

РАСЧЕТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
СФЕРИЧЕСКОЙ И ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧЕК

С. П. Гавеля, Н. И. Кононенко

(Днепропетровск)

В работе реализуется алгоритм расчета собственных колебаний и волн, основанный на использовании специальных матриц типа матриц Грина (по схеме [1]). Приводятся и обсуждаются результаты расчетов для сферической и тороидальной оболочек. Демонстрируются частоты и формы собственных колебаний постепенно повышающихся тонов. Полученные данные используются для расчета распространяющихся волн при различных способах начального возмущения. Обнаруживаются специфические особенности распределения динамических напряжений.

1. Тонкостенные конструктивные элементы находят широкое применение в авиационной, ракетной и других отраслях современной техники. Обеспечение надежности конструкций при прогрессирующем повышении интенсивности рабочих процессов вызывает необходимость более точного учета динамических факторов. Из-за отсутствия эффективных расчетных алгоритмов для случаев, близких к реальным, часто приходится пользоваться грубыми моделями. Так, при расчете частот и форм собственных колебаний тороидальной оболочки последнюю приближенно заменяют цилиндрической (см. [2]). Возникающие в результате искажения становятся заметными при больших кривизнах экваторов. Для получения более точных результатов необходима разработка расчетных схем, полнее учитывающих геометрические свойства исследуемых объектов.

В [1] отмечается возможность использования матриц типа матриц Грина при расчете собственных колебаний и исследовании распространяющихся волн в оболочках. Пусть

$$(1.1) \quad A \left(\varphi, \vartheta; \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) U = - \frac{\rho}{D} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad U = U(\varphi, \vartheta; t) = \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

сокращенное (матричное) обозначение системы дифференциальных уравнений, определяющей колебания некоторой оболочки. Здесь $A(\varphi, \vartheta; \partial/\partial\varphi, \partial/\partial\vartheta)$ обозначает матрицу линейных дифференциальных операторов, U — вектор смещения точек срединной поверхности оболочки; ρ — удельный вес; D — цилиндрическая жесткость; E и σ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно; h — толщина оболочки.

Если $G(\varphi, \vartheta; \alpha, \beta)$ — специальная матрица типа матриц Грина, для которой

$$U(\varphi, \vartheta) = \int_{\Sigma} G(\varphi, \vartheta; \alpha, \beta) F(\alpha, \beta) d_{\alpha, \beta} \Omega$$

($F(\alpha, \beta)$ — внешняя поверхностная нагрузка), то, как отмечается в [1], частоты и формы собственных колебаний определяются интегральным урав-

нением вида

$$(1.2) \quad U(\varphi, \vartheta) = \lambda^4 \iint G(\varphi, \vartheta; \alpha, \beta) U(\alpha, \beta) d\alpha, \beta \Omega$$

где $\lambda^4 = \rho\omega^2/D$, ω — частота собственных колебаний оболочки.

Для вычислений (1.2) аппроксимируют системой линейных алгебраических уравнений

$$(1.3) \quad U(\varphi_j) - \lambda^4 \sum_{i=1}^N P_i q_m(\varphi_j, \alpha_i) U(\alpha_i) = 0$$

где α_i и P_i — квадратурные узлы и коэффициенты соответственно. Собственные числа определяются из условия

$$(1.4) \quad \det \{J - \lambda^4 Q\} = 0$$

где J — единичная матрица, а Q — матрица системы (1.3). Удобно уточнять интервалы перемены знака левой части условия (1.4) последовательным перебором. Этим достигается высокая точность вычисления корней уравнения (1.4).

Как отмечено в [3], вычисление собственных функций можно вести по стандартным программам решения систем линейных алгебраических уравнений. При этом система (1.3) несколько видоизменяется (подробнее см. в [3]).

При выполнении [1] для тороидальных оболочек с параметризацией

$$x = (R + a \cos \varphi) \cos \vartheta, \quad y = (R + a \cos \varphi) \sin \vartheta, \quad z = a \sin \varphi$$

вычислялись матрицы Грина. Можно воспользоваться ими для вычисления частот и форм собственных колебаний.

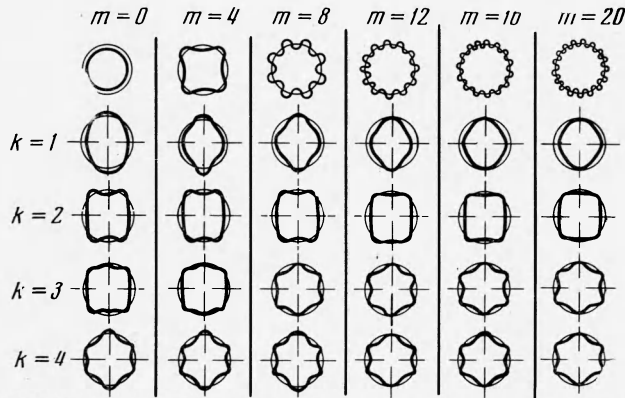
k	m					
	0	4	8	12	16	20
1	0.23756	2.18147	9.28284	21.12483	37.68109	58.93870
2	0.81827	2.90829	10.1746	22.18600	38.91601	60.31930
3	1.87075	4.58635	12.4061	24.74807	41.88852	63.68932
4	4.26306	8.04533	22.4877	47.24211	81.65108	125.1058

Если положить $\sigma = 0.25$, $h = 1$, $a = 100$, $R = 0$ (сферическая оболочка), то получим собственные числа λ_{km}^4 , значения которых приведены в таблице. Соответствующие им формы собственных колебаний показаны на фиг. 1. В верхнем ряду фигуры помещены изображения деформирующегося экватора. Возрастающие слева направо значения индекса m ($m = 0$, $m = 4$, $m = 8$ и т. д.) определяют задаваемый номер гармоники в направлении координаты ϑ . Собственные числа при каждом данном m возрастают сверху вниз (λ_{1m} , λ_{2m} , ..., λ_{km}). При этом происходит увеличение количества узлов на меридиане. Точность результатов контролируется сравнением данных, получаемых при двух аппроксимациях различной подробности.

2. Полученные собственные числа и собственные функции можно использовать для изучения распространяющихся волн. Пусть в дополнение к (1.1) имеют место начальные условия

$$(2.1) \quad U(\varphi, \vartheta; t)|_{t=0} = \Phi(\varphi, \vartheta), \quad \frac{\partial U(\varphi, \vartheta; t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Psi(\varphi, \vartheta)$$

Решение задачи (2.1) для системы (1.1) по схеме разделения переменных с помощью определенных выше собственных чисел λ_{km} и собственных



Фиг. 1

функций U_{km} представляется в виде

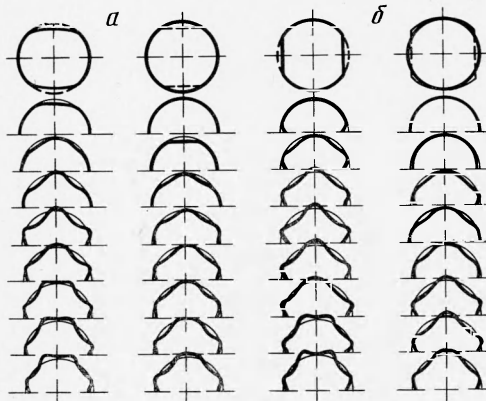
$$U(\varphi, \vartheta; t) = \sum_{km} U_{km}(\varphi) \theta_m(\vartheta) \left(\Phi_{km} \cos \omega_{km} t + \frac{\Psi}{\omega_{km}} \sin \omega_{km} t \right)$$

где Φ_{km} и Ψ_{km} — коэффициенты разложений

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = \sum_{km} \Phi_{km} U_{km}(\varphi) \theta_m(\vartheta), \quad \Psi(\varphi, \vartheta) = \sum_{km} \Psi_{km} U_{km}(\varphi) \theta_m(\vartheta)$$

$$\theta_m(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos m\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & \sin m\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & \cos m\vartheta \end{pmatrix}$$

На фиг. 2, а и б показана форма меридиана в последовательные моменты времени (сверху вниз) для сферической оболочки, когда начальное отклонение или начальная скорость локализируются в окрестности полюса (а) либо в окрестности экватора (б). В верхней части фигуры представлена форма начального отклонения (сплошная линия) или график начальных скоростей (пунктир). Величина начальной скорости откладывается по нормали от нейтрального положения меридиана.



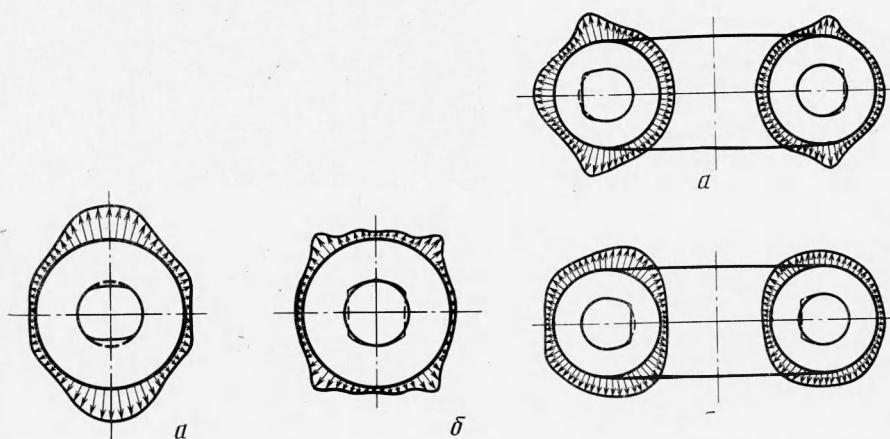
Фиг. 2

На фиг. 3, а и б изображены максимальные по времени мембранные напряжения для сферической оболочки. Они также откладываются по нормали от меридиана. Форма начального отклонения или график начальных скоростей представлены внутри каждого сечения (концентрическая окружность меньшего радиуса). Следует отметить, что, как в случае локализации начального отклоне-

ния или начальной скорости вблизи полюса, так и в случае локализации их в окрестности экватора, динамические напряжения достигают экстремальных значений на полюсе.

На фиг. 3, б изображены максимальные по времени значения моментов для сферической оболочки. Последние достигают экстремальных значений в средних широтах ($\approx \pi/4$). Зона максимума ярко выражена (см. фиг. 3, б).

Аналогичные напряжения и моменты для тороидальной оболочки с параметрами $R = 200$, $a = 100$, $h = 1$, $\sigma = 0.25$ показаны на фиг. 4, а и б



Фиг. 3

Фиг. 4

соответственно. Левые части фигур соответствуют случаям, в которых отсутствуют начальные скорости, правые — когда отсутствуют начальные отклонения. Отметим, что независимо от способа начального возмущения (на положительной, нулевой или отрицательной гауссовой кривизне) экстремальные значения мембранных напряжений и моментов в тороидальной оболочке достигаются вблизи линии перемены знака гауссовой кривизны.

Приведенные результаты свидетельствуют о возможности эффективного расчетного исследования динамических характеристик по схеме, предложенной в [1], с помощью предварительно вычисленных матриц Грина.

Поступила 25 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавеля С. П. Расчет напряженно-деформированного состояния тороидальной оболочки с отверстием. Прикл. механ., 1972, т. 9, вып. 2.
2. Меерович И. А. Приближенный метод определения частот собственных колебаний цилиндрических, конических и тороидальных оболочек. В сб. «Прочность и динамика авиационных двигателей», вып. 2. М., «Машиностроение», 1965.
3. Гавеля С. П., Кононенко Н. И. Использование функций Грина при исследовании собственных колебаний двумерных конструкций. В сб. «Вычислительная и прикладная математика», вып. 18. Киев, Изд. Киевск. ун-та, 1972.