УДК 539.3

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Б. Д. Аннин, Ю. М. Волчков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: annin@hydro.nsc.ru, volk@hydro.nsc.ru

Приводится обзор работ, посвященных исследованию методов сведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной — теории пластин и оболочек. Рассматривается два подхода: использование кинематических и силовых гипотез и разложение решений трехмерной теории упругости по полной системе функций. Дается обзор работ, в которых редукция трехмерной задачи к двумерной осуществляется с использованием нескольких аппроксимаций каждой искомой функции (напряжений и перемещений) отрезками полиномов Лежандра.

Ключевые слова: уравнения теории оболочек, слоистые и композитные оболочки, контактные задачи, полиномы Лежандра.

DOI: 10.15372/PMTF20160501

Введение. Тонкостенные элементы конструкций типа стержней, пластин и оболочек применяются в различных областях техники, поэтому определение напряженно-деформированного состояния таких элементов имеет большое прикладное значение. Многие задачи статики, колебаний и устойчивости тонкостенных конструкций были решены еще до создания математической теории упругости (см. работу [1] и библиографию к ней).

Пластины и оболочки представляют собой трехмерные тела, один из размеров которых много меньше двух других, что позволяет рассматривать их как двумерные тела, обладающие тем не менее значительной несущей способностью. Решение краевых задач для пластин и оболочек на основе трехмерных уравнений теории упругости представляет значительные трудности, поэтому для расчета такого рода конструкций строятся двумерные модели, учитывающие специфику (особенности) их геометрии и напряженно-деформированного состояния. Построение таких моделей и разработка методов решения соответствующих краевых задач составляют содержание самостоятельного раздела механики твердого деформируемого тела — теории пластин и оболочек.

Существуют различные методы редукции трехмерной задачи теории упругости к двумерной. Редукция трехмерной задачи к двумерной позволяет не только существенно упростить математическую задачу, уменьшая число независимых переменных на единицу, но и учесть особенности распределения напряжений и деформаций в тонких телах — пластинах и оболочках.

При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной задаче (теории пластин и оболочек) модели строятся либо на основе кинематических и силовых гипотез, либо с использованием разложений решений трехмерной теории упругости по некоторой полной системе функций.

Классическая теория пластин и оболочек. Классические теории стержней основаны на гипотезе плоских сечений, теории пластин — на гипотезах Кирхгофа, теории оболочек — на гипотезах Кирхгофа — Лява. Впервые подход к построению теории пластин и оболочек, основанный на кинематических и силовых гипотезах, предложен в работах Г. Кирхгофа [2] и развит в работах А. Лява [1]. Теория пластин и оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа — Лява, известна как классическая теория тонких пластин и оболочек. В классических теориях используются линейные аппроксимации перемещений по поперечной координате и не учитываются упругие поперечные взаимодействия волокон. Большой вклад в развитие классической теории тонких оболочек, разработку методов решения соответствующих начально-краевых задач и решение прикладных задач внесли советские ученые [3–9].

Классические модели теории пластин и оболочек относятся к так называемым жестким моделям, решения, полученные на их основе, содержат ряд противоречий и в некоторых случаях приводят к физически не обоснованным выводам. Например, уравнения классической теории не являются гиперболическими, и в решениях, полученных на их основе, возмущения распространяются с бесконечной скоростью. При решении контактных задач (задач об определении напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, задач об определении напряженно-деформированного состояния многослойных конструкций, задач о взаимодействии оболочек с другими телами) с использованием классических теорий обнаруживается ряд противоречий. В частности, известно, что применение теории Кирхгофа — Лява приводит к возникновению сосредоточенных сил на границе контакта даже в случае контакта с гладкими штампами [10].

Сдвиговые модели оболочек типа модели Тимошенко. Одним из подходов, используемых для уточнения классической теории оболочек, является построение моделей, менее “жестких”, чем классические модели. Модель оболочки, в которой учитывается поперечный сдвиг, впервые была предложена С. П. Тимошенко [11–13] и позднее — Э. Рейсснером [14]. При решении задач об изгибе двутавровой балки [11] и о колебаниях призматического бруса [12] С. П. Тимошенко отказался от гипотезы о “неизменности” нормали к срединной поверхности. Уравнения Тимошенко построены в предположении, что нормальный к недеформированной срединной поверхности элемент оболочки не остается нормальным к деформированной срединной поверхности, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя свою длину (модель прямой нормали). Модель Тимошенко учитывает поперечный сдвиг, дифференциальное уравнение в этой модели для нестационарных задач является гиперболическим.

Появление новых материалов, в том числе композиционных, и слоистых конструкций вызвало интенсивное развитие сдвиговых моделей пластин и оболочек, учитывающих не только поперечный сдвиг, но и обжатие (поперечные деформации). Композиционные материалы имеют неоднородную (слоистую, волокнистую, сетчатую и т. п.) структуру и как следствие являются анизотропными. Построению теории анизотропных оболочек посвящена монография [15]. В [16] построены различные варианты многослойных оболочек. При исследовании напряженно-деформированного состояния композитных и слоистых оболочек необходимо использовать модели, позволяющие определять контактные напряжения на границе раздела сред. Учет деформаций поперечного сдвига и обжатия оказывается существенным при исследовании концентрации напряжений.

Можно выделить два основных подхода к построению уравнений слоистых пластин и оболочек из композиционных материалов. Достаточно широко распространены варианты, которые строятся на базе гипотез, принимаемых для пакета в целом, или на основе осредненных характеристик жесткости. Другой подход, называемый структурным, позволяет учесть работу и взаимодействие отдельных фаз конструкций из композиционных материалов (армирующих волокон, заполнителя, отдельных слоев). В работах [17, 18] изложены методы определения механических и прочностных характеристик композитов с периодической структурой на основе метода осреднения, а также методы решения обратных задач определения структуры слоистых и композитных материалов с заданными механическими и прочностными свойствами.

Первые работы, посвященные исследованию напряженно-деформированного состояния слоистых пластин и оболочек, появились в конце 40-х — начале 50-х гг. XX в. и были основаны либо на гипотезах Кирхгофа — Лява, либо на гипотезах прямой линии, принимаемых для многослойного пакета в целом. Как правило, получить удовлетворительные результаты с использованием таких теорий можно только в том случае, если свойства слоев различаются незначительно. Если свойства слоев различаются существенно, необходим более тщательный учет поперечных сдвигов и обжатия (поперечных деформаций) в каждом слое.

Большой вклад в развитие моделей и методов решения задач о напряженном состоянии слоистых пластин и оболочек внесли Э. И. Григолюк и его ученики [19–23].

Как правило, геометрия слоев многослойных пластин и оболочек, используемых в различных конструкциях, их свойства и область применения известны, что в некоторой степени упрощает выбор кинематических гипотез. Например, широко распространенным типом слоистых оболочек, используемых в различных конструкциях, являются трехслойные оболочки, состоящие из двух тонких несущих внешних слоев и внутреннего слоя — заполнителя. Свойства и области применения этих слоев существенно различаются, поэтому для таких оболочек можно построить модели, используя различные гипотезы для несущих слоев и заполнителя. В работах [19, 20] получены уравнения трехслойных оболочек с двумя несущими слоями и заполнителем, решены задачи устойчивости и колебаний таких оболочек, в [21] построены нелинейные уравнения многослойных армированных оболочек и разработаны численные алгоритмы решения краевых задач.

Как отмечено выше, при решении контактных задач с использованием классических уравнений теории оболочек на границах зоны контакта появляются сосредоточенные силы. Основной причиной возникновения этих сил является невозможность удовлетворить в рамках классических теорий всем краевым условиям на лицевых поверхностях пластин или оболочек и условиям сопряжения на границах контакта. Использование моделей, учитывающих влияние поперечного сдвига и обжатия, позволяет частично устранить парадоксы, возникающие при описании напряженного состояния. В монографии [22] решаются задачи определения напряженно-деформированного состояния в пластинах и оболочках, подкрепленных жесткими и упругими ребрами, а также во взаимодействующих оболочках. Задачи определения напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек, подкрепленных ребрами, являются контактными. При решении таких задач с использованием теории Кирхгофа на границах зоны контакта появляются сосредоточенные силы [10]. Учет поперечного сдвига и поперечного обжатия позволяет получить решения, в которых отсутствуют сосредоточенные силы на границах зоны контакта. Результат решения двумерных контактных задач в значительной мере зависит от принятых математических моделей напряженно-деформированного состояния.

Для решения некоторых задач желательно применять модель, позволяющую при необходимости использовать как линейную, так и нелинейную аппроксимацию продольных и поперечных смещений по толщине слоя. Одна из таких моделей построена в работах [24, 25].

В работе [26] получены дифференциальные уравнения устойчивости и колебаний однослойных, трехслойных и слоистых оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, и разработаны аналитические методы решения соответствующих контактных задач.

В монографии [27] обсуждаются различные кинематические гипотезы, принимаемые при построении уравнений многослойных пластин и оболочек, а также возможность использования тех или иных гипотез при решении задач устойчивости многослойных пластин и оболочек в зависимости от их конструктивных особенностей. Основное внимание уделяется решению задач устойчивости трехслойных пластин и оболочек.

Модели оболочек, построенные на основе разложений решений трехмерной задачи упругости по полной системе функций. Одним из способов редукции трехмерной задачи к двумерной является представление решений трехмерной задачи теории упругости в виде рядов по некоторой полной системе функций. Первыми работами, в которых этот способ был применен для получения уравнений теории пластин и оболочек, являются работы А. Коши [28, 29] и С. Пуассона [30], в которых использовались степенные функции. Вследствие громоздкости и недостаточной физической наглядности эти уравнения не нашли широкого применения.

Поскольку в качестве области изменения одной из пространственных координат, определяющих положение точки внутри пластины и оболочки, можно выбрать отрезок $[-1, 1]$, при редукции трехмерной задачи к двумерной естественно использовать полиномы Лежандра, образующие ортогональную систему функций на отрезке $[-1, 1]$. По-видимому, впервые полиномы Лежандра использовал И. Н. Векуа. Метод редукции трехмерной задачи к двумерной он изложил в лекциях по спецкурсу “Математическая теория оболочек”, прочитанных в Новосибирском государственном университете в 1961 г. [31]. Для нахождения компонент тензоров напряжений и смещений используются разложения по полиномам Лежандра относительно координаты x^3 — расстояния от точки оболочки до ее срединной поверхности [32]. Коэффициенты этих разложений называются моментами соответствующих величин, номер коэффициента в разложении — порядком этой величины. Для моментов тензоров напряжений и перемещений из уравнений теории упругости выводится система дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно функций с двумя независимыми переменными. Для получения приближенных решений задач теории оболочек И. Н. Векуа ограничился конечными отрезками рядов. Для фиксированного неотрицательного числа N рассматриваются отрезки рядов для компонент тензора напряжений и перемещений, содержащих $N + 1$ слагаемых. С использованием закона Гука получается система уравнений для моментов вектора смещения. Следующее ограничение на длину отрезков рядов накладывается при удовлетворении краевым условиям на лицевых поверхностях оболочки. Конечная система уравнений, полученная при сохранении в рядах для компонент тензора напряжений $N + 1$ слагаемых, называется приближением порядка N, так как соответствующие приближения являются полиномами степени N относительно координаты x^3. В [32] построены различные варианты теории оболочек с учетом различия их геометрии и вида напряженно-деформированного состояния.

Полиномы Лежандра для построения теории оболочек используются также в работах [33, 34].

В [35] разработан метод построения специальных ортонормированных полиномов для приближенного решения краевых задач изгиба анизотропных, ортотропных (как гладких, так и подкрепленных) пластин. В [36] на основе разработанного автором метода параметризации областей однослойных и многослойных тел ортогональные полиномы Лежандра и Чебышева использованы для построения ряда вариантов теории упругих микрополярных тонких тел.

Математические задачи построения теории пластин и оболочек исследуются в [37, 38].

Модели пластин и оболочек, построенные с использованием нескольких аппроксимаций искомых функций отрезками рядов полиномов Лежандра. Одной из основных задач, решаемых при редукции трехмерной задачи к двумерной с использованием аппроксимаций напряжений и перемещений рядами функций, является процедура их усечения при построении конечного приближения. При этом необходимо выполнить два основных требования: разрешающие уравнения должны быть достаточно простыми и должны допускать корректную формулировку контактных условий на лицевых поверхностях оболочки и краевых условий на ее торцах.

В Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН развит метод построения теории оболочек и пластин, основанный на использовании нескольких аппроксимаций каждой искомой функции (напряжений и смещений) конечными отрезками рядов полиномов Лежандра.

Г. В. Иванов предложил метод решения плоской смешанной задачи теории упругости с использованием разложений искомых функций по полиномам Лежандра [39]. При этом для каждой искомой функции используется несколько аппроксимаций. Одновременная аппроксимация смещений и напряжений, как правило, приводит к смешанным вариационным постановкам задач, в которых утрачивается свойство минимальности действительного поля перемещений. При использовании нескольких аппроксимаций смещений и напряжений, предложенных в [39], указанное свойство сохраняется. Это позволяет построить положительно-определенный квадратичный функционал и сходящийся итерационный алгоритм численного решения плоских задач теории упругости с использованием конечного элемента. В [40–43] предложенный в [39] метод применяется для построения уравнений теории пластин и оболочек.

В [40, 43] построены уравнения теории оболочек порядка N в ортогональной криволинейной системе координат. В любом приближении порядок построенной системы дифференциальных уравнений не зависит от того, задаются ли на лицевых поверхностях оболочки напряжения, смещения или их линейная комбинация, что обеспечивает корректную формулировку контактных условий на этих поверхностях как в перемещениях, так и в напряжениях. Естественно, что с увеличением порядка аппроксимации N увеличивается порядок системы дифференциальных уравнений и использование их для решения конкретных задач становится практически невозможным. Повышать порядок аппроксимации решений можно, либо увеличивая число членов в разложениях для напряжений и перемещений, либо моделируя оболочку многослойной оболочкой, используя при этом в каждом слое уравнения первого приближения и условия сопряжения между слоями. Второй подход при решении конкретных задач оказывается более эффективным. Ниже приводится обзор работ, в которых решения задач о напряженно-деформированном состоянии однородных и слоистых пластин и оболочек решены с использованием уравнений в первом приближении.

Уравнения оболочек в первом приближении являются дифференциальными уравнениями в частных производных 10-го порядка. При $N = 1$ искомыми функциями в дифференциальных уравнениях являются используемые в теории оболочек усилия, моменты и соответствующие им перемещения и углы поворотов поперечных сечений, осредненные по толщине оболочки. В случае цилиндрического изгиба пластин или осесимметричного деформирования оболочки система уравнений в первом приближении является системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка с переменными коэффициентами для неоднородных пластин и с постоянными коэффициентами для однородных. Коэффициенты этой системы зависят от вида условий, заданных на лицевых поверхностях пластины или оболочки. В работе [42] для задачи о цилиндрическом изгибе изотропных пластин вычислены корни характеристических полиномов дифференциальных уравнений при различных условиях на лицевых поверхностях пластины и построены аналитические решения ряда краевых задач.

В слоистых пластинах и оболочках на границах между слоями вблизи свободных поверхностей возникают большие градиенты напряжений (межслойные эффекты), вследствие чего при наличии слоев с существенно различными механическими свойствами появляются разрывы и расслоения. Межслойные эффекты не описываются классическими уравнениями теории пластин и оболочек или моделями слоистых пластин, в которых не учитываются продольные напряжения в "мягких" слоях. В работе [44] изучено напряженное состояние в тонкой упругой прослойке, заключенной между жесткими плитами, при ее растяжении и сдвиге в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния.

С использованием уравнений пластин в первом приближении был решен ряд контактных задач [41, 45]. В [46] решена задача об отрыве упругой балки, приклеенной к жесткой плите, получены зависимости прогиба торца балки от длины зоны отслоения, проведено сравнение результатов численных расчетов и экспериментальных данных. В эксперименте балки из оргстекла, стеклопластика и дюралюминия приклеивались эпоксидной смолой к жесткой плите из прозрачного оргстекла, что позволяло с достаточной точностью определить длину зоны отслоения. Сравнение результатов численных расчетов и экспериментальных данных позволило сделать вывод, что математическая модель адекватно описывает напряженное состояние в области контакта и позволяет определить длину зоны отслоения.

Система дифференциальных уравнений пластин и оболочек в первом приближении представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных 10-го порядка, и решения краевых задач для этих уравнений можно получить лишь численными методами. Коэффициенты разложений и, следовательно, коэффициенты дифференциальных уравнений являются функциями координат α_1 и α_2, определяющих положение точки на срединной поверхности. Заменяя эти функции в единичном квадрате $\{-1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1, -1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1\}$ отрезками полиномов Лежандра по переменным α_1 и α_2, можно построить прямоугольные конечные "моментные" элементы, для которых условия сопряжения формулируются на их гранях [47]. Конечные элементы такого типа называются компактными. При решении задач с сингулярными особенностями в напряженных состояниях использование конечных элементов, условия сопряжения которых формулируются в виде условий непрерывности усилий и моментов на их гранях, оказывается более эффективным, чем использование традиционных конечных элементов. Такие элементы являются естественными регуляризаторами в задачах с особенностями. В работе [48] предложен итерационный алгоритм решения плоских задач теории упругости с использованием таких элементов и решена задача о растяжении плоскости с трещиной. Из результатов сравнения численного и аналитического решений [49] следует, что уравнения упругого слоя в первом приближении могут быть использованы при решении задач с особенностями в напряженном состоянии.

При построении уравнений пластин и оболочек несколько аппроксимаций каждой искомой функции (напряжений и смещений) используются для получения приближенных уравнений равновесия и соотношений между деформациями и перемещениями. Напряжения внутри оболочки определяются из осредненных по ее толщине определяющих соотношений. Это позволяет достаточно легко обобщить метод для вывода уравнений анизотропных пластин и оболочек.

В работе [50] с использованием нескольких аппроксимаций получены уравнения цилиндрического изгиба анизотропных пластин, в работе [51] — уравнения изгиба ортотропной балки.

Основное преимущество уравнений пластин и оболочек, построенных в указанных выше работах, заключается в том, что они допускают постановку условий на лицевых поверхностях как в смещениях, так и в напряжениях, при этом порядок системы дифференциальных уравнений не меняется. Это позволяет построить уравнения слоистых пластин. Для каждого слоя оболочки используется система уравнений в первом приближении, на границах между слоями ставятся условия сопряжения — условия непрерывности нормальных напряжений и смещений [52]. Например, для трехслойной пластины получается система дифференциальных уравнений 18-го порядка. Коэффициенты уравнений для каждого слоя различаются, так как различаются условия на лицевых поверхностях слоев.

В [53] решены задачи определения напряженно-деформированного состояния одно-, двух- и трехслойных ортотропных пластин и проведено сравнение полученных численных решений с аналитическими решениями задач о цилиндрическом изгибе многослойных балок, состоящих из ортотропных слоев, находящихся под действием распределенной синусоидальной нагрузки $q(x) = q_0 \sin(\pi x/l)$, где q_0 — интенсивность нагрузки; l — длина балки [54–56]. Проведено сравнение численных и аналитических решений при различных значениях параметра h/l (h — толщина балки; l — ее длина). Различие максимальных напряжений не превышает 3 %.

В работе [57] с использованием нескольких аппроксимаций напряжений и смещений отрезками рядов полиномов Лежандра построены уравнения пластин переменной толщины.

В работе [58] построены уравнения плоской задачи для упругого слоистого тела, слои которого ограничены эквидистантными (равноудаленными) выпуклыми кривыми. Введена ортогональная криволинейная индуцированная опорным контуром система координат, одним семейством координатных линий которой являются кривые, равноудаленные от этого контура, а другим — семейство прямых линий, ортогональных контуру. Решена задача об упругом деформировании бесконечной слоистой трубы с внутренней поверхностью эллиптической формы. В работе [59] построены уравнения неоднородного слоистого тела вращения, слои которого ограничены выпуклыми эквидистантными поверхностями. Уравнения пластин и оболочек, построенные в работах [58, 59], могут быть использованы при решении задач оптимального проектирования слоистых тел [60, 61].

Как отмечено выше, несколько аппроксимаций каждой искомой функции (напряжений и смещений) используются для получения приближенных уравнений равновесия и соотношений между деформациями и перемещениями. Напряжения внутри оболочки определяются из осредненных по ее толщине определяющих соотношений. Это позволяет достаточно легко обобщить метод для вывода уравнений упругопластического деформирования пластин и оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.; Л.: ОГИЗ, 1935.
2. **Kirchhoff G.** Vorlesungen uber mathemaishe Phisik. Bd 1. Mechanik. Leipzig: B. G. Teubner, 1876.
3. **Власов В. З.** Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
4. **Гольденвейзер А. Л.** Теория тонких упругих оболочек. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
5. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
6. **Муштари Х. М.** Нелинейная теория оболочек. М.: Наука, 1990.
7. **Новожилов В. В.** Статика тонкостенных упругих оболочек. Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
8. **Работнов Ю. Н.** Основные уравнения теории оболочек // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47, № 2. С. 90–93.
9. **Работнов Ю. Н.** Некоторые решения безмоментной теории оболочек // Прикл. математика и механика. 1946. Т. 10, № 2. С. 639–646.
10. **Феодосьев В. И.** Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973.

11. **Тимошенко С. П.** Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости // Изв. С.-Петерб. политехн. ун-та. 1905. Т. 4, вып. 3/4. С. 151–219.
12. **Timoshenko S. P.** On the correction for shear of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars // Philos. Mag. Ser. 6. 1921. V. 41, iss. 245. P. 744–746.
13. **Тимошенко С. П.** Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Наука, 1966.
14. **Reissner R.** On bending of elastic plates // Quart. Appl. Math. 1947. V. 5. P. 55–68.
15. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961.
16. **Болотин В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. М.: Машиностроение, 1980.
17. **Аннин Б. Д., Колпаков А. Г.** Проектирование слоистых и волокнистых композитов с заданными характеристиками // ПМТФ. 1990. № 2. С. 136–150.
18. **Аннин Б. Д.** Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций / Б. Д. Аннин, А. Л. Каламкаров, А. Г. Колпаков, В. З. Партон. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
19. **Григолюк Э. И.** Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1957. № 1. С. 77–84.
20. **Григолюк Э. И.** Устойчивость и колебания трехслойных оболочек / Э. И. Григолюк, П. П. Чулков. М.: Машиностроение, 1973.
21. **Григолюк Э. И.** Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. М.: Машиностроение, 1988.
22. **Григолюк Э. И.** Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев. М.: Машиностроение, 1980.
23. **Григолюк Э. И.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. М.: ВИНИТИ, 1973. (Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел; Т. 5).
24. **Баев Л. В.** Расчет многослойных пластин с учетом поперечного сдвига и обжатия // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1970. Вып. 6. С. 92–105.
25. **Аннин Б. Д., Баев Л. В., Волчков Ю. М.** Уравнения слоистого пакета с учетом поперечных сдвигов и обжатия // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2014. № 1. С. 76–87.
26. **Соломонов Ю. С.** Методы расчета цилиндрических оболочек из композиционных материалов / Ю. С. Соломонов, В. П. Георгиевский, А. Я. Недбай, В. А. Андрюшин. М.: Физматлит, 2009.
27. **Сухинин С. Н.** Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. М.: Физматлит, 2010.
28. **Cauchy A.** Sur l'equilibre et le mouvement d'une plaque solide // Œuvres complètes D'Augustin Cauchy. P.: Gauthier-Villars, S. a. Ser. 2. V. 8. P. 381–411.
29. **Cauchy A.** Recherches sur l'equilibre et le mouvement interieur des corps solides ou fluides, elastiques ou non elastiques // Œuvres complètes D'Augustin Cauchy. P.: Gauthier-Villars, S. a. Ser. 2. V. 8. P. 300–304.
30. **Poisson S.** Memoire sur l equilibre et le mouvement des corps solides // Mem. Acad. Sci. Paris. 1829. V. 8. P. 357–570.
31. **Векуа И. Н.** Об одном варианте теории тонких и пологих оболочек: Лекции по спецкурсу "Математическая теория оболочек". Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1964.

32. **Векуа И. Н.** Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982.
33. **Солер А.** Теории высшего порядка анализа конструкций, основанные на разложениях по полиномам Лежандра // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. E. Прикл. механика. 1969. Т. 36, № 4. С. 107–112.
34. **Пелех Б. Л.** Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б. Л. Пелех, М. А. Сухорольский. Киев: Наук. думка, 1980.
35. **Голоскоков Д. П.** Метод полиномов в задачах теории тонких плит / Д. П. Голоскоков, П. Г. Голоскоков. СПб.: С.-Петерб. гос. ун-т водных коммуникаций, 2008.
36. **Никабадзе М. У.** Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. М.: Изд-во мех.-мат. фак. Моск. гос. ун-та, 2014.
37. **Ворович И. И.** Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1980.
38. **Белоносов С. М.** Математическое моделирование равновесных состояний упругих оболочек. М.: Наука, 1993.
39. **Иванов Г. В.** Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1976. № 6. С. 126–137.
40. **Иванов Г. В.** Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1980.
41. **Дергилева Л. А.** Метод решения плоской контактной задачи для упругого слоя // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1976. Вып. 25. С. 24–32.
42. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Решение задач упругого слоя по приближенным уравнениям и сравнение с решениями теории упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1977. Вып. 28. С. 43–54.
43. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 3. С. 179–190.
44. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Краевые эффекты в напряженном состоянии тонкой упругой прослойки // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 189–195.
45. **Волчков Ю. М., Важева Д. В.** Решение контактных задач на основе уточненной теории пластин и оболочек // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 169–176.
46. **Алексеев А. Е., Демешкин А. Г.** Об отрыве балки, приклеенной к жесткой плите // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 151–158.
47. **Волчков Ю. М.** Конечные элементы с условиями сопряжения на их гранях // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 175–180.
48. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А., Иванов Г. В.** Численное моделирование напряженных состояний в плоских задачах упругости методом слоев // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 129–135.
49. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
50. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Уравнения упругого анизотропного слоя // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 188–198.
51. **Алексеев А. Е.** Изгиб трехслойной ортотропной балки // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 158–166.
52. **Vajeva D. V., Volchkov Yu. M.** The equations for determination of stress-deformed state of multilayered shells // Proc. of the 9th Russian-Korean intern. symp. on sci. and technol., Novosibirsk, 26 June — 2 July 2005. Novosibirsk: Novosib. State Univ., 2005. P. 547–550.

53. **Волчков Ю. М., Полтавская Е. Н.** Моделирование напряженно-деформированного состояния в слоистых ортотропных пластинах // Мат. заметки Сев.-Вост. фед. ун-та. 2015. Т. 22, № 2. С. 62–71.
54. **Pagano N. J.** Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending // J. Composite Materials. 1969. V. 3, N 4. P. 398–409.
55. **Pagano N. J.** Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // J. Composite Materials. 1970. V. 4, N 1. P. 20–34.
56. **Pagano N. J.** Elastic behaviour of multilayered bidirectional composites // AIAA J. 1972. V. 10, N 7. P. 931–933.
57. **Алексеев А. Е.** Построение уравнений слоя переменной толщины на основе разложений по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 137–147.
58. **Алексеев А. Е., Алехин В. В., Аннин Б. Д.** Плоская задача теории упругости для неоднородного слоистого тела // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 136–141.
59. **Алексеев А. Е., Аннин Б. Д.** Уравнения деформирования упругого неоднородного слоистого тела вращения // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 157–163.
60. **Аннин Б. Д.** Механика деформирования и оптимальное проектирование слоистых тел. Новосибирск: Ин-т гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2005.
61. **Аннин Б. Д.** Элементы механики композитов / Б. Д. Аннин, Е. В. Карпов. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2016.

Поступила в редакцию 21/IX 2016 г.