

УДК 532.5:536

## Влияние однородного магнитного поля на ламинарные режимы естественной конвекции в замкнутом объеме\*

Н.С. Бондарева<sup>1</sup>, М.А. Шеремет<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Томский государственный университет

<sup>2</sup>Томский политехнический университет

E-mail: Michael-sher@yandex.ru

Проведен численный анализ пространственных ламинарных режимов естественной конвекции в замкнутой полости при наличии однородного магнитного поля. Математическая модель, сформулированная в безразмерных естественных переменных “скорость–давление–температура”, реализована численно методом контрольного объема. Детально изучено влияние чисел Рэлея ( $10^3 \leq Ra \leq 10^5$ ) и Гартмана ( $0 \leq Na \leq 100$ ), ориентации вектора магнитной индукции ( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ), а также геометрического параметра ( $0,2 \leq A \leq 5$ ), отражающего относительную длину полости, на распределения скорости и температуры, а также на среднее число Нуссельта на характерной изотермической границе. Установлена возможность описания интегрального теплообмена в рассматриваемом пространственном объекте на основе двумерной модели.

**Ключевые слова:** естественная конвекция, однородное магнитное поле, приближение Буссинеска, ламинарный режим, численное моделирование.

### Введение

Магнитные поля используются в различных отраслях промышленности для управления конвективными потоками жидких металлов и электропроводящих жидкостей, например, при выращивании объемных монокристаллов [1, 2], а также для приготовления однородных сплавов в индукционных печах [3]. Широкое применение магнитного поля основано на его возможности подавлять интенсивное конвективное перемешивание среды. На сегодняшний день известны общие характеристики и параметры такого воздействия, но нет четкой локальной картины, объясняющей формирование различных термогидродинамических режимов в узкоспециализированных технологических системах [1–3].

Изучению особенностей конвективного теплопереноса в замкнутых областях при наличии внешних магнитных полей посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ [1–10]. Так, например, в работе [3] проводился численный анализ режимов конвективного теплопереноса в электропроводном цилиндре, расположенном во внешнем неоднородном переменном магнитном поле. В осесимметричном приближении были установлены пространственно-временные распределения вектора напряженности магнитного поля в области расплава металла, плотности индукционных

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-31137 мол\_а) и Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МД-6942.2015.8).

токов и мощности источников энергии. Экспериментальный анализ режимов термогравитационной конвекции жидкого гелия (при числе Прандтля  $Pr = 0,024$ ) в замкнутой кубической полости с двумя изотермическими вертикальными гранями и адиабатическими остальными стенками в условиях воздействия магнитного поля проведен в работе [4]. Показано, что вертикальная ориентация вектора магнитной индукции представляется наиболее эффективной по сравнению с другими возможными направлениями воздействия. В результате теоретического исследования стационарных режимов естественной конвекции электропроводящей жидкости внутри прямоугольной полости при наличии вертикально ориентированного вектора магнитной индукции [5] установлено, что слабые магнитные поля приводят к появлению нелинейных эффектов при высоких числах Рэлея. В случае же произвольно ориентированного внешнего магнитного поля [6] при высоких значениях числа Гартмана структура течения существенно зависит от угла наклона вектора магнитной индукции и от отношения сторон полости. Математическое моделирование установившихся режимов конвективного теплопереноса в замкнутой вертикальной трапециевидной полости при наличии магнитного поля проведено в работе [7]. Установлено, что максимальное среднее число Нуссельта на нижней изотермической стенке в результате неравномерного нагрева достигается при числе Рэлея  $Ra = 10^7$  в случае квадратной полости, а минимальное среднее число Нуссельта было получено при  $Ra = 10^3$  в случае трапециевидной полости с углом наклона вертикальной стенки к основанию  $45^\circ$ . На основе прямого численного моделирования проведен анализ совместного воздействия горизонтального магнитного поля и объемного внутреннего тепловыделения на режимы естественной конвекции электропроводящей жидкости, расположенной в вертикальном кольцевом канале [8]. Показано, что рост интенсивности магнитного поля (число Гартмана  $Ha \geq 75$ ) приводит к ламинаризации течения, а также отражается в формировании асимметричных термогидродинамических структур вследствие развития слоев Гартмана [9] на вертикальных цилиндрических поверхностях. С использованием коммерческого пакета вычислительной гидродинамики Fluent было проведено исследование пространственных режимов термогравитационной конвекции расплава свинец-литий внутри кубической полости с двумя изотермическими вертикальными гранями и остальными адиабатическими [10].

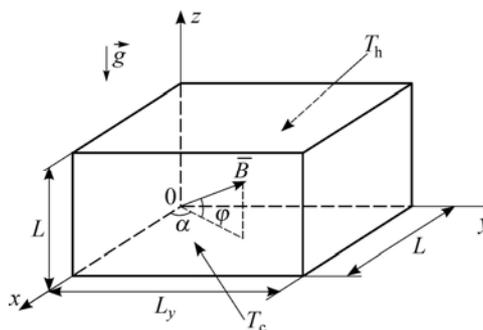
Целью настоящей работы является численный анализ магнитной естественной конвекции расплава металла ( $Pr = 0,02$ ) внутри замкнутого параллелепипеда с изотермическими противоположными вертикальными гранями  $x = 0$  и  $x = L$  при постоянном поперечном сечении  $y = \text{const}$  квадратной формы и различных значениях геометрического параметра  $A = L_y/L$ . Особое внимание уделялось анализу условий, при которых результаты двумерных расчетов можно использовать для описания интегрального теплообмена в пространственном объекте.

Следует отметить, что в настоящее время известна только одна работа [11], детально отражающая влияние третьей координаты на режимы естественной конвекции ( $Pr = 0,71$ ) при отсутствии магнитного поля в замкнутом параллелепипеде. В работе было установлено, что для описания интегрального теплообмена в кубических или более протяженных прослойках ( $A \geq 1$ ) можно использовать результаты двумерных расчетов.

### Математическая модель

Рассматривается тепловая гравитационная конвекция ньютоновской среды в замкнутом параллелепипеде при наличии однородного магнитного поля произвольной ориентации, определяемой углами  $\alpha$  и  $\varphi$  (рис. 1). Область решения содержит две вертикальные противоположные изотермические грани с температурами  $T_h$  и  $T_c$  ( $T_h > T_c$ ), остальные стенки являются адиабатическими. Внутри объема находится электропроводящая среда ( $Pr = 0,02$ ). При проведении вычислительных экспериментов считается, что физические свойства среды постоянны за исключением плотности, а режим течения

Рис. 1. Область решения задачи.



является ламинарным. Влияние выталкивающей силы вследствие неоднородности поля температуры описывается на основе приближения Буссинеска. Воздействие теплового излучения и джоулева нагрева пренебрежимо мало. Предполагается, что электрическое поле отсутствует, тогда  $\vec{j} = \sigma(\vec{V} \times \vec{B})$ , где  $\vec{j}$  — плотность тока,

$\vec{V}$  — вектор скорости,  $\vec{B}$  — вектор магнитной индукции,  $\sigma$  — электрическая проводимость жидкости. Считается также, что магнитное число Рейнольдса является небольшим и магнитное поле, вызванное движением электропроводящей жидкости, пренебрежимо мало.

Процесс переноса массы, импульса и энергии описывается системой стационарных трехмерных уравнений конвекции Обербека–Буссинеска в безразмерных естественных переменных “скорость–давление–температура” [11, 12] с учетом влияния силы Лоренца  $\vec{F} = (\vec{j} \times \vec{B})$  [13].

В качестве масштабов расстояния, скорости, времени, температуры и давления были выбраны величины:  $L$ ,  $\sqrt{g\beta\Delta TL}$ ,  $\sqrt{L/(g\beta\Delta T)}$ ,  $\Delta T = T_h - T_c$ ,  $\rho g\beta\Delta TL$ . Безразмерные переменные имели вид:

$$X = x/L, Y = y/L, Z = z/L, U = V_x/\sqrt{g\beta\Delta TL}, V = V_y/\sqrt{g\beta\Delta TL}, \\ W = V_z/\sqrt{g\beta\Delta TL}, \tau = t\sqrt{g\beta\Delta T/L}, \Theta = (T - T_c)/\Delta T, P = p/(\rho g\beta\Delta TL),$$

где  $L$  — размер полости вдоль осей  $0x$  и  $0z$  (рис. 1),  $g$  — ускорение свободного падения,  $\beta$  — термический коэффициент объемного расширения,  $\Delta T$  — температурный напор,  $T_h$  — температура на стенке  $x = 0$ ,  $T_c$  — температура на стенке  $x = L$ ;  $x, y, z$  — координаты декартовой системы координат,  $\rho$  — плотность среды,  $X, Y, Z$  — безразмерные координаты, соответствующие координатам  $x, y, z$ ;  $V_x, V_y$  и  $V_z$  — составляющие вектора скорости в проекции на оси  $x, y, z$  соответственно,  $U, V, W$  — безразмерные скорости, соответствующие скоростям  $V_x, V_y, V_z$ ;  $t$  — время,  $\tau$  — безразмерное время,  $\Theta$  — безразмерная температура,  $p$  — давление,  $P$  — безразмерное давление.

Безразмерные уравнения Обербека–Буссинеска примут следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U^2}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} + \frac{\partial(UW)}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right) + \\ + \text{Ha}^2 \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left\{ \sin(\varphi) [W \cos(\varphi) \cos(\alpha) - U \sin(\varphi)] - \right. \\ \left. - \cos^2(\varphi) \sin(\alpha) [U \sin(\alpha) - V \cos(\alpha)] \right\}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial V^2}{\partial Y} + \frac{\partial(VW)}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) + \\ + \text{Ha}^2 \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left\{ \cos^2(\varphi) \cos(\alpha) [U \sin(\alpha) - V \cos(\alpha)] - \right. \\ \left. - \sin(\varphi) [V \sin(\varphi) - W \cos(\varphi) \sin(\alpha)] \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(UW)}{\partial X} + \frac{\partial(VW)}{\partial Y} + \frac{\partial W^2}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) + \Theta + \\ + \text{Ha}^2 \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \cos(\varphi) \left\{ \sin(\alpha) [V \sin(\varphi) - W \cos(\varphi) \sin(\alpha)] - \right. \\ \left. - \cos(\alpha) [W \cos(\varphi) \cos(\alpha) - U \sin(\varphi)] \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial(U\Theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Theta)}{\partial Y} + \frac{\partial(W\Theta)}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} \right), \quad (5)$$

здесь  $\text{Ra} = g\beta\Delta TL^3 / (\nu a)$  — число Рэлея,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости электропроводной среды,  $a$  — коэффициент температуропроводности электропроводной среды,  $\text{Pr} = \nu / a$  — число Прандтля,  $\text{Ha} = LB_0 \sqrt{\sigma / \mu}$  — число Гартмана,  $B_0$  — абсолютная величина вектора магнитной индукции,  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости электропроводной среды.

Граничные условия для сформулированной задачи (1)–(5) имеют вид:

- на границе  $X = 0$ :  $U = V = W = 0$ ,  $\Theta = 1$ ;
- на границе  $X = 1$ :  $U = V = W = 0$ ,  $\Theta = 0$ ;
- на остальных границах:  $U = V = W = 0$ ,  $\partial\Theta / \partial \bar{n} = 0$ .

Сформулированная краевая задача (1)–(5) с соответствующими граничными условиями решалась методом контрольного объема [12, 14, 15] на неравномерной структурированной сетке. Для аппроксимации конвективных слагаемых применялся степенной закон [14, 15], для диффузионных слагаемых — центральные разности. Для совместного определения полей скорости и давления применялась процедура SIMPLE [14, 15]. Разностные уравнения движения и энергии разрешались на основе итерационного метода переменных направлений. Построение неравномерной структурированной сетки осуществлялось следующим образом:  $S_{i+1} = S_i + \alpha_s^i \Delta$  [16], где  $S_i$  определяет положение грани контрольного объема,  $\Delta$  — шаг сетки,  $\alpha_s$  — параметр сгущения. Сгущение разностной сетки проводилось к стенкам полости для корректной аппроксимации градиентов искомых характеристик.

Разработанный метод решения был протестирован на ряде модельных задач естественной конвекции в замкнутых областях. В первой тестовой задаче рассматривалась магнитная естественная конвекция в замкнутой квадратной полости с изотермическими вертикальными и адиабатическими горизонтальными стенками [17, 18]. Вектор магнитной индукции направлялся вдоль оси абсцисс. На рис. 2 и 3 наглядно представлено сравнение линий тока и изотерм при различных значениях числа Гартмана с данными работ [17, 18].

Во второй тестовой задаче проводилось исследование стационарных ламинарных режимов термогравитационной конвекции в кубической полости с двумя противоположными вертикальными изотермическими стенками и остальными адиабатическими

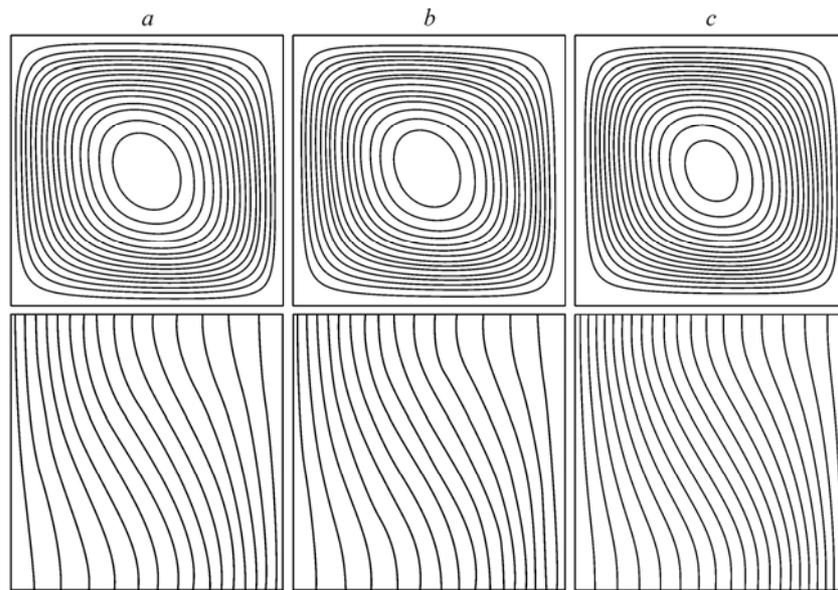


Рис. 2. Изолинии функции тока (верхний ряд) и изотермы (нижний ряд) при  $Ra = 7 \cdot 10^3$ ,  $Na = 25$ .  
Данные работ [17] (a), [18] (b) и настоящей работы (c).

гранями [11, 19, 20]. В качестве определяемой величины выступало среднее число Нуссельта на вертикальной изотермической грани в широком диапазоне изменения  $Ra$  (табл. 1). В расчетах использовалась неравномерная структурированная разностная сетка размерностью  $54 \times 54 \times 54$ .

Результаты, представленные на рис. 2, 3 и в табл. 1, наглядно показывают, что используемый численный алгоритм решения приводит к достаточно хорошему согласованию с результатами других авторов.

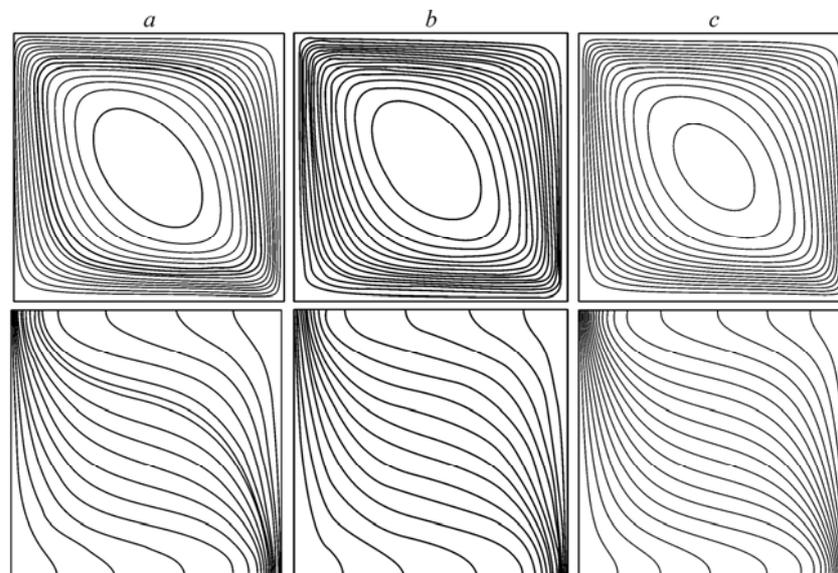


Рис. 3. Изолинии функции тока (верхний ряд) и изотермы (нижний ряд) при  $Ra = 7 \cdot 10^5$ ,  $Na = 100$ .  
Данные работ [17] (a), [18] (b) и настоящей работы (c).

Таблица 1

Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Рэлея

Ra	Результаты настоящей работы	Данные работ		
		[11]	[19]	[20]
$10^4$	2,056	2,13	2,100	2,055
$10^5$	4,327	4,51	4,361	4,339
$10^6$	8,391	9,24	8,770	8,656

**Результаты численного моделирования**

Численные исследования проведены при следующих значениях определяющих параметров:  $10^3 \leq Ra \leq 10^5$ ,  $0 \leq Na \leq 100$ ,  $Pr = 0,02$ ,  $\alpha = 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ,  $0,2 \leq A \leq 5$ . Проанализировано влияние основных комплексов, характеризующих процесс, а также проведено сопоставление с результатами решения двумерной задачи [21].

**Влияние числа Рэлея**

На рис. 4 представлены пространственные поля скорости и температуры при  $Na = 50$ ,  $\varphi = 0$ ,  $A = 1$ , соответствующие различным значениям числа Рэлея. В первом ряду рис. 4 показаны контурные поля вертикальной компоненты скорости и траектории движения среды.

Независимо от значения числа Рэлея внутри кубической полости формируется глобальное вихревое течение, отражающее наличие восходящих потоков вблизи нагреваемой стенки  $X = 0$  и нисходящих потоков около охлаждаемой стенки  $X = 1$ . Следует отметить, что при малых значениях числа Рэлея ( $Ra \leq 10^4$ ) определяющим механизмом переноса энергии внутри полости является теплопроводность (рис. 4a, 4b), что обусловлено воздействием магнитного поля интенсивности  $Na = 50$ . Доминирование отмеченного механизма передачи энергии подтверждается распределением изотерм параллельно изотермическим вертикальным стенкам. При  $Ra = 10^5$  (рис. 4c) искривление линий постоянной температуры характеризует формирование тепловых пограничных слоев вблизи изотермических стенок и развитие конвективного механизма теплопереноса, что отражается в существенном повышении температуры в верхней части анализируемого объема по сравнению со случаями, когда  $Ra = 10^3$  и  $Ra = 10^4$ . Рассматривая конфигурацию

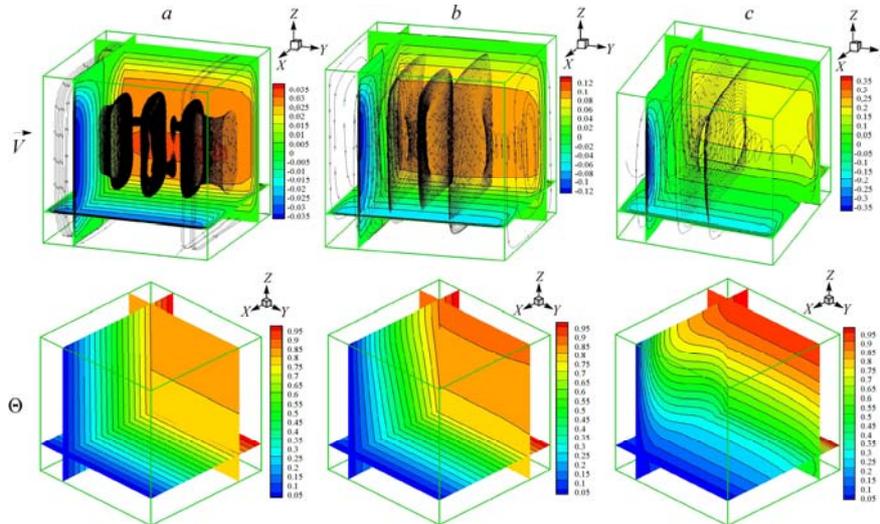


Рис. 4. Пространственные поля скорости и температуры при  $Na = 50$ ,  $\varphi = 0$ ,  $A = 1$ .  
 $Ra = 10^3$  (a),  $10^4$  (b),  $10^5$  (c).

течения, можно отметить, что при малых значениях числа Рэлея ( $Ra = 10^3$ ) внутри полости формируется двухъядерный конвективный вихрь со строгой вертикальной ориентацией (рис. 4а). Отмеченная центральная структура вихря занимает область вдоль координаты  $Y$ , составляющую  $\approx 40\%$  от длины полости. Увеличение числа Рэлея в десять раз (рис. 4б) проявляется, с одной стороны, в сохранении двухъядерной структуры вихря, а с другой стороны, в изменении ее ориентации — заметен поворот линии, соединяющей центры двух ядер, в направлении по часовой стрелке на  $\approx 20^\circ$ . Такие изменения, по всей видимости, обусловлены развитием конвективной составляющей теплопереноса. При  $Ra = 10^5$  (рис. 4с) происходит объединение двух ядер с интенсификацией как течения, так и теплопереноса.

Отдельно необходимо отметить особенности формирующейся гидродинамической структуры внутри полости. Помимо глобального вихря, включающего в себя восходящие потоки вблизи вертикальной нагреваемой стенки и нисходящие течения около противоположной охлаждаемой стенки, появляются поперечные перетоки меньших масштабов в виде спиралевидных траекторий со стороны адиабатических вертикальных стенок. Эти дополнительные течения вдоль оси  $Y$  со стороны вертикальных стенок сталкиваются в центральной части полости и под действием направленного горизонтального градиента температуры формируют ядра глобального конвективного вихря. Следует также отметить интенсификацию течения при увеличении числа Рэлея. Судя по значениям вертикальной компоненты скорости, увеличение числа Рэлея в сто раз (от  $10^3$  до  $10^5$ ) проявляется в повышении скорости в десять раз, что теоретически можно обосновать известным соотношением для максимальной скорости конвекции  $V_c = \sqrt{g\beta\Delta TL} = \sqrt{\nu a \cdot Ra/L}$ . При этом зоны наиболее интенсивного течения с ростом  $Ra$  перемещаются от центральной части вблизи изотермических стенок к вертикальным адиабатическим граням.

На рис. 5 представлено сравнение изолиний функции тока  $\Xi$  и температуры  $\Theta$  в двумерном (сплошные линии) и трехмерном (штриховые линии в сечении  $Y=0,5$ ) случаях при  $Na = 50$ ,  $\varphi = 0$ ,  $A = 1$  и различных значениях числа Рэлея. Необходимо отметить,

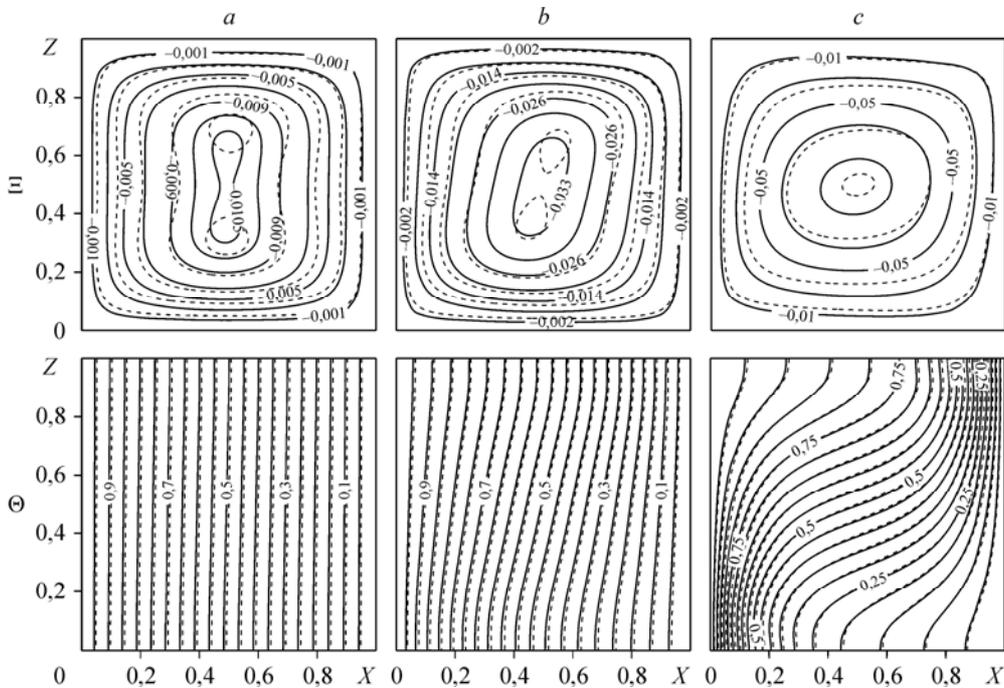


Рис. 5. Изолинии функции тока  $\Xi$  и температуры  $\Theta$  при  $Na = 50$ ,  $\varphi = 0$ ,  $A = 1$ .

$Ra = 10^3$  (a),  $10^4$  (b),  $10^5$  (c).

что линии тока в рассматриваемом сечении кубической полости (трехмерная постановка) были получены в результате решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона  $\partial^2 \Xi / \partial X^2 + \partial^2 \Xi / \partial Z^2 = \partial U / \partial Z - \partial W / \partial X$ .

В рассматриваемом режиме воздействия внешнего магнитного поля ( $Ha = 50$ ) распределение изотерм в среднем сечении кубической полости незначительно отличается от результатов, полученных на основе двумерной модели [21]. В свою очередь изолинии функции тока  $\Xi$  отличаются как по конфигурации, так и по значениям  $\Xi$ . Анализируя представленные распределения, можно отметить, что двумерная постановка не позволяет отдельно выделить два ядра глобального конвективного вихря при  $Ra = 10^4$ , а при  $Ra = 10^3$  масштабы двух ядер в двумерном случае значительно меньше аналогичных данных трехмерной модели. При этом интенсивность циркуляции среды в двумерном случае выше по сравнению с результатами, полученными в трехмерной модели, что обусловлено отсутствием перетоков массы, импульса и энергии по третьей координате:  $|\Xi|_{\max, 3D}^{Ra=10^3} = 0,0084 < |\Xi|_{\max, 2D}^{Ra=10^3} = 0,0106$ ,  $|\Xi|_{\max, 3D}^{Ra=10^4} = 0,0263 < |\Xi|_{\max, 2D}^{Ra=10^4} = 0,0338$ ,  $|\Xi|_{\max, 3D}^{Ra=10^5} = 0,0568 < |\Xi|_{\max, 2D}^{Ra=10^5} = 0,0744$ .

### Влияние числа Гартмана

На рис. 6 представлено сравнение изолиний функции тока  $\Xi$  и температуры  $\Theta$  в двумерном (сплошные линии) и трехмерном (штриховые линии в сечении  $Y = 0,5$ ) случаях при  $Ra = 10^5$ ,  $\varphi = 0$ ,  $A = 1$  и различных значениях числа Гартмана.

Анализируя влияние интенсивности магнитного поля в трехмерном случае ( $Ha = 0$  (рис. 6a),  $Ha = 50$  (рис. 5c),  $Ha = 100$  (рис. 6b)), можно отметить, что рост  $Ha$  проявляется в ослаблении конвективного теплопереноса ( $|\Xi|_{\max, 3D}^{Ha=0} = 0,096 > |\Xi|_{\max, 3D}^{Ha=50} = 0,057 > |\Xi|_{\max, 3D}^{Ha=100} = 0,021$ ) и доминировании механизма теплопроводности. При этом

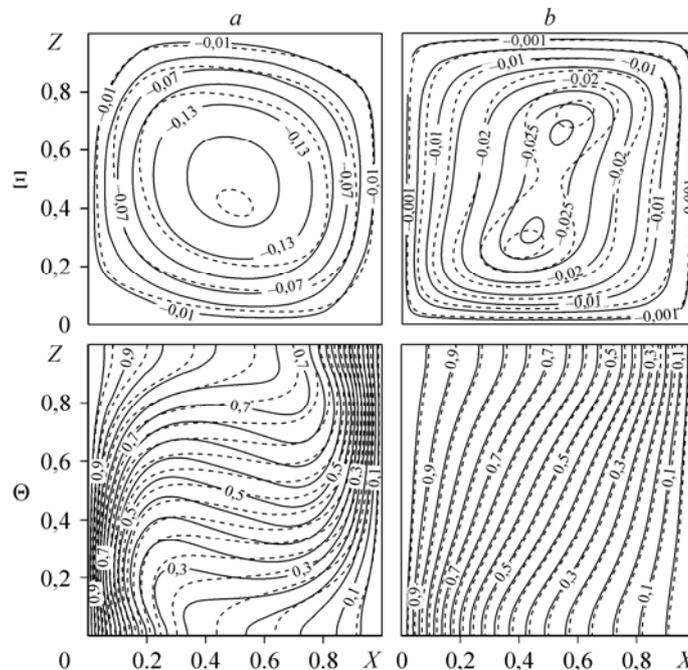
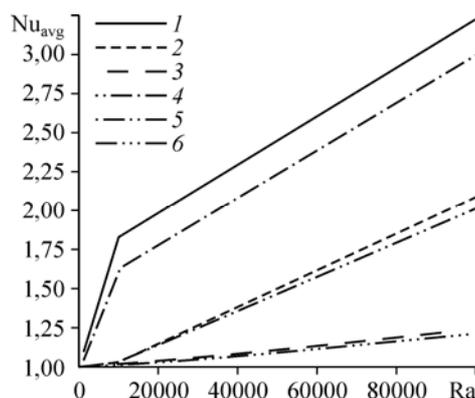


Рис. 6. Изолинии функции тока  $\Xi$  и температуры  $\Theta$  при  $Ra = 10^5$ ,  $\varphi = 0$ ,  $A = 1$ .  $Ha = 0$  (a),  $100$  (b).

Рис. 7. Зависимость среднего числа Нуссельта от чисел Рэлея и Гартмана и размерности задачи при  $\varphi = 0, A = 1$ .

Размерность задач: 2D —  $Ha = 0$  (1), 50 (2), 100 (3);  
3D —  $Ha = 0$  (4), 50 (5), 100 (6).



структура течения, например при  $Ha = 100$ , представляет собой двухъядерный конвективный вихрь, подобный формирующемуся вихрю при  $Ra = 10^3$  и  $Ha = 50$  (рис. 5a). Следует также отметить, что при отсутствии внешнего магнитного поля ( $Ha = 0$ , рис. 6a) в трехмерном случае внутри полости образуется конвективная структура, ядро которой смещено относительно центра полости, что связано с рассматриваемой средой ( $Pr = 0,02$ ).

Сравнивая результаты двумерной и трехмерной моделей, можно отметить, что при наличии магнитного поля умеренной интенсивности ( $Ha \geq 50$ ) для  $Ra = 10^5$  распределение изотерм в среднем сечении кубической полости достаточно хорошо описывается данными плоского приближения. При этом конфигурация изолиний функции тока и значения  $\Xi$  отличаются. Расхождения в распределениях линий тока при совпадении изотерм обусловлены нетепловой природой силы Лоренца.

Проведен анализ влияния чисел Рэлея и Гартмана на среднее число Нуссельта

$$\left( Nu_{avg} = \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} dYdZ \right)$$
 на вертикальной нагреваемой стенке  $X = 0$  (рис. 7). Увеличе-

ние числа Рэлея приводит к росту среднего числа Нуссельта, а рост числа Гартмана отражается в снижении  $Nu_{avg}$  независимо от размерности задачи. Следует отметить, что в двумерном случае при фиксированной интенсивности внешнего магнитного поля  $Nu_{avg}$  превышает соответствующее значения для трехмерной постановки, что связано с прогревом полости только со стороны одного отрезка, а не со всей поверхности, как это происходит в пространственной постановке. При этом отмеченное расхождение уменьшается с ростом числа Гартмана вследствие ослабления конвективного механизма переноса тепла.

#### Влияние угла наклона вектора магнитной индукции

На рис. 8 представлены изолинии функции тока  $\Xi$  и температуры  $\Theta$  в двумерном (сплошные линии) и трехмерном (штриховые линии в сечении  $Y = 0,5$ ) случаях при  $Ra = 10^5$ ,  $Ha = 50$ ,  $A = 1$  и различных значениях угла наклона  $\varphi$  вектора магнитной индукции ( $\alpha = 0$ ). Влияние угла наклона  $\varphi$  на структуру течения и теплоперенос в кубической полости при  $Ha = 50$  обобщает результат, полученный ранее в двумерном случае [6], — при высоких числах Гартмана изменение ориентации вектора магнитной индукции приводит к модификации структуры течения при незначительных изменениях поля температуры. Изменение угла  $\varphi$  в диапазоне от 0 (рис. 5c) до  $\pi/2$  в трехмерном случае приводит к вытягиванию ядра глобального конвективного вихря вдоль оси абсцисс и повороту оси этого вихря относительно координаты  $Y$  по часовой стрелке. При этом в случае  $\varphi = \pi/2$  наблюдается формирование двухъядерного глобального вихря. В свою очередь двумерное приближение отражает вытягивание ядра вихря не так интенсивно, как пространственная модель, и при  $\varphi = \pi/2$  размеры сформировавшихся двух ядер существенно меньше по сравнению с результатами, полученными в трехмерном приближении.

На рис. 9 представлены зависимости среднего числа Нуссельта на вертикальной нагреваемой стенке  $X = 0$  от числа Рэлея и угла наклона  $\varphi$  вектора магнитной индукции

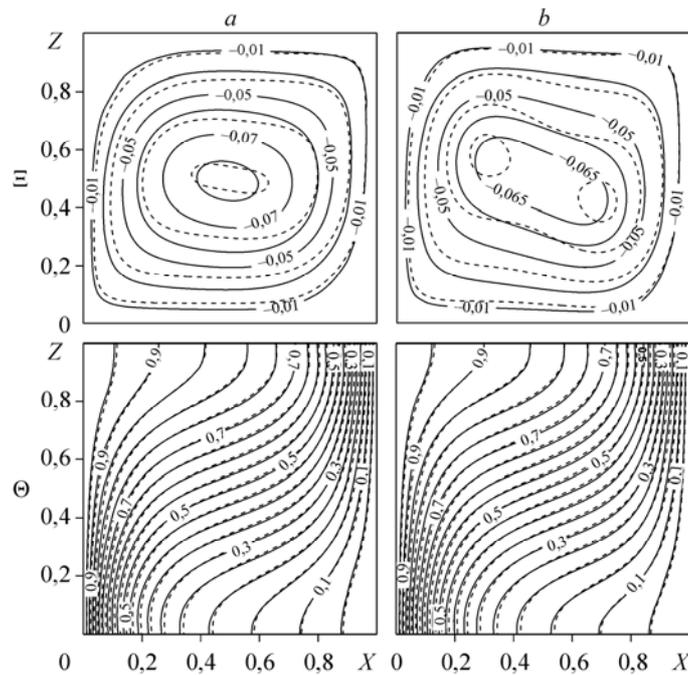
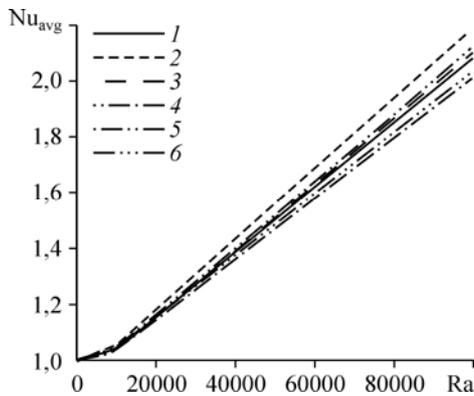


Рис. 8. Изолинии функции тока  $\Xi$  и температуры  $\Theta$  при  $Ra = 10^5$ ,  $Na = 50$ ,  $A = 1$ .  
 $\varphi = \pi/4$  (a),  $\pi/2$  (b).

при  $Na = 50$ . При фиксированном значении числа Рэлея можно отметить нелинейное влияние угла наклона  $\varphi$  на значения  $Nu_{avg}$  как в двумерном, так и в пространственном случаях. Максимальное значение  $Nu_{avg}$  достигается при угле наклона  $\varphi = \pi/4$  независимо от размерности задачи. Эффект достаточно интересный, тем более, что при  $Pr = 0,7$  такой зависимости интенсивности теплопереноса от ориентации вектора магнитной индукции не наблюдается. По всей видимости, основной причиной, приводящей к такой нелинейной зависимости среднего числа Нуссельта от угла наклона вектора магнитной индукции при  $Pr = 0,02$ , является взаимодействие между тепловыми пограничными слоями, толщина которых в случае расплава металла ( $Pr = 0,02$ ) значительно больше, чем для среды с числом Прандтля ( $Pr = 0,7$ ).

При малых значениях числа Рэлея ( $Ra \leq 4 \cdot 10^4$ ) изменение угла незначительно отражается на среднем числе Нуссельта, при увеличении  $Ra > 4 \cdot 10^4$  влияние  $\varphi$  заметно усиливается.



**Влияние геометрического параметра  $A = L_y/L$**

Известно, что численный анализ конвективного теплопереноса в пространственных объектах требует значительных временных затрат. Наличие внешнего магнитного поля может привести к увеличению времени вычислений. Поэтому при проведении подобных

Рис. 9. Зависимость среднего числа Нуссельта от параметров  $Ra$ ,  $\varphi$  и размерности задачи. Размерность задач: 2D —  $\varphi = 0$  (1),  $\pi/4$  (2),  $\pi/2$  (3); 3D —  $\varphi = 0$  (4),  $\pi/4$  (5),  $\pi/2$  (6).

исследований возникает вопрос, связанный с возможностью использования результатов двумерного приближения для описания интегрального теплообмена в трехмерном объекте.

В текущем параграфе проводится анализ влияния геометрического параметра  $A = L_y/L$ , отражающего изменение длины изотермических граней вдоль координаты  $Y$ , на структуру течения и теплоперенос.

На рис. 10 представлены изолинии функции тока  $\Xi$  и температуры  $\Theta$  в двумерном (сплошные линии) и трехмерном (штриховые линии в сечении  $Y=0,5$ ) случаях при  $Ra = 10^5$ ,  $Ha = 50$ ,  $\varphi = 0$  и различных значениях геометрического параметра  $A$ . Влияние

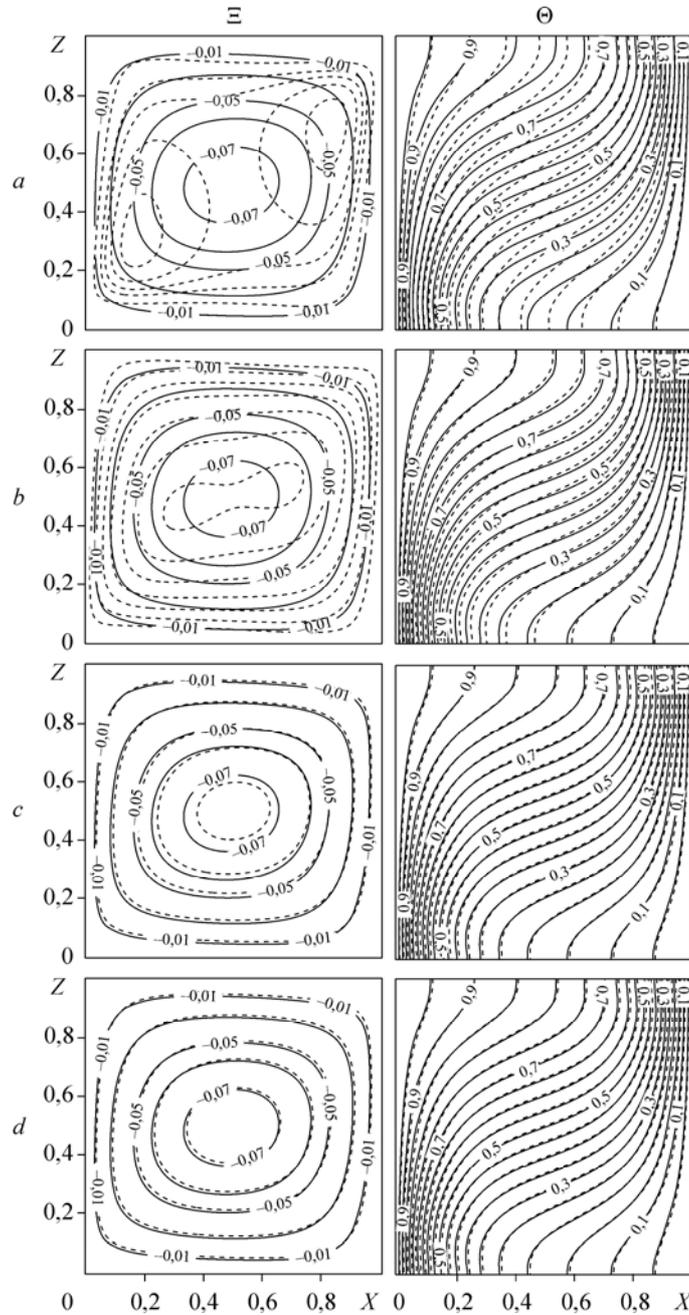


Рис. 10. Изолинии функции тока  $\Xi$  и температуры  $\Theta$  при  $Ra = 10^5$ ,  $Ha = 50$ ,  $\varphi = 0$ .  
 $A = 0,2$  (a),  $0,5$  (b),  $2$  (c),  $5$  (d).

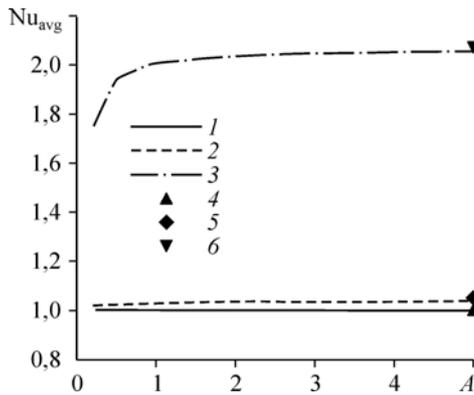


Рис. 11. Зависимость среднего числа Нуссельта от параметров  $Ra$ ,  $A$  и размерности задачи при  $Ha = 50$ ,  $\varphi = 0$ .

Размерность задач: 3D —  $Ra = 10^3$  (1),  $10^4$  (2),  $10^5$  (3), 2D —  $10^3$  (4),  $10^4$  (5),  $Ra = 10^5$  (6).

геометрического параметра относится только к пространственной постановке задачи, поэтому в двумерном случае распределения изолиний  $\Xi$  и  $\Theta$  для каждого значения  $A$  идентичны. Следует отметить, что в случае узких параллелепипедов при  $A = 0,2$  (рис. 10а) внутри формируется двухъядерная малоинтенсивная вихревая структура. При этом влияние конвективного механизма незначительно вследствие небольшого поперечного размера параллелепипеда. Расширение полости ( $A = 0,5$ , рис. 10b) приводит к уменьшению размеров двух ядер конвективного вихря и выравниванию поля температуры за счет развития тепловых пограничных слоев. При  $A = 1$  формируется одноядерный конвективный вихрь, подобный результатам двумерной модели, но меньшей интенсивности. Дальнейшее увеличение геометрического параметра приводит к росту скоростей движения среды и полному совпадению термогидродинамических структур для плоского и пространственного приближений (рис. 10d).

На рис. 11 представлены зависимости среднего числа Нуссельта на вертикальной нагреваемой стенке  $X = 0$  от числа Рэлея, геометрического параметра  $A$  и размерности задачи при  $Ha = 50$ ,  $\varphi = 0$ . Символами отмечены значения  $Nu_{avg}$  в двумерном приближении независимо от величины  $A$ , поскольку в плоском случае этот параметр отсутствует. Необходимо отметить, что при отсутствии внешнего магнитного поля для  $Pr = 0,7$  интегральную теплоотдачу можно рассчитывать с использованием двумерной модели при  $A \geq 1$  [11]. В случае магнитной естественной конвекции применение результатов двумерной модели для описания интегрального теплообмена также возможно при  $A \geq 1$  для умеренных внешних магнитных полей. При этом конфигурация течения в среднем сечении трехмерного объекта будет незначительно отличаться только при  $A \geq 2$ .

В табл. 2 представлена более полная информация относительно зависимости среднего числа Нуссельта на вертикальной нагреваемой стенке от чисел Рэлея и Гартмана, угла наклона  $\varphi$  вектора магнитной индукции и геометрического параметра  $A$  в сравнении с данными двумерной модели при  $Pr = 0,02$ . Полученные результаты для  $Nu_{avg}$  также можно использовать для верификации разрабатываемых численных алгоритмов моделирования магнитной естественной конвекции в замкнутых областях.

### Заключение

Численно решена стационарная задача ламинарной естественной конвекции расплава металла ( $Pr = 0,02$ ) внутри замкнутого параллелепипеда при наличии однородного магнитного поля. Представлены пространственные поля скорости и температуры, а также распределения изолиний функции тока и температуры, отражающие влияние определяющих комплексов —  $10^3 \leq Ra \leq 10^5$ ,  $0 \leq Ha \leq 100$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ,  $0,2 \leq A \leq 5$  — на структуру течения и теплоперенос. Установлено, что среднее число Нуссельта на вертикальной изотермической стенке является возрастающей функцией числа Рэлея и убывающей функцией числа Гартмана. Повышение числа Гартмана проявляется в ослаблении

Таблица 2

Зависимость среднего числа Нуссельта от Ra, Ha,  $\varphi$  и A

Ra	Ha	$\varphi$	Двумерный случай	Трехмерный случай				
				A = 0,2	A = 0,5	A = 1	A = 2	A = 5
$10^3$	0	–	1,0908	1,0021	1,0225	1,0437	1,0622	1,0791
		0	1,0004	1,0024	1,0015	1,0005	1,0004	1,0004
		$\pi/4$	1,0005	1,0016	1,0012	1,0003	1,0004	1,0004
	100	$\pi/2$	1,0004	1,0023	1,0020	1,0008	1,0004	1,0004
		0	1,0004	1,0042	1,0043	1,0014	1,0002	1,0001
		4	1,0001	1,0049	1,0048	1,0013	1,0001	1,0001
	2	1,0000	1,0050	1,0043	1,0004	1,0002	1,0001	
$10^4$	0	–	1,8345	1,1960	1,4494	1,6130	1,7079	1,7670
		0	1,0371	1,0176	1,0272	1,0321	1,0348	1,0360
		$\pi/4$	1,0528	1,0191	1,0355	1,0433	1,0484	1,0506
	100	$\pi/2$	1,0366	1,0161	1,0264	1,0331	1,0342	1,0355
		0	1,0031	1,0055	1,0061	1,0033	1,0028	1,0029
		$\pi/4$	1,0045	1,0045	1,0063	1,0034	1,0040	1,0042
	$\pi/2$	1,0029	1,0074	1,0087	1,0027	1,0028	1,0027	
$10^5$	0	–	3,2192	2,5170	2,8526	2,9952	3,1052	3,1967
		0	2,0758	1,7559	1,9430	2,0093	2,0428	2,0604
		$\pi/4$	2,1800	1,8464	2,0411	2,1064	2,1402	2,1599
	100	$\pi/2$	2,1027	1,7642	1,9526	2,0334	2,0666	2,0857
		0	1,2365	1,1693	1,2013	1,2159	1,2234	1,2318
		$\pi/4$	1,3530	1,2355	1,2833	1,3200	1,3383	1,3478
	$\pi/2$	1,2408	1,1664	1,2367	1,2330	1,2362	1,2375	

конвективного теплопереноса и доминировании механизма теплопроводности. При высоких числах Гартмана изменение ориентации вектора магнитной индукции приводит к модификации структуры течения при незначительных изменениях поля температуры. Максимальное значение среднего числа Нуссельта на изотермической вертикальной грани достигается при угле наклона  $\varphi = \pi/4$  независимо от размерности задачи. Применение результатов двумерной модели для описания интегрального теплообмена в параллелепипеде возможно при  $A \geq 1$  для умеренных внешних магнитных полей, при этом конфигурация течения в среднем сечении трехмерного объекта будет незначительно отличаться только при  $A \geq 2$ .

### Список литературы

1. Кирко И.М., Кирко Г.Е. Магнитная гидродинамика. Современное видение проблем. Ижевск: РХД, 2009. 632 с.
2. Davidson P.A. An introduction to magnetohydrodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 431 p.
3. Никулин И.Л., Перминов А.В. Математическая модель конвекции никелевого расплава при индукционном переплаве. Решение магнитной подзадачи // Вест. Пермского нац. иссл. политехн. ун-та. Механика. 2013. № 3. С. 192–209.
4. Okada K., Ozoe H. Experimental heat transfer rates of natural convection of molten gallium suppressed under an external magnetic field in either the X, Y, or Z direction // ASME. J. Heat Transfer. 1992. Vol. 114, No. 1. P. 107–114.
5. Benos L.Th., Kakarantzas S.C., Sarris I.E., Grecos A.P., Vlachos N.S. Analytical and numerical study of MHD natural convection in a horizontal shallow cavity with heat generation // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 75. P. 19–30.
6. Yu P.X., Qiu J.X., Qin Q., Tian Zh.F. Numerical investigation of natural convection in a rectangular cavity under different directions of uniform magnetic field // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2013. Vol. 67. P. 1131–1144.
7. Hossain M.S., Alim M.A. MHD free convection within trapezoidal cavity with non-uniformly heated bottom wall // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 69. P. 327–336.

8. Kakarantzias S.C., Sarris I.E., Vlachos N.S. Natural convection of liquid metal in a vertical annulus with lateral and volumetric heating in the presence of a horizontal magnetic field // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2011. Vol. 54, No. 15. P. 3347–3356.
9. Heiser W.H., Shercliff J.A. A simple demonstration of the Hartmann layer // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 22. P. 701–707.
10. Wang H.Y., Zhang X.D., Ding K.K., Wang W. Numerical simulation of nature convection and heat transfer of the liquid LiPb in cubic enclosure with a magnetic field // Fusion Engng and Design. 2010. Vol. 85. P. 1215–1219.
11. Терехов В.И., Экаид А.Л. Трехмерная ламинарная конвекция внутри параллелепипеда с нагревом боковых стенок // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49, № 6. С. 905–911.
12. Sheremet M.A. Mathematical simulation of nonstationary regimes of natural convection in a cubical enclosure with finite-thickness heat-conducting walls // J. of Engng Thermophysics. 2013. Vol. 22, No. 4. P. 298–308.
13. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2011. 328 с.
14. Versteeg H.K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method. N.Y.: Wiley, 1995. 257 p.
15. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
16. Liaqat A., Baytas A.C. Conjugate natural convection in a square enclosure containing volumetric sources // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2001. Vol. 44, No. 17. P. 3273–3280.
17. Sarris I.E., Zikos G.K., Grecos A.P., Vlachos N.S. On the limits of validity of the low magnetic Reynolds number approximation in MHD natural-convection heat transfer // Numerical Heat Transfer: Part B. 2006. Vol. 50, No. 2. P. 157–180.
18. Pirmohammadi M., Ghassemi M. Effect of magnetic field on convection heat transfer inside a tilted square enclosure // Intern. Commun. in Heat and Mass Transfer. 2009. Vol. 36, No. 7. P. 776–780.
19. Fusegi T., Hyun J.M., Kuwahara K. A numerical study of 3D natural convection in a differently heated cubical enclosure // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1991. Vol. 34, No. 6. P. 1543–1557.
20. Бессонов О.А., Брайловская В.А., Никитин С.А., Полежаев В.И. Тест для численных решений трехмерной задачи о естественной конвекции в кубической полости // Математическое моделирование. 1999. Т. 11, № 12. С. 51–58.
21. Бондарева Н.С., Шеремет М.А. Влияние однородного магнитного поля на режимы естественной конвекции в замкнутой квадратной полости // Современные проблемы математики и механики: мат. III Всерос. молодежной науч. конф., Томск 23–25 апреля 2012. Томск: Изд-во ТГУ, 2012. С. 83–88.

*Статья поступила в редакцию 17 мая 2014 г.*