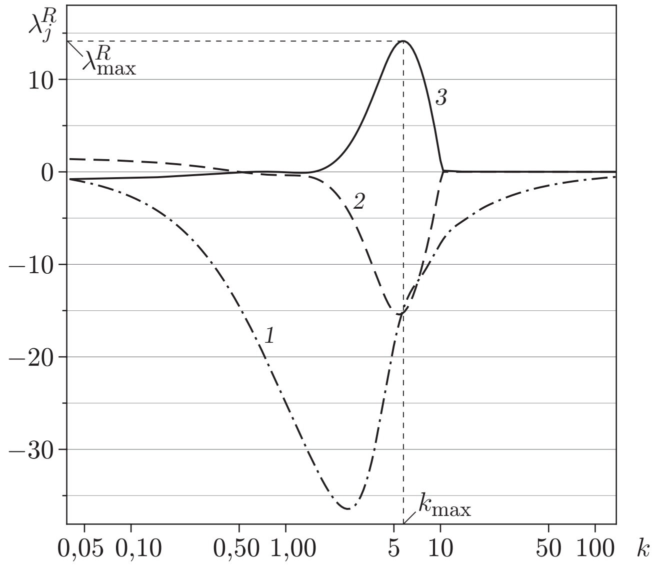

Рис. 1. Зависимость λ_j^R от волнового числа k:
1 — λ_1^R, *2* — λ_2^R, *3* — λ_3^R

Исключая P_2, U_1, Z_i из (22)–(26), подставим (27) в (23)–(26). В результате получаем линейную систему уравнений относительно C_{ij}. Пусть $\lambda_j = \lambda_j^R + i\lambda_j^I$, $j = \overline{1,3}$ — комплексные корни характеристического уравнения матрицы этой системы. Тогда решение уравнений (16)–(20) (например, z'_{i1}) можно записать в виде

$$z'_{i1} = \sum_{j=1}^{3} Z_{i1}\big|_{\lambda=\lambda_j} \mathrm{e}^{\lambda_j^R t + i(\lambda_j^I t + k\eta/\theta_{,\xi})}.$$

В работах [3–6] для исследования устойчивости двух- и трехслойного стоксова течения использовалась система уравнений, которую можно получить из (22)–(26), задавая постоянные толщины слоев и выполняя замену переменных: $\lambda = -i\omega$ (ω — частота). Течение является неустойчивым, если существует хотя бы один корень характеристического уравнения λ_j, действительная часть которого принимает положительные значения. Как показывают результаты исследований [3–6], при нулевых числах Рейнольдса действительная часть одного из корней λ_j отрицательна при любом значении k независимо от числа слоев (без ограничения общности будем полагать, что это λ_1). В двухслойном течении λ_2^R принимает положительные значения при $\mu_2 < \mu_1$ [3, 4]. В трехслойном течении, в котором относительно тонкий слой расположен между двумя слоями с одинаковыми параметрами, два других корня связаны следующим образом: $\lambda_2 \approx -\overline{\lambda_3}$ [5, 6]. В [6] показано, что это соотношение асимптотически приближается к равенству при уменьшении деформируемости верхней границы z_1, например вследствие поверхностного натяжения. Поэтому $\lambda_2^R \approx -\lambda_3^R$, одна из этих величин должна принимать положительные значения, и соответствующее ей решение является неустойчивым при любом значении μ_2, отличном от значения вязкости смежных слоев. Согласно [3–6] наибольшие положительные значения λ_j^R достигаются в области волновых чисел, соответствующих длинам волн порядка общей толщины слоев (будем считать, что это λ_3^R).

На рис. 1 приведена зависимость действительной части характеристического уравнения λ_j^R от волнового числа k. В расчетах использовались следующие значения параметров: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$, $\mu_1 = \mu_3 = 1$, $\mu_2 = 0{,}1$, $h_1 = h_3 = (1 - h_2)/2$, $h_2 = 0{,}2$, $q = 0{,}2$, $\varepsilon = 0{,}2$. На рис. 1 видно, что $\lambda_2^R > 0$ в области $k \ll 1$, $\lambda_3^R > 0$ при $k \sim 1$, причем $\max \lambda_2^R \ll \max \lambda_3^R$.

С использованием данных результатов можно определить доминирующее возмущение:

$$z'_{i1} = Z_{i1}^{\max} \mathrm{e}^{\lambda_{\max}^R t} \cos(\Theta_{\max} + \varphi_{\max}^i + \lambda_{\max}^I t),$$

где $\lambda_{\max} = \lambda_3^R|_{k=k_{\max}}$; $k_{\max}$ — значение k, при котором $\lambda_3^R|_{k=k_{\max}} = \max \lambda_3^R$; $\Theta_{\max} = k_{\max}\eta/\theta_{,\xi}$; $Z_{i1}^{\max} = |Z_{i1}|_{\lambda=\lambda_{\max}}|$; $\varphi_{\max}^i$ — аргумент $Z_{i1}|_{\lambda=\lambda_{\max}}$.

Численные эксперименты позволили получить зависимость

$$k_{\max} = K_{\max}/h_2, \tag{28}$$

где $K_{\max}$ — некоторый коэффициент, изменяющийся в диапазоне 1,17 $\div$ 1,65. Влияние остальных параметров незначительно: при $\mu_2 = 0{,}1 \div 0{,}6$ $k_{\max}$ изменяется приблизительно на 16 %, при варьировании ρ_2 в диапазоне 1,0 $\div$ 1,1 — приблизительно на 0,1 %.

Для нахождения величины θ рассмотрим уравнения следующего приближения:

$$\mu_i(u'_{11,\eta}\theta_{,\xi\xi} + 2u'_{11,\xi\eta}\theta_{,\xi} + u'_{12,zz} + u'_{12,\eta\eta}\theta_{,\xi}^2) + p'_{2,\xi} + p'_{3,\eta}\theta_{,\xi} = 0,$$

$$\mu_i(u'_{21,\eta}\theta_{,\xi\xi} + 2u'_{21,\xi\eta}\theta_{,\xi} + u'_{22,zz} + u'_{22,\eta\eta}\theta_{,\xi}^2) + p'_{3,z} = 0.$$

Частные производные $u'_{11,\xi\eta}$, а также производные $p'_{2,\xi}$, $u'_{21,\xi\eta}$ в этих уравнениях содержат члены с множителем $(k_{\max}/\theta_{,\xi})_{,\xi}\eta$ и должны быть приравнены к нулю, так как в противном случае могут получиться частные решения, нарушающие условия регулярности (12). Интегрируя уравнение $(k_{\max}/\theta_{,\xi})_{,\xi} = 0$ по ξ, получаем

$$\theta = \frac{1}{G}\int\limits_0^\xi k_{\max}\, d\xi_1$$

(G — константа интегрирования [9]). Тогда

$$\Theta_{\max} = \frac{k_{\max}\eta}{\theta_{,\xi}} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\xi k_{\max}\big|_{\xi=\xi_1}\, d\xi_1.$$

Таким образом, в отличие от случая постоянной толщины слоев доминирующее возмущение имеет не синусоидальную, а “модулированную” форму, так как ее амплитуда, волновое число и инкремент зависят от ξ.

4. Приложения в тектонофизике. С использованием полученных результатов исследуем механизм образования складок, как разновидности геологических структур [10, 11].

Складкой называется волнообразный изгиб слоя горных пород без разрыва его сплошности. При теоретическом и экспериментальном исследовании процесса складкообразования широко используется модель, в которой складки образуются в слое с толщиной h_2 и вязкостью μ_2, заключенном в среду с вязкостью μ_1, под действием сил сжатия, направленных параллельно этому слою. В этом случае образование складки можно описать уравнением для продольного изгиба тонкой пластины, создаваемого боковым сжимающим напряжением p_L:

$$w = A_0 \exp\Big(\frac{p_L t}{4\mu_2/(h_2 k) + \mu_1 h_2^2 k^2/3}\Big)\cos(kx)$$

(A_0 — начальная амплитуда складки). Тогда максимальную длину волны $L_d = 2\pi/k$ можно найти из условия, при котором показатель экспоненты по k имеет максимальное значение, определяющее скорость роста складки [10, 11]:

$$L_d = 2\pi h_2 \sqrt[3]{\mu_1/(6\mu_2)}. \tag{29}$$

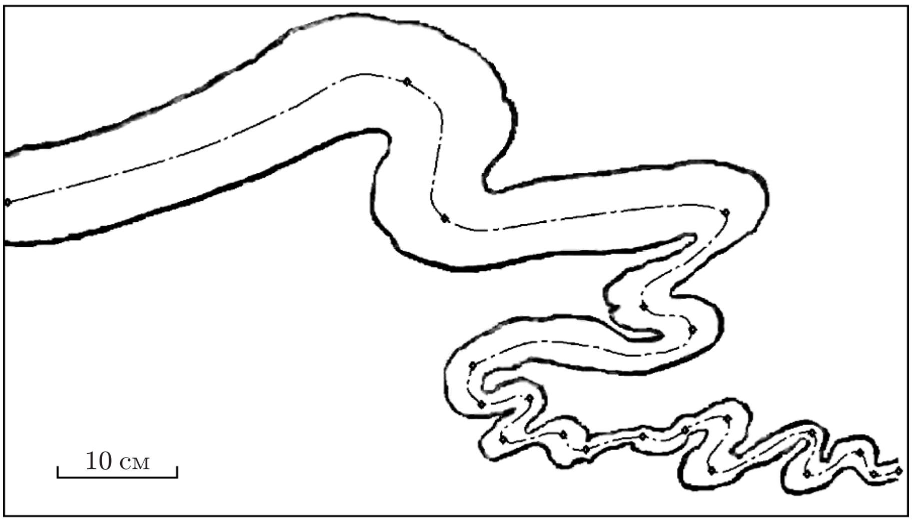

Рис. 2. Контур складки неоднородной толщины:
штрихпунктирная линия — осевая линия складки; маркеры — положения точек, в которых складка имеет максимальную кривизну

Использование формулы (29) на практике показывает, что приемлемые результаты получаются только при больших значениях отношения вязкостей μ_1/μ_2.

Однако в ряде случаев наблюдаются структурные комплексы, происхождение которых можно объяснить только строго послойным или близким к послойному течением пород. Поэтому для проверки возможности деформации горизонтально залегающих слоев в складки в условиях послойного течения был проведен физический эксперимент на эквивалентных материалах. Многослойный пласт, в котором чередовались слои с повышенной и пониженной вязкостью, различающиеся содержанием канифоли и машинного масла, помещался в лабораторную установку. Горизонтальное послойное течение создавалось за счет давления пресса сверху. Схема, подробное описание установки и результаты физического моделирования представлены в работе [12]. Результаты проведенных экспериментов показывают, что механизм послойного течения значительно лучше, чем какой-либо другой механизм, объясняет сложные, на первый взгляд противоречивые особенности часто встречающихся складчатых структур. Однако при обосновании этого механизма возникают определенные трудности, обусловленные отсутствием каких-либо теоретических или экспериментальных данных о поведении многослойного пласта в условиях послойного течения.

В настоящей работе использовались данные наблюдения складки неоднородной толщины, контур которой сделан со снимка, приведенного в работе [10. Рис. 1,c] (рис. 2).

Исследование проводилось следующим образом. С использованием контура складки рассчитывалась осевая линия, на которой определялись координаты точек максимальной кривизны и толщина складки в этих точках (см. рис. 2). В предположении, что до начала деформации осевая линия складки была прямой, точки максимальной кривизны соответствуют точкам, в которых в начальный момент времени амплитуда поперечного изгиба складки максимальна (далее будем называть их экстремальными точками). "Выпрямим" складку вдоль осевой линии. Обозначая через d_n^e ($n = \overline{1,N}$) расстояния между точками максимальной кривизны, координаты этих точек на прямой оси можно вычислить следующим образом:

$$x_n^e = \sum_{l=1}^{n} d_l^e, \quad n = \overline{0,N}.$$

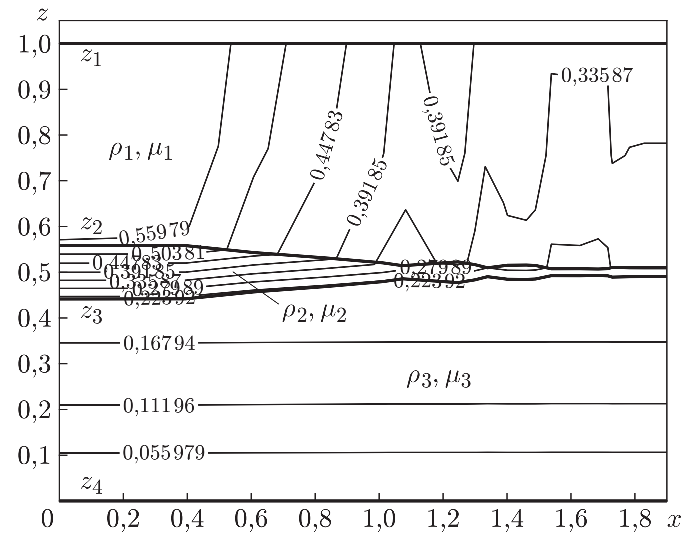

Рис. 3. Поле скоростей u''_{10}:
жирные линии — границы слоев, тонкие — изолинии скорости u''_{10}

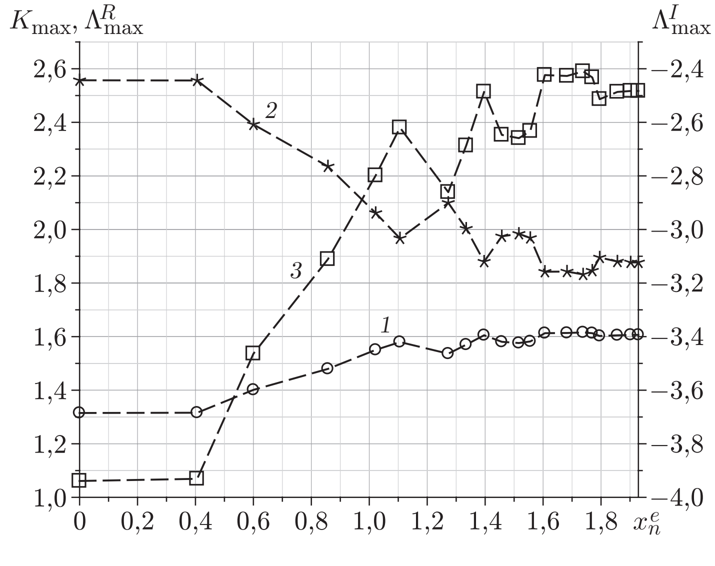

Рис. 4. Зависимости основных параметров неустойчивости $K_{\max}$ (*1*), $\Lambda^R_{\max}$ (*2*), $\Lambda^I_{\max}$ (*3*) от координат точек максимальной кривизны

По значению толщины складки в точках x_n^e вычислялись поле основной компоненты скорости u''_{10}, а затем основные параметры неустойчивости. В расчетах использовались безразмерные значения параметров, приведенные в п. **3**. Толщина среднего слоя h_2 задавалась равной толщине складки. Вязкость среднего слоя варьировалась в диапазоне $\mu_2 = 0{,}1 \div 10{,}0$, значение q — в пределах $q = 0{,}2 \div 2{,}0$, малый параметр $\varepsilon \approx 0{,}2$. Расчетная область с полем скорости u''_{10} при $\mu_2 = 0{,}1$ показана на рис. 3.

В расчетах вместо $k_{\max}$ использовался параметр $K_{\max}$, вычисляемый по формуле (28), вместо $\lambda_{\max}$ — функция $\Lambda_{\max} = \lambda_{\max} h_2$. Зависимости основных параметров неустойчивости от координат точек максимальной кривизны x_n^e приведены на рис. 4.

Координаты точек, в которых амплитуда смещения границ слоев максимальна, можно определить из условия $z'_{i1,x} = 0$. Приближенное значение корней этого уравнения x_n^* можно найти из разложения

$$x_n^* = x_n - \frac{z'_{i1,x}}{z'_{i1,xx}}\Big|_{x=x_n} + o(\varepsilon) =$$
$$= x_n - \varepsilon\,\frac{Z^{\max}_{i1,\xi}h_2^2 + (\Lambda^R_{\max,\xi}h_2 - \Lambda^R_{\max}h_{2,\xi})Z^{\max}_{i1}t_{\min}}{Z^{\max}_{i1}K^2_{\max}}\Big|_{\xi=\varepsilon x_n} + o(\varepsilon),$$

где $t_{\min}$ — минимальное время, при котором амплитуда неустойчивости может увеличиться в 100 раз; $o(\varepsilon)$ — величина более высокого порядка, чем ε; x_n — решения уравнения

$$\Theta_{\max} + \varphi^i_{\max} + \lambda^I_{\max}t_{\min} = \pi n.$$

Минимальное время $t_{\min} \approx 0{,}02$ вычисляется из уравнения $\lambda^R_{\max}t = \ln(100)$. Следовательно, ввиду малости остаточного члена можно считать $x_n^* \approx x_n$.

В случае если известно x_{n-1}, следующее значение x_n можно найти из уравнения

$$\Phi \equiv (\Theta_{\max} + \varphi^i_{\max} + \lambda^I_{\max}t_{\min})\Big|^{\varepsilon x_n}_{\varepsilon x_{n-1}} = \pi.$$

Пусть x_{0n} — решение уравнения

$$\Theta_{\max}\Big|^{\varepsilon x_{0n}}_{\varepsilon x_{n-1}} = \pi. \qquad (30)$$

Тогда расстояния между соседними точками $d_n = x_n - x_{n-1}$ вычисляются следующим образом:

$$d_n = d_{0n} + \Delta d_n = d_{0n} - \frac{\Phi|_{\varepsilon x_{n0}}}{\Phi_{,x}|_{\varepsilon x_{n0}}} + o(\varepsilon) =$$
$$= d_{0n}\Big(1 - \varepsilon\,\frac{\varphi^i_{\max,\xi}h_2^2 + (\Lambda^I_{\max,\xi}h_2 - \Lambda^I_{\max}h_{2,\xi})t_{\min}}{K_{\max}h_2}\Big|_{\xi=\varepsilon x_{n0}}\Big) + o(\varepsilon) \qquad (31)$$

($d_{0n} = x_{0n} - x_{n-1}$).

Согласно расчетам невязка Δd_n в формуле (31) не превышает 1 %. Следовательно, на интервале времени, на котором амплитуда неустойчивости достигает существенных значений, величиной Δd_n в первом приближении можно пренебречь. Предположение, что изучаемая складка образована в результате развития неустойчивости в послойном течении, позволяет сравнить наблюдаемые величины d^e_n с расстояниями между экстремальными точками d_{0n}.

На рис. 5,*а* приведены значения d^e_n, d_n в точках максимальной кривизны ($d_{1n} = d_{0n}|_{\mu_2=0{,}1}$, $d_{2n} = d_{0n}|_{\mu_2=10}$, $\Delta d_{1n} = \Delta d_n|_{\mu_2=0{,}1,\ t=t_{\min}}$). Видно, что данные наблюдений хорошо согласуются с результатами расчетов по формуле (30) в широком диапазоне значений параметров модели. Результаты расчетов показывают, что влияние q на $k_{\max}$ пренебрежимо мало ($\approx$0,3 %), а величина $\lambda_{\max}$ с точностью до 0,2 % линейно зависит от q. Таким образом, в данном исследовании значение этого параметра несущественно. При изменении вязкости среднего слоя в диапазоне $0{,}1 \div 10{,}0$ распределение d_{0n} также существенно не меняется. На рис. 5,*б* приведены значения d^e_n, $0{,}5L_d$ в точках максимальной кривизны (L_{d1} — значение L_d при $\mu_2 = 0{,}1$, L_{d2} — значение L_d при $\mu_2 = 10$). Видно, что между данными наблюдений и значениями половины доминирующей длины волны $0{,}5L_d$, рассчитанной по формуле (29), имеются существенные различия.

Заключение. С использованием метода многих масштабов проведено асимптотическое исследование системы уравнений, описывающей трехслойное стоксово течение вязкой жидкости с неоднородной толщиной слоев. Результаты анализа системы уравнений первого приближения с помощью метода Фурье показывают, что неустойчивость проявляется

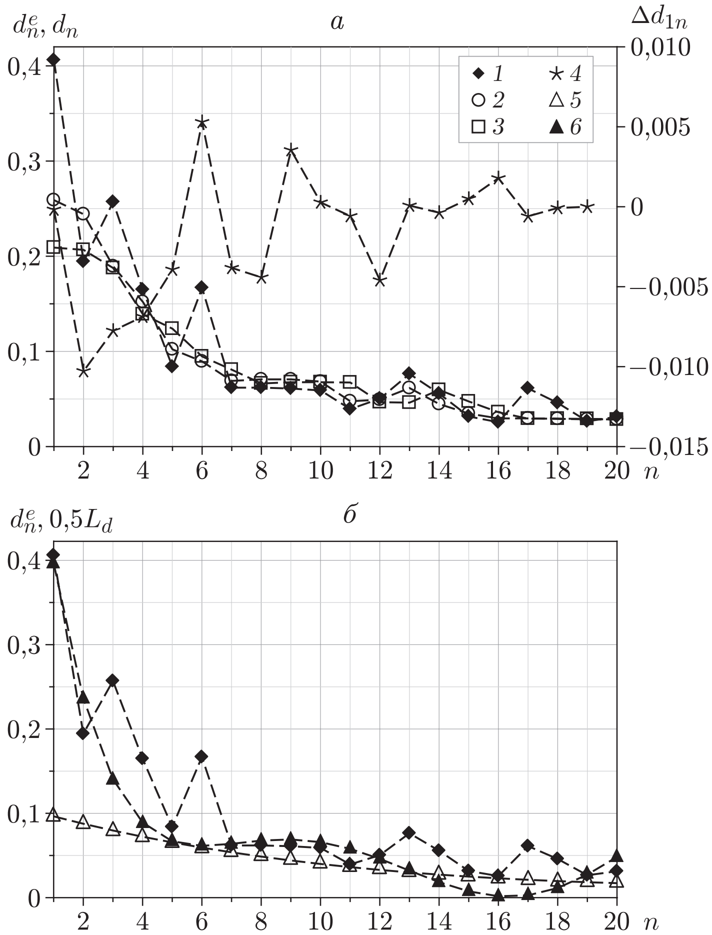

Рис. 5. Значения d_n^e, d_n, Δd_{1n} (*а*) и d_n^e, $0{,}5L_d$ (*б*) в точках максимальной кривизны:
1 — d_n^e, *2* — d_{1n}, *3* — d_{2n}, *4* — Δd_{1n}, *5* — $0{,}5L_{d1}$, *6* — $0{,}5L_{d2}$

в виде бегущей волны, длина которой соизмерима с толщиной среднего слоя. Однако в отличие от случая постоянной толщины слоев доминирующее возмущение имеет не синусоидальную, а “модулированную” форму как по амплитуде, так и по частоте в зависимости от геометрических и физических параметров слоев. Найдены формулы для вычисления основных параметров неустойчивости.

Полученные результаты используются для исследования механизма образования геологической складки в неоднородном по толщине слое. Проведен расчет основных параметров волны неустойчивости и распределения расстояний между экстремальными точками. Сравнение модельных расчетов в широком диапазоне значений параметров с данными наблюдений показывает, что они достаточно хорошо согласуются. Это позволяет использовать предложенную модель наряду с другими моделями для теоретического исследования процесса образования складчатых структур подобного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Craster R. V., Matar O. K.** Dynamics and stability of thin liquid films // Rev. Modern Phys. 2009. V. 81, N 3. P. 1131–1198.

2. **Henry D., Uddin J., Thompson J., et al.** Multi-layer film flow down an inclined plane: experimental investigation // Experiments Fluids. 2014. V. 55, N 12. P. 1–14.
3. **Loewenherz D. S., Lawrence C. J.** The effect of viscosity stratification on the stability of a free surface flow at low Reynolds number // Phys. Fluids. 1989. V. A1. P. 1686–1693.
4. **Hu J., Millet S., Botton V., et al.** Inertialess temporal and spatio-temporal stability analysis of the two-layer film flow with density stratification // Phys. Fluids. 2006. V. 18, N 10. 104101. DOI: 10.1063/1.2357026.
5. **Jiang W. Y., Helenbrook B. T., Lin S. P., Weinstein S. J.** Low-Reynolds-number instabilities in three-layer flow down an inclined wall // J. Fluid Mech. 2005. V. 539. P. 387–416.
6. **Weinstein S. J., Chen K. P.** Large growth rate instabilities in three-layer flow down an incline in the limit of zero Reynolds number // Phys. Fluids. 1999. V. 11. P. 3270–3282.
7. **Thompson J., Blyth M. G.** Inertialess multilayer film flow with surfactant: stability and travelling waves // Phys. Rev. Fluids. 2016. V. 1, N 6. 063904. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.1.063904.
8. **Пак В. В.** Асимптотическое исследование образования многокольцевой структуры в ползущем осесимметричном двухслойном течении с переменной толщиной слоев и некоторые геофизические приложения // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. 2014. Вып. 4. С. 95–108.
9. **Nayfeh A. H.** Perturbation methods. N. Y.: John Wiley Inc., 1973.
10. **Hudleston P. J., Treagus S. H.** Information from folds: A review // J. Structural Geology. 2010. V. 32. P. 2042–2071.
11. **Schmalholz S. M., Mancktelow N. S.** Folding and necking across the scales: a review of theoretical and experimental results and their applications // Solid Earth. 2016. V. 7. P. 1417–1465.
12. **Миллер Ю. В.** Послойное и субпослойное течение пород и его роль в структурообразовании // Геотектоника. 1982. № 6. С. 88–96.

Поступила в редакцию 28/VI 2018 г.,
после доработки — 6/V 2019 г.
Принята к публикации 27/V 2019 г.