

УДК 532.517.4: 533.6.011.8

ЭВОЛЮЦИЯ ДИФFUЗИОННОГО СЛОЯ СМЕШЕНИЯ ДВУХ ГАЗОВ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЕГО С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Г. А. Руев, А. В. Федоров*, В. М. Фомин*

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,
630008 Новосибирск

* Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложена математическая модель механики двухскоростной двухтемпературной смеси газов, на основе которой методами математического моделирования изучена эволюция слоя смешения двух газов различной плотности при воздействии на него ударных волн и волн сжатия в одномерном нестационарном приближении. В асимптотическом приближении полной модели получено решение начально-краевой задачи, описывающее формирование диффузионного слоя между двумя газами. В полной постановке численно решены задачи о взаимодействии ударных волн и волн сжатия с диффузионным слоем. Показано, что при переходе ударной волны через слой происходит его сжатие, величина которого зависит от интенсивности ударной волны. Установлено, что при переходе ударной волны из тяжелого газа в легкий слой смешения оказывается пересжатым и после прохождения ударной волны происходит его расширение. Детально описана волновая картина течения. Получено удовлетворительное согласие результатов расчетов изменения ширины области перемешивания с экспериментальными данными.

Ключевые слова: ударная волна, слой смешения, неустойчивость Рихтмайера — Мешкова, двухскоростная двухтемпературная газодинамика смесей.

Введение. Традиционно слой смешения рассматривается как поверхность разрыва плотности, т. е. как контактный разрыв. Взаимодействие ударной волны с контактным разрывом в одномерном нестационарном приближении описывается классическим решением задачи о распаде произвольного разрыва. Переход ударной волны из одного газа в другой через возмущенный контактный разрыв порождает неустойчивость Рихтмайера — Мешкова. На заключительной стадии в области первоначального контактного разрыва образуется область турбулентного перемешивания, разделяющая потоки сжатых газов. Известно, что замена ступенчатого профиля плотности на контактном разрыве на непрерывное распределение в некотором слое конечной ширины может приводить к снижению скорости роста возмущений на начальной стадии развития неустойчивости Рихтмайера — Мешкова. Это отмечалось, например, в работах [1, 2], в которых проводились теоретические исследования нарастания амплитуды возмущения, и в экспериментальных работах [3–6].

Теоретические исследования на основе уравнений газовой динамики имели в основном качественный характер, а слой смешения моделировался слоем переменной плотности. Поэтому представляет интерес исследование данной проблемы на основе уравнений двухскоростной двухтемпературной смеси газов, когда каждый компонент имеет собственную

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00453) и Министерства образования Российской Федерации в рамках проекта Тематического плана от 01.03.2003.

скорость и температуру. Данный подход позволяет описать как процессы взаимопроникновения газов, так и взаимодействие слоя смещения с ударной волной. На необходимость применения моделей многокомпонентных смесей для описания разрушения контактной границы и образования области смеси указывалось в работе [7]. В работе [8] построена полуэмпирическая модель турбулентного перемешивания многокомпонентной среды, основанная на использовании для каждого компонента своей скорости. В этой модели предполагается, что турбулентное перемешивание возникает сразу. Ниже на основе уравнений двухскоростной двухтемпературной газодинамики смесей исследуются процессы, протекающие на начальных стадиях перемешивания.

Математическая постановка. Исследуем эволюцию переходного слоя, разделяющего два чистых газа с разной плотностью, в рамках модели одномерного нестационарного течения смеси при воздействии на слой ударной волны. Параметры смеси в слое описываются уравнениями двухскоростной двухтемпературной газодинамики смесей [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i u_i}{\partial x} &= 0, & \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_i u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial p_i}{\partial x} &= K(u_j - u_i), \\ \rho_i \frac{\partial e_i}{\partial t} + \rho_i u_i \frac{\partial e_i}{\partial x} + p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} &= K\beta_{ij}(u_j - u_i)^2 + q(T_j - T_i), \\ p_i &= kn_i T_i, & e_i &= c_{iv} T_i, & \rho_i &= m_i n_i, & i, j &= 1, 2, & i \neq j. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ_i , u_i , e_i , p_i , T_i , m_i — плотность, скорость, внутренняя энергия, давление, температура и масса молекулы i -го вида; k — постоянная Больцмана; $K = 16\rho_1\rho_2\Omega_{12}^{(1,1)}/(3(m_1+m_2))$; $\Omega_{12}^{(1,1)}$ — интеграл столкновений; $\beta_{ij} = m_i T_i / (m_i T_i + m_j T_j)$; $q = 3m_1 K / (m_1 + m_2)$; $c_{iv} = k / (m_i(\gamma_i - 1))$; γ_i — показатель адиабаты. Для потенциала взаимодействия твердых сфер имеем соотношение

$$K = \frac{16}{3} \frac{\rho_1 \rho_2}{m_1 m_2} \sqrt{\frac{k\pi}{2}} \sqrt{\frac{T_1}{m_1} + \frac{T_2}{m_2}} \delta_{12}^2, \quad \delta_{12} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$$

(δ_i — диаметр молекулы i -го газа).

При малых (или нулевых) значениях концентраций j -го газа будем использовать уравнения Эйлера для чистого i -го газа, а параметры другого газа будем определять из соотношений $\frac{\partial n_j}{\partial t} + \frac{\partial n_j u_j}{\partial x} = 0$, $u_j = u_i$, $T_j = T_i$. Переход к тяжелому газу осуществляется, если значение молярной концентрации легкого газа $x_j = n_j / (n_i + n_j) < 1\%$, и к легкому, если массовая концентрация тяжелого газа $\alpha_j = \rho_j / (\rho_i + \rho_j) < 1\%$.

Формирование области смещения. Остановимся сначала на описании первоначальной области смещения. В экспериментальных работах [4–6] для ее создания в ударной трубе использовалась быстро удаляемая пластина, разделяющая канал на две части. Как показано в [5], основным процессом, определяющим перемешивание, является молекулярная диффузия, что делает актуальным получение на основе (1) асимптотического решения для описания начальной области перемешивания.

Пусть в начальный момент в канале, разделенном перегородкой, находятся два покоящихся газа при одинаковом давлении. После удаления перегородки происходит диффузионное перемешивание газов.

Предположим, что $K \gg 1$, т. е. время релаксации скоростей и температур мало. Введем средние молярные скорости и температуры $u = x_1 u_1 + x_2 u_2$, $T = x_1 T_1 + x_2 T_2$ и относительные скорости и температуры $v = u_2 - u_1$, $\tau = T_2 - T_1$. Перейдем в (1) к этим переменным. Из (1) следует, что v и T порядка $1/K$. Оставляя в полученных уравнениях величины первого и второго порядка малости, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nu}{\partial x} = 0, \quad n \frac{\partial x_1}{\partial t} + nu \frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Dn \left(\frac{x_1 x_2 (m_2 - m_1)}{m_1 x_1 + m_2 x_2} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial x} \right) \right),$$

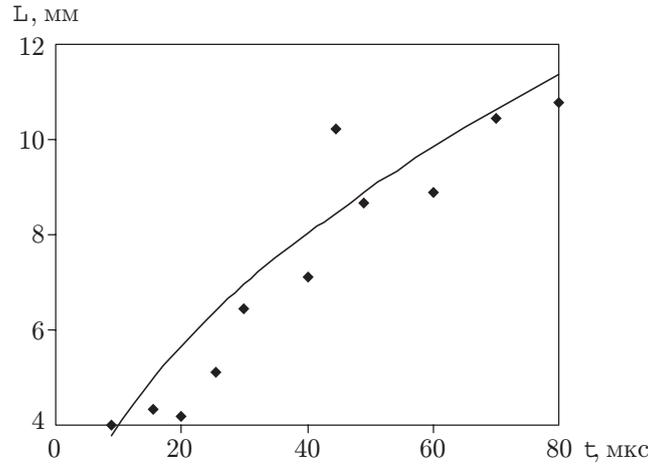


Рис. 1

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v u \frac{\partial T}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$D = x_1 x_2 p / K, \quad n = n_1 + n_2, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2, \quad c_v = \alpha_1 c_{1v} + \alpha_2 c_{2v}, \quad p = knT.$$

Здесь D — коэффициент бинарной диффузии.

Данная система уравнений имеет точное решение

$$u = 0, \quad T = \text{const}, \quad n = \text{const},$$

$$x_1 = \frac{1 - \Phi(\eta)}{2}, \quad \Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du, \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}, \quad (2)$$

удовлетворяющее начальному распределению молярной концентрации: $x_1 = 1$ при $x < 0$ и $x_1 = 0$ при $x > 0$. Полученное решение описывает процесс диффузионного перемешивания двух газов.

Следуя [10], ширину зоны смешения введем через молярную концентрацию в виде

$$L = 2 \int_{-\infty}^{x_0(t)} \frac{x_2 - x_2^0}{x_2(x_0(t)) - x_2^0} dx + 2 \int_{x_0(t)}^{+\infty} \frac{x_1 - x_1^1}{x_1(x_0(t)) - x_1^1} dx,$$

где x_i^0 , x_i^1 — молярная концентрация i -го газа по разные стороны области смешения; $x_0(t)$ — середина области смешения, т. е. точка, в которой $x_1 = x_2 = (x_1^0 + x_1^1)/2$. Данное определение ширины области смешения приведено для общего случая, когда в начальный момент по обе стороны от перегородки находилась смесь с различными значениями концентраций.

Для решения (2) найдем ширину зоны смешения

$$L(t) = 4 \left(\int_{-\infty}^0 (1 - x_1) dx + \int_0^{+\infty} x_1 dx \right). \quad (3)$$

На рис. 1 приведены расчетная (сплошная линия) и экспериментальная [5] (точки) зависимости диффузионной ширины слоя смешения в смеси аргона и гелия от времени. Видно, что формулы (2), (3) удовлетворительно описывают экспериментальные данные.

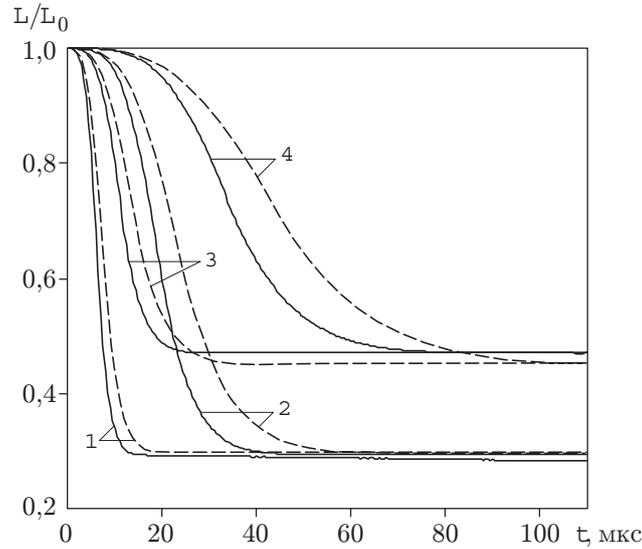


Рис. 2

Результаты расчетов данной задачи по полной модели хорошо согласуются с асимптотическим решением (2), что позволяет рассчитать взаимодействие слоя смеси с ударной волной, взяв в качестве начального распределения параметров в слое это асимптотическое решение.

Метод расчета. В качестве метода расчета для пространственной аппроксимации системы (1) используется метод расщепления вектора потоков, предложенный в [11]. Для сохранения свойства монотонности решения в областях больших градиентов порядок аппроксимации понижается ограничителем `minmod`, используемым при построении TVD-схем [12]. При этом применялась неявная аппроксимация правых частей системы (1), предложенная в [9], что позволило не усиливать ограничение на временной шаг, налагаемое условием Куранта.

Взаимодействие диффузионного слоя с ударной волной. На основе изложенного выше рассмотрим прохождение ударной волны через слой, образовавшийся за счет молекулярной диффузии. В начальный момент времени распределение концентрации описывается формулами (2). Фактически слой смешения расположен в области $-L_0/2 < x < L_0/2$, где L_0 — начальная ширина слоя (газ 1 находится слева, газ 2 — справа). Справа на слой падает ударная волна, которая в момент $t = 0$ находится в точке, где концентрация газа 1 равна 1 %. Параметры за фронтом ударной волны определяются из соотношений Ренкина — Гюгоню для газа 2. Перед фронтом давление равно 0,5 атм.

Переход ударной волны из легкого газа в тяжелый. Известно, что при переходе ударной волны из легкого газа в тяжелый через контактный разрыв наблюдаются преломленная и отраженная ударные волны. Аналогичная картина имеет место при прохождении ударной волны через область смешения. Однако наличие переходной области приводит к некоторым особенностям волновой картины течения.

Прохождение ударной волны из гелия в аргон характеризуется следующими значениями параметров: отношение масс молекул $m_1/m_2 = 10$, $\delta_2/\delta_1 = 2,19/3,66$, число Атвуда $A = (\rho_h - \rho_l)/(\rho_h + \rho_l) = 0,82$ (ρ_h, ρ_l — плотность тяжелого и легкого газа в начальный момент), а из гелия в ксенон — значениями $m_1/m_2 = 32,8$, $A = 0,94$, $\delta_2/\delta_1 = 2,19/4,94$. Для рассматриваемых одноатомных газов полагалось $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$.

На рис. 2 приведены зависимости относительной ширины диффузионной области L/L_0 от времени (сплошные линии — смесь гелия и аргона, штриховые — смесь гелия и ксенона;

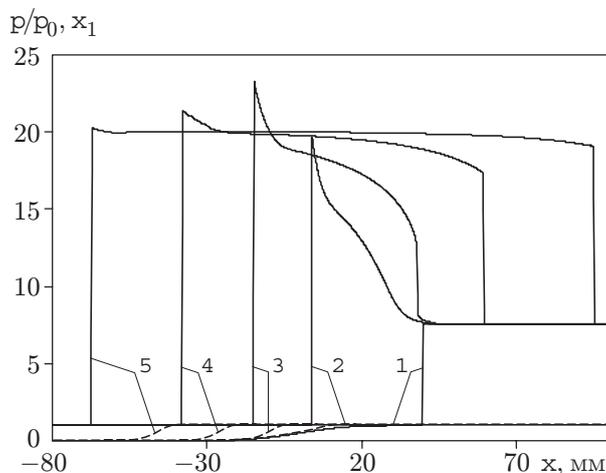


Рис. 3

1 — $M = 2,5$, $L_0 = 13$ мм; 2 — $M = 2,5$, $L_0 = 40$ мм; 3 — $M = 1,5$, $L_0 = 13$ мм; 4 — $M = 1,5$, $L_0 = 40$ мм). Видно, что сжатие слоя определяется в основном числом Маха и слабо зависит от отношения масс молекул и начальной ширины слоя. При изменении числа Маха от 1,5 до 2,5 толщина слоя уменьшается в 2,1–3,5 раза. Увеличение начальной ширины слоя влияет на время сжатия, что обусловлено большим временем прохождения ударной волны через слой. Приведенные данные согласуются с результатами экспериментов [5], в которых также отмечалось уменьшение толщины слоя в 2–2,5 раза при числе Маха $M = 2,5$.

На рис. 3 сплошными линиями показано распределение давления в различные моменты времени для падающей из гелия в ксенон ударной волны при $M = 2,5$, $L_0 = 40$ мм (1 — $t = 0$, 2 — $t = 20$ мкс, 3 — $t = 40$ мкс, 4 — $t = 70$ мкс, 5 — $t = 110$ мкс).

По мере прохождения ударной волны через слой ее интенсивность возрастает, и на выходе из слоя давление превышает значение, соответствующее ступенчатому в начальный момент времени изменению плотности. Максимальное различие этих значений, зависящее от отношения масс молекул, составляет, например, 12 % для смеси гелия и ксенона и 6 % для смеси гелия и аргона при $M = 2,5$. По мере распространения ударной волны по легкому газу давление убывает и его профиль асимптотически переходит в соответствующий решению задачи о взаимодействии ударной волны с контактным разрывом. Аналогичный эффект отмечен в работе [5], где экспериментальные значения скорости преломленной ударной волны вблизи слоя на 10 % превышали расчетные, полученные в предположении разрывного изменения плотности. При прохождении ударной волны через слой смешения за ней формируется также отраженная волна сжатия, распространяющаяся в легкий газ, опрокидывание которой происходит вне слоя смешения. На рис. 3 приведены также профили молярной концентрации гелия (штриховые линии), характеризующие положение слоя смешения в различные моменты времени.

Переход ударной волны из тяжелого газа в легкий. При переходе ударной волны из тяжелого газа в легкий через контактный разрыв наблюдаются преломленная ударная волна и волна разрежения.

Исследовалось прохождение ударной волны из ксенона в гелий ($m_2/m_1 = 32,8$, $A = 0,94$) и из ксенона в аргон ($m_2/m_1 = 3,28$, $A = 0,53$). На рис. 4 показаны зависимости относительной ширины области смешения от времени при $M = 2,5$ (сплошные линии — смесь ксенона и гелия, штриховые — смесь ксенона и аргона; 1 — $L_0 = 13$ мм, 2 — $L_0 = 40$ мм). Видно, что величина сжатия зависит от отношения масс молекул (числа Атвуда). При

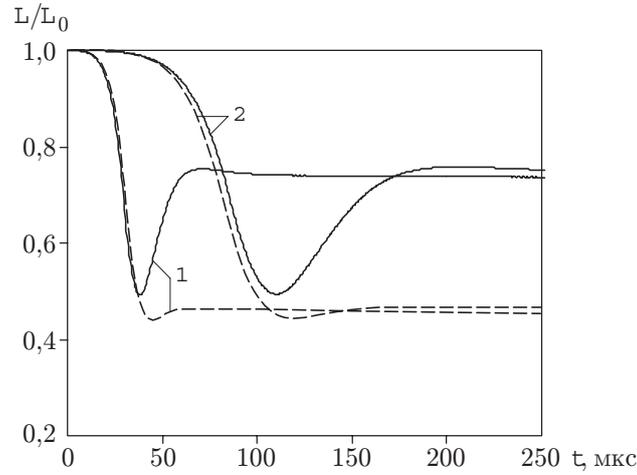


Рис. 4

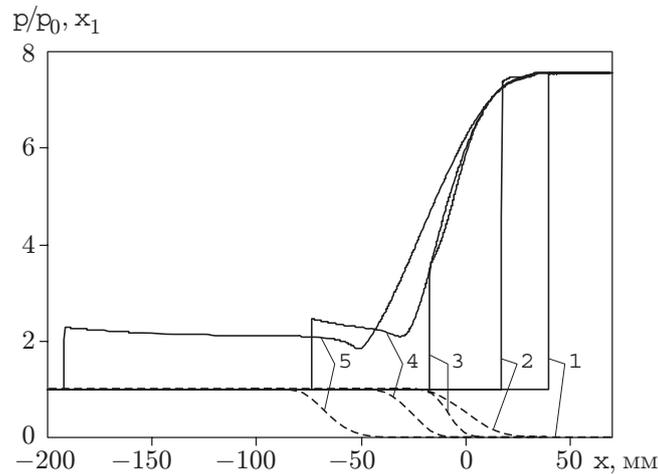


Рис. 5

больших значениях A слой после прохождения ударной волны оказывается сильносжатым и происходит его расширение, так что в итоге слой сжимается приблизительно в 1,5 раза. При уменьшении отношения масс молекул эффект расширения после сжатия исчезает. Начальная ширина слоя, как и в случае, когда ударная волна проходила из легкого газа в тяжелый, влияет только на время сжатия. Аналогичный характер изменения толщины области смешения наблюдается и при других числах Маха.

На рис. 5 приведены профили общего давления (сплошные линии) и молярной концентрации (штриховые линии) легкого газа при $M = 2,5$, $L_0 = 40$ мм в различные моменты времени в случае, когда ударная волна распространяется из гелия в ксенон (1 — $t = 0$, 2 — $t = 50$ мкс, 3 — $t = 110$ мкс, 4 — $t = 150$ мкс, 5 — $t = 230$ мкс). Видно, что по мере продвижения ударной волны по слою ее интенсивность уменьшается. Однако на выходе из слоя ($t = 110$ мкс) давление за прошедшей ударной волной существенно выше, чем в задаче о распаде произвольного разрыва. Слой смешения оказывается пересжатым, и происходит его расширение, в результате чего вправо распространяется волна сжатия, которая взаимодействует с волной разрежения, движущейся по тяжелому газу. По мере продвижения преломленной волны по легкому газу давление за ней уменьшается, стремясь к значению, соответствующему решению задачи о взаимодействии ударной волны с

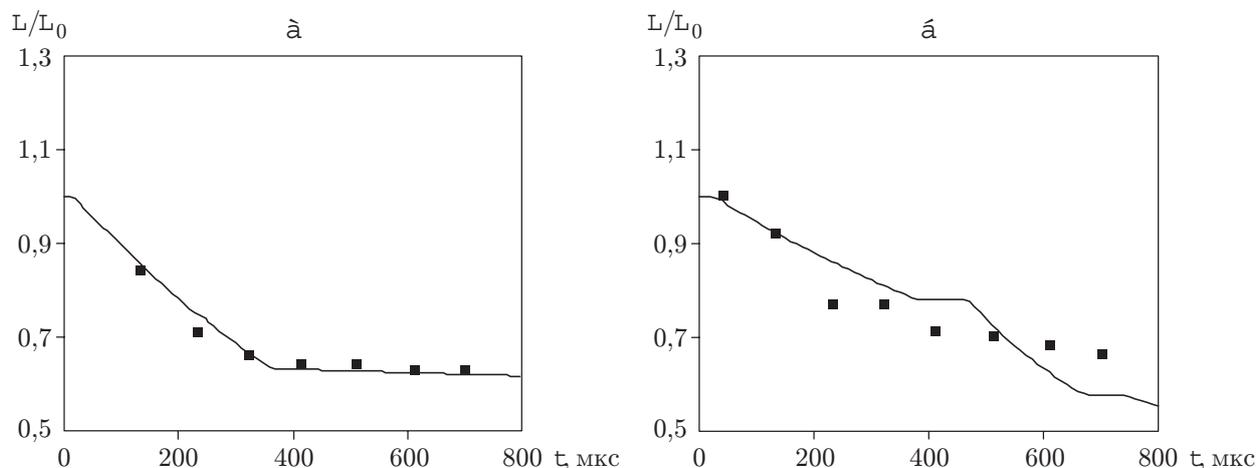


Рис. 6

контактным разрывом между тяжелым и легким газами. Аналогичные результаты получаются при других числах Маха и значениях начальной ширины области смешения.

Взаимодействие слоя с волной сжатия. В работе [6] экспериментально исследовалась неустойчивость Рэлея — Тейлора, развивающаяся в переходном слое. Постоянно действующее ускорение сообщалось области контакта с помощью волны сжатия, образующейся перед фронтом пламени. В расчетах волна сжатия моделировалась центрированной волной сжатия с параметрами, которые сообщали слою ускорение порядка $10^5 g$ (g — ускорение свободного падения). Ширина волны выбиралась таким образом, чтобы не успевало происходить ее опрокидывание. В расчетах, как и в экспериментах, в качестве газа 2 использовалась кислородно-водородная смесь (молекулярная масса 18,5, $\gamma_2 = 1,4$, $\delta_2/\delta_{\text{He}} = 4,00/2,19$). На рис. 6,а приведены расчетная (сплошная линия) и экспериментальная (точки) зависимости относительной ширины области диффузионного перемешивания от времени при переходе волны сжатия из кислородно-водородной смеси в аргон (из легкого газа в тяжелый). Видно, что результаты расчета согласуются с данными эксперимента. В данном случае наблюдаются волна сжатия, идущая в тяжелый газ, и отраженная волна сжатия, выходящая из слоя смешения и распространяющаяся вправо по легкому газу.

На рис. 6,б аналогичные зависимости приведены для случая, когда волна сжатия переходит из кислородно-водородной смеси в гелий (из тяжелого газа в легкий). В расчетах, в отличие от эксперимента, за проходящей ударной волной имеет место более медленное сжатие слоя, а за отраженной от торца ударной волной — более сильное. Эти различия, по-видимому, связаны с тем, что в вертикальной ударной трубе тяжелый газ располагался над легким, т. е. слой смешения находился в неустойчивом положении, в результате чего развивались двумерные возмущения, не учитываемые в расчетах. В данном случае наблюдались волна сжатия, распространяющаяся по легкому газу, и волна разрежения, выходящая из слоя и движущаяся по тяжелому газу. В отличие от аналогичной задачи о взаимодействии ударной волны со слоем смешения не обнаружено расширения слоя после прохождения падающей волны сжатия через этот слой.

Выводы. В работе предложена математическая модель двухскоростной двухтемпературной смеси газов для описания процессов, протекающих при взаимодействии ударных волн и волн сжатия с областью смешения двух газов.

В рамках упрощенной математической модели построено решение, описывающее формирование диффузионного слоя смешения. В общем случае для полной модели смеси численно решена задача о взаимодействии этого слоя с ударными волнами и волнами сжатия в одномерном нестационарном течении.

Проведен анализ возникающих волновых картин течения при переходе ударной волны как из легкого газа в тяжелый, так и из тяжелого в легкий. Обнаружено, что при прохождении ударной волны из тяжелого газа в легкий слой смешения оказывается пересжатым, что приводит к его расширению после сжатия за фронтом преломленной ударной волны.

Получено удовлетворительное согласие расчетных данных с результатами измерений ширины слоя смешения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamics and hydromagnetic stability. Oxford: Oxford Univ., 1961. P. 428–436.
2. **Chakraborty B. B.** Rayleigh — Taylor instability of heavy fluid // Phys. Fluids. 1975. V. 18, N 8. P. 1066, 1067.
3. **Duff R. E., Harlow F. H., Hirt C. W.** Effects of diffusion on interface instability between gases // Phys. Fluids. 1962. V. 5, N 4. P. 417–425.
4. **Brouillette M., Sturtevant B.** Experiments on the Richtmyer — Meshkov instability: single-scale perturbations on a continuous interface // J. Fluid Mech. 1994. V. 263. P. 271–292.
5. **Зайцев С. Г., Титов С. Н., Чеботарева Е. И.** Эволюция переходного слоя, разделяющего разноплотные газы, при прохождении через него ударной волны // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 2. С. 18–26.
6. **Зайцев С. Г., Лебо И. Г., Розанов В. Б. и др.** Гидродинамическая неустойчивость контакта газовых сред, движущихся ускоренно // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1991. № 6. С. 15–21.
7. **Куропатенко В. Ф.** Неустановившиеся течения многокомпонентных сред // Численные методы решения задач фильтрации. Динамика многофазных сред. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1989. С. 128–155.
8. **Youngs D. L.** Numerical simulation of turbulent mixing by Rauleigh — Taylor instability // Phys. D. 1984. V. 12. P. 32–44.
9. **Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П. и др.** Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1992.
10. **Неуважаев В. Е.** Развитие турбулентного перемешивания, вызванного неустойчивостью Рихтмайера — Мешкова (РМ) // Мат. моделирование. 1991. Т. 3, № 7. С. 10–28.
11. **Anderson W. K., Thomas J. L., Van Leer B.** Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations // AIAA J. 1986. V. 24, N 9. P. 1453–1460.
12. **Chakravathy S. R., Osher S. A.** A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws. N. Y., 1985. (Paper / AIAA; N 85-0363).

Поступила в редакцию 30/VI 2003 г.