

В эксперименте же число  $R_m$  (для характерного размера  $l = 10,5$  см и измеренным эффективным значениям  $\sigma = 40 \div 20$  ом<sup>-1</sup>см<sup>-1</sup> и скорости  $u_0 = 1,3 \cdot 10^6$  см/сек) равно 3—6 при малых магнитных полях.

Однако качественное соотношение теоретических и экспериментальных результатов (фиг. 10) при невозмущенной газовой динамике говорит о том, что в экспериментальной установке характер взаимодействия плазмы с электрическим контуром близок к теоретическому и энергия на омическом сопротивлении выделяется из плазмы.

Авторы выражают благодарность Г. И. Багаеву, А. П. Морозову, Л. Н. Пузыреву и Ю. А. Шадрину, спроектировавшим экспериментальную установку, и Т. И. Пущкаревой и С. П. Мымриной за помощь в эксперименте и расчетах.

Поступила 20 X 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лин Ш. Ч., Реслер Е., Кантровиц А. Электропроводность высокоионизованного аргона в ударной волне. Вопросы ракетной техники, 1956, № 1 (31), стр. 11—35.
2. Федуров В. И., Ефремова Г. Д. Изучение магнитного метода измерения электропроводности ионизованных газов. Теплофизика высоких температур, 1956, т. 4, № 5, стр. 615—620.
3. Тамм И. Б. Основы теории электричества. Изд-во «Наука», 1966.

### НЕКОТОРЫЕ РАСЧЕТЫ ДЛЯ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕННОЙ СТРУЕ ПРИ ПОСТОЯННЫХ И ФЛЮКТУИРУЮЩИХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Э. Н. Червочкин

(Москва)

В работе [1] была рассмотрена следующая система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, в определенных приближениях моделирующая плазмохимический процесс конверсии метана в ацетилен в водородной плазменной струе

$$\begin{aligned} \frac{dc_1(z)}{dz} &= -\frac{1}{v(z)} k_1(T) c_1(z) \\ \frac{dc_2(z)}{dz} &= \frac{1}{v(z)} \left[ \frac{1}{2} \frac{\mu_2}{\mu_1} k_1(T) c_1(z) - k_2(T) c_2(z) \right] \\ \frac{dc_3(z)}{dz} &= \frac{1}{v(z)} \left[ \frac{\mu_3}{\mu_2} k_2(T) c_2(z) - k_3(T) c_3(z) \right] \\ \frac{dc_4(z)}{dz} &= \frac{1}{v(z)} 2 \frac{\mu_4}{\mu_3} k_3(T) c_3(z) \end{aligned} \quad (0.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dc_5(z)}{dz} &= \frac{1}{v(z)} \left[ \frac{\mu_5}{\mu_1} k_1(T) c_1(z) + \frac{\mu_5}{\mu_2} k_2(T) c_2(z) + \frac{\mu_5}{\mu_3} k_3(T) c_3(z) \right] \\ \frac{dT(z)}{dz} &= -\frac{[N/M - 2v(z)] s_1 + v(z) RT(z) s_2}{[N/M - 2v(z)] s_3 + v(z) R s_4} \end{aligned} \quad (0.2)$$

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{v(z)}, \quad v(z) = N/2M - [(N/2M)^2 - RT(z) s_4]^{1/2} \quad (0.3)$$

где

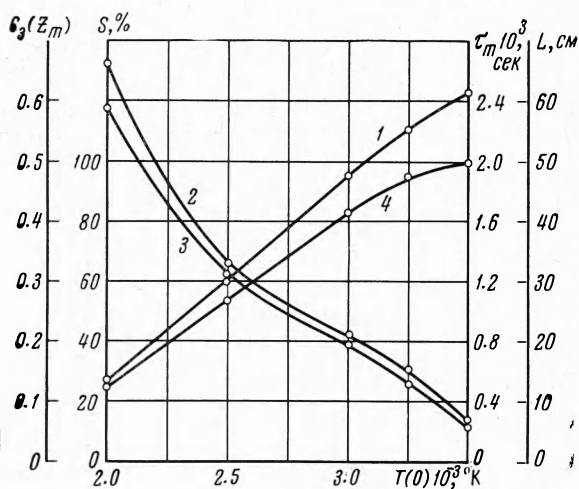
$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=-1}^8 \frac{dc_i(z)}{dz} [h_{ij} T^j(z) + h_i^0], & s_2 &= \sum_{i=1}^5 \frac{1}{\mu_i} \frac{dc_i(z)}{dz} \\ s_3 &= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=-1}^8 c_i(z) h_{ij} T^{j-1}(z), & s_4 &= \sum_{i=1}^5 \frac{c_i(z)}{\mu_i} \end{aligned}$$

Здесь  $c_i$  — весовая концентрация  $i$ -го вещества ( $i = 1-5$ , 1 —  $\text{CH}_4$ , 2 —  $\text{C}_2\text{H}_4$ , 3 —  $\text{C}_2\text{H}_2$ , 4 — C, 5 —  $\text{H}_2$ ),  $h_{ij}$  — коэффициент в разложении энтальпии  $i$ -го вещества по температуре  $T$ ,  $h_i^0$  — теплота образования  $i$ -го вещества,  $k_i(T)$  — константа скорости распада  $i$ -го вещества,  $N$ ,  $M$  — константы интегрирования, определяемые из начальных условий,  $R$  — газовая постоянная,  $\mu_i$  — молекулярный вес  $i$ -го вещества.

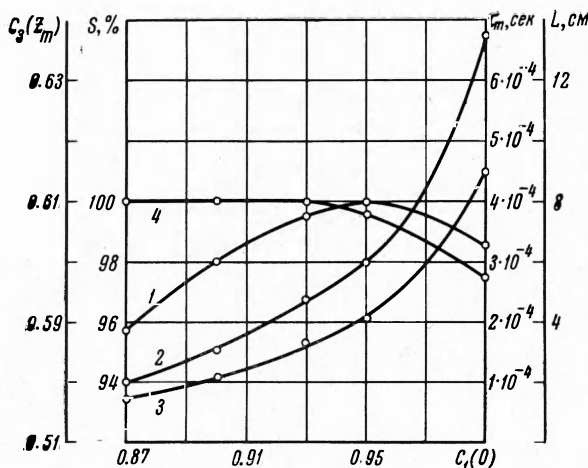
При этом было показано путем численного интегрирования системы уравнений (0.1) — (0.3) на ЭЦВМ при различных начальных концентрациях метана  $c_1(0)$  ( $c_5(0) = 1 - c_1(0)$ ,  $c_2(0) = c_3(0) = c_4(0) = 0$ ), начальных температурах  $T(0)$  и начальных скоростях  $v(0)$  плазменной струи, что изменение  $c_1(0)$  и  $T(0)$  оказывает существенное влияние на кинетику процесса, в то время как изменение  $v(0)$  не влияет на кинетику химических реакций, а лишь изменяет пространственные масштабы процесса.

Ввиду того, что система уравнений (0.1) — (0.3) не может быть решена аналитически, невозможно установить непосредственно функциональную связь между ее решениями и начальными условиями и исследовать в общем виде зависимость решения от начальных условий.

Однако можно воспользоваться результатами численного интегрирования системы (0.1) — (0.3) при различных начальных условиях для установления приближенных



Фиг. 1



Фиг. 2

зависимостей решений от начальных условий при определенном значении  $z = z_m$ . В качестве  $z_m$  можно выбрать точку, в которой концентрация ацетилена, получаемая из решения системы уравнений (0.1) — (0.3), достигает максимума и, как показано в работе [2], может быть в значительной мере сохранена путем надлежащего выбора режима и места включения закладки.

Ниже будет установлена приближенная функциональная зависимость в точке  $z_m$  от начальных условий  $T(0)$  и  $c_1(0)$ , называемых входами для следующих четырех величин, называемых выходами:

а) длины отрезка от начала реактора ( $z = 0$ ) до  $z = z_m$ . Этот отрезок, на котором разлагается в основном процесс превращения метана в ацетилен, обозначается через  $L$  и называется в соответствии с терминологией, принятой в [3,4], эффективной длиной плазмохимического реактора;

б) времени реакции  $\tau_m$ , определенного из уравнения (0.3)

$$\tau_m = \int_0^{z_m} \frac{d\xi}{v(\xi)}$$

в) максимальной концентрации ацетилена  $c_3(z_m)$ ;

г) степени разложения метана

$$S = \frac{c_1(0) - c_1(z_m)}{c_1(0)} \quad (0.4)$$

В настоящей работе рассматриваются два вопроса. Во-первых, предлагается методика, позволяющая рассматривать плазмохимический реактор, описываемый системой уравнений типа (0.1) — (0.3), как нелинейный преобразователь. Во-вторых, рассматривается влияние флуктуаций начальных условий.

1. О зависимости величин  $L$ ,  $\tau_m$ ,  $c_3(z_m)$  и  $S$  от  $c_1(0)$  и  $T(0)$ . Численно интегрируя систему уравнений (0.1) — (0.3) для пяти вариантов каждого из входов  $c_1(0)$  или  $T(0)$  при фиксированном другом входе, можно построить графические зависимости всех выходов  $L$ ,  $\tau_m$ ,  $c_3(z_m)$  и  $S$  от каждого из входов  $c_1(0)$  и  $T(0)$ .

На фиг. 1 (кривые 1—4, соответственно) представлены зависимости  $c_3(z_m)$ ,  $L$ ,  $\tau_m$  и  $S$  от  $T(0)$  при фиксированных значениях входов  $c_1(0)$  и  $v(0)$ :  $c_1(0) = 0.95$ ,  $v(0) = 3 \cdot 10^4$  см/сек. (Здесь и дальше концентрации даны в весовых долях.)

На фиг. 2 (кривые 1—4, соответственно) представлены зависимости  $c_3(z_m)$ ,  $L$ ,  $\tau_m$  и  $S$  от  $c_1(0)$  при фиксированных значениях входов  $T(0)$  и  $v(0)$ :  $T(0) = 3.5 \cdot 10^3$  °K,  $v(0) = 3 \cdot 10^4$  см/сек.

Используя эти графики, можно записать приближенные аналитические зависимости между заданными выходами и входами, аппроксимируя эти графики линейными и квадратичными функциями.

Зависимости выходов  $c_3(z_m)$ ,  $L$ ,  $\tau_m$  и  $S$  от входов  $T(0)$  и  $c_1(0)$  представлены, соответственно, формулами (1.1) — (1.8)

$$c_3(z_m) = 0.125 + 3.5 \cdot 10^{-4} (T(0) - 2000^\circ), \quad 2000 \leq T(0) \leq 3000^\circ \text{ K} \quad (1.1)$$

$$c_3(z_m) = 0.476 + 3.44 \cdot 10^{-4} (T(0) - 3000^\circ) - 1.6 \cdot 10^{-7} (T(0) - 3000^\circ)^2 \\ 3000^\circ \leq T(0) \leq 3500^\circ \text{ K}$$

$$L = 67 - 9 \cdot 10^{-2} (T(0) - 2000^\circ) + 0.44 \cdot 10^{-4} (T(0) - 2000^\circ)^2, \quad 2000^\circ \leq T(0) \leq 3000^\circ \text{ K} \quad (1.2)$$

$$L = 21 - 2.6 \cdot 10^{-2} (T(0) - 3000^\circ) - 0.8 \cdot 10^{-5} (T(0) - 3000^\circ)^2, \quad 3000^\circ \leq T(0) \leq 3500^\circ \text{ K}$$

$$\tau_m = 2.357 \cdot 10^{-3} - 2.99 \cdot 10^{-6} (T(0) - 2000^\circ) + 1.44 \cdot 10^{-9} (T(0) - 2000^\circ)^2, \\ 2000^\circ \leq T(0) \leq 3000^\circ \text{ K} \quad (1.3)$$

$$\tau_m = 0.78 \cdot 10^{-3} - 0.113 \cdot 10^{-5} T(0) - 3000^\circ, \quad 3000^\circ \leq T(0) \leq 3500^\circ \text{ K}$$

$$S = 24.7 + 5.83 \cdot 10^{-2} (T(0) - 2000^\circ), \quad 2000^\circ \leq T(0) \leq 3000^\circ \text{ K}$$

$$S = 83 + 0.558 \cdot 10^{-1} (T(0) - 3000^\circ) - 0.464 \cdot 10^{-4} (T(0) - 3000^\circ)^2 \\ 3000^\circ \leq T(0) \leq 3500^\circ \text{ K} \quad (1.4)$$

$$c_3(z_m) = 0.5887 + 0.33 (c_1(0) - 0.87), \quad 0.87 \leq c_1(0) \leq 0.93 \quad (1.5)$$

$$c_3(z_m) = 0.6085 + 0.1758 (c_1(0) - 0.93) - 4.29 (c_1(0) - 0.93)^2, \quad 0.93 \leq c_1(0) \leq 0.99$$

$$L = 2.0 + 21.7 (c_1(0) - 0.87) + 3.88 \cdot 10^2 (c_1(0) - 0.87)^2, \quad 0.87 \leq c_1(0) \leq 0.93 \quad (1.6)$$

$$L = 4.7 + 24.17 (c_1(0) - 0.93) + 2.04 \cdot 10^3 (c_1(0) - 0.93)^2, \quad 0.93 \leq c_1(0) \leq 0.99$$

$$\tau_m = 0.277 \cdot 10^{-1} - 0.625 \cdot 10^{-1} c_1(0) + 0.353 \cdot 10^{-1} c_1^2(0), \quad 0.87 \leq c_1(0) \leq 0.99 \quad (1.7)$$

$$S = 100, \quad 0.87 \leq c_1(0) \leq 0.93 \quad (1.8)$$

$$S = 100 - 0.391 \cdot 10^2 (c_1(0) - 0.93) - 0.417 (c_1(0) - 0.93)^2, \quad 0.93 \leq c_1(0) \leq 0.99$$

Приведенные зависимости всех выходов от входов  $c_1(0)$  и  $T(0)$  показывают, что по отношению к этим входам плазмохимический реактор является нелинейным преобразователем, а построенные графики и соответствующие им приближенные аналитические выражения являются его нелинейными характеристиками.

**2. О влиянии флуктуирующих начальных условий на решения системы (0.1) — (0.3). Постановка задачи.** В выполненных выше расчетах начальные условия  $c_1(0)$  и  $T(0)$  предполагались не зависящими от времени. В связи с этим полученные характеристики реактора, рассматриваемого как нелинейный преобразователь, являются его статическими характеристиками.

В реальных условиях начальная концентрация метана и начальная температура газовой смеси испытывают случайные колебания во времени.

Математически случайные колебания во времени начальной концентрации метана  $c_1(0)$  и начальной температуры  $T(0)$  будем описывать в терминах стационарных случайных функций [5, 6], считая  $c_1(0)$  и  $T(0)$  абсолютно непрерывными стационарными нормальными случайными функциями времени. Для сравнения результатов, получаемых при таком подходе с экспериментальными данными, очевидно, потребуется допустить еще, что эти случайные функции являются эргодическими. Для этого достаточно, чтобы их автокорреляционные функции не слишком медленно стремились к нулю [6].

Так как исследуемые случайные функции изменяются в конечном интервале  $[x_*, x^*]$  (здесь под  $x$  понимается любая из двух функций  $c_1(0)$  и  $T(0)$ ), необходимо воспользоваться усеченными нормальными распределениями [7].

Одномерный усеченный нормальный закон распределения имеет следующий вид:

$$f_1(x_1) = D_1 \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2}{2\sigma_x^2} \right] \text{ при } x_* < x_1 \leq x^* \quad (2.1)$$

$$f_1(x_1) = 0 \text{ при } x_1 \leq x_*, \quad x_1 > x^* \\ x_1 = x(t_1)$$

Здесь  $\sigma_x$  — среднеквадратичное отклонение стационарной случайной функции.

Величина  $D_1$  подбирается так, чтобы  $f_1(x_1)$  была нормирована на единицу в интервале задания случайной функции.

Если входы нелинейного преобразователя являются стационарными случайными функциями времени, то его выходы  $L$ ,  $\tau_m$ ,  $c_3(z_m)$  и  $S$  также будут стационарными случайными функциями времени (предполагается, что нелинейный преобразователь имеет стационарные характеристики). Для определения статистических свойств этих случайных функций используем формулы (1.1) — (1.8). При этом предполагается, что нелинейный преобразователь безынерционен [6,8,9], т. е. любой выход  $y(t)$  в данный момент времени  $t$  выражается как функция любого входа  $x(t)$  в тот же момент времени

$$y(t) = \varphi[x(t)] \quad (2.2)$$

3. Определение математических ожиданий и корреляционных функций  $L$ ,  $c_3(z_m)$  и  $S$ . Основное практическое значение при исследовании и проектировании нелинейных систем имеет в настоящее время знание корреляционной функции и математического ожидания случайной функции выхода.

Математическое ожидание  $\langle y \rangle$  стационарного случайного процесса  $y(t)$  на выходе безынерционного нелинейного преобразователя определяется следующим образом [10]:

$$\langle y \rangle = \langle y_1 \rangle + \langle y_2 \rangle \quad (3.1)$$

где

$$\langle y_1 \rangle = D_1 \sum_{k=0}^2 A_{k,1} \left\{ \sum_{l=1}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} \sigma_x^l (\langle x \rangle - x_*)^{k-l} [Q_l(\xi_0) - Q_l(\xi_*)] \right\} \quad (3.2)$$

$$\langle y_2 \rangle = D_1 \sum_{k=0}^2 A_{k,2} \left\{ \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} \sigma_x^l (\langle x \rangle - x_0)^{k-l} [Q_l(\xi^0) - Q_l(\xi_0)] \right\}$$

где  $x_0$  — значение  $x$ , разбивающее область изменения  $[x_*, x^2]$  на два участка.

$$Q_l(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\xi} \xi^l e^{-1/2 \xi^2} d\xi, \quad \xi = \frac{x - \langle x \rangle}{\sigma_x} \quad (3.3)$$

Здесь  $A_{k,1}$ ,  $A_{k,2}$  — постоянные коэффициенты в формулах (1.1) — (1.8).

Расчетная формула для корреляционной функции выхода записывается в следующем виде [10]:

$$R_y(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2(\langle x \rangle, \sigma_x) \frac{r_x^n(\theta)}{n!}, \quad (\theta = t_2 - t_1) \quad (3.4)$$

$$B_n(\langle x \rangle, \sigma_x) = D_1 \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^k A_{k,1} \frac{k!}{l!(k-l)!} \sigma_x^l (\langle x \rangle - x_*)^{k-l} [M_{ln}(\xi_0) - M_{ln}(\xi_*)] + \\ + D_1 \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^k A_{k,2} \frac{k!}{l!(k-l)!} \sigma_x^l (\langle x \rangle - x_0)^{k-l} [M_{ln}(\xi^0) - M_{ln}(\xi_0)] \quad (3.5)$$

$$M_{ln}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \xi^l \frac{d^n \psi(\xi)}{d\xi^n} d\xi, \quad \psi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \xi^2} \quad (3.6)$$

$r_x(\theta)$  — нормированная автокорреляционная функция входа  $x$ .

При практических расчетах по формуле (3.4) приходится ограничиваться конечным числом членов этого ряда  $N$ . Оценка точности приближенного определения корреляционной функции  $R_y(\theta)$  дается следующей формулой [10]:

$$|R_y(\theta) - R_y'(\theta)| \leq \sigma_y^2 - \sigma_y'^2 \quad (3.7)$$

$$R_y'(\theta) = \sum_{n=1}^N B_n^2(\langle x \rangle, \sigma_x) \frac{r_x^n(\theta)}{n!}, \quad \sigma_y'^2 = R_y'(0) = \sum_{n=1}^N \frac{B_n^2(\langle x \rangle, \sigma_x)}{n!} \quad (3.8)$$

Результаты расчета зависимостей математических ожиданий  $\langle c_3(z_m) \rangle$ ,  $\langle L \rangle$  и  $\langle S \rangle$  от среднеквадратичного отклонения начальной температуры  $\sigma_1$  при заданном математическом ожидании начальной температуры  $\langle T(0) \rangle = 3000^\circ \text{K}$  и постоянном значении начальной концентрации метана  $c_1(0) = 0.95$  представлены на фиг. 3 кривыми 1, 2 и 3, соответственно. Аналогично, на фиг. 4 кривыми 1, 2 и 3 представлены зависимости  $\langle c_3(z_m) \rangle$ ,  $\langle L \rangle$  и  $\langle S \rangle$  от среднеквадратичного отклонения начальной концентрации метана  $\sigma_2$  (при этом математическое ожидание начальной концентрации метана  $\langle c_1(0) \rangle = 0.95$  и постоянное значение начальной температуры  $T(0) = 3500^\circ \text{K}$ ).

На основании этих графиков были построены приближенные аналитические зависимости

$$\begin{aligned} \langle c_3(z_m) \rangle &= 0.475 - 3.166 \cdot 10^{-5} \sigma_1 - 1.833 \cdot 10^{-7} \sigma_1^2 \\ \langle L \rangle &= 21 - 1.135 \cdot 10^{-2} \sigma_1 + 0.355 \cdot 10^{-4} \sigma_1^2 \quad (0^\circ \leq \sigma_1 \leq 300^\circ \text{ K}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= 83 - 0.217 \cdot 10^{-2} \sigma_1 - 0.283 \cdot 10^{-4} \sigma_1^2 \\ \langle c_3(z_m) \rangle &= 0.610 - 0.425 \sigma_2 + 9.5 \sigma_2^2 \\ \langle L \rangle &= 6.0 + 15 \sigma_2 + 5 \cdot 10^3 \sigma_2^2 \quad (0 \leq \sigma_2 \leq 0.02) \\ \langle S \rangle &= 99.2 - 40 \sigma_2 + 2 \cdot 10^3 \sigma_2^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

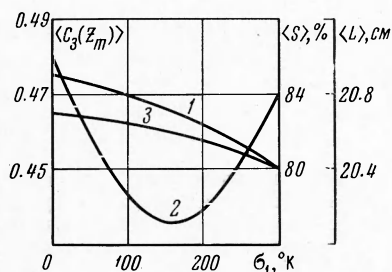
Расчет по формулам (3.4) — (3.6) дал следующую формулу для корреляционной функции выхода  $c_3(z_m)$   $R_A'(\theta)$  (при расчете  $N = 3$ ,  $\langle T(0) \rangle = 3000^\circ \text{ K}$ ,  $c_1(0) = 0.95$  и  $\sigma_1 = 100^\circ \text{ K}$ )

$$R_A'(\theta) = 1.122 \cdot 10^{-3} r_T(\theta) + 1.62 \cdot 10^{-6} r_T^2(\theta) + 6.61 \cdot 10^{-8} r_T^3(\theta) \quad (3.11)$$

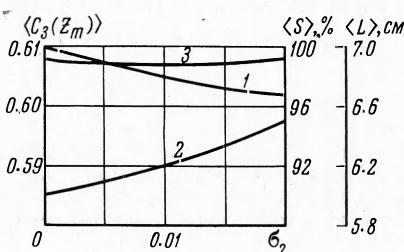
Относительная ошибка определения корреляционной функции выхода  $c_3(z_m)$  порядка 10%.

Найденные приближенные аналитические зависимости позволяют рассматривать плазмохимический реактор как нелинейный преобразователь, входами которого являются  $T(0)$  и  $c_1(0)$ , а выходами  $c_3(z_m)$ ,  $L$ ,  $\tau_m$  и  $S$ , и графики рис. 1 и 2 как его статические характеристики.

Из сравнения графиков фиг. 1 и 2 видно, что в заданной области изменения величин входов  $T(0)$  и  $c_1(0)$  максимум концентрации ацетилена  $c_3(z_m)$  более чувствителен к изменению входа  $T(0)$ , что, очевидно, необходимо будет учитывать при регулировании выхода  $c_3(z_m)$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Полученные статические характеристики позволили рассмотреть задачу, когда входы  $T(0)$  и  $c_1(0)$  являются случайными функциями времени.

Были найдены математические ожидания выходов  $c_3(z_m)$ ,  $L$  и  $S$  в зависимости от среднеквадратических отклонений входов  $T(0)$  и  $c_1(0)$ .

Графики фиг. 3, 4 показывают, что при случайных флюктуациях входов  $c_1(0)$  и  $T(0)$  среднее значение выхода целевого продукта ацетилена  $c_3(z_m)$  может понизиться на величину  $\sim 5.5\%$ .

В работе приведена также методика расчета корреляционных функций выходов на примере выхода  $c_3(z_m)$ .

Полученные в данной работе статические характеристики плазмохимического реактора могут быть использованы при решении ряда задач:

- при рассмотрении вопроса об управлении конечным состоянием процесса, например, максимумом концентрации ацетилена, путем изменения входов  $c_1(0)$  и  $T(0)$ ;
- при решении более общей задачи о выборе оптимальных (для заданного критерия оптимальности) значений входов  $T(0)$  и  $c_1(0)$  и т. д.

Корреляционные функции входов и выходов могут быть использованы для решения задач прогнозирования поведения выходов реактора (при флюктуирующих входах путем применения теории прогнозирования стационарных случайных функций).

Выражаю свою глубокую признательность Л. С. Полаку и Ю. Л. Хаиту за руководство работой и полезное обсуждение.

