

**МЕТОД КОМПЕНСАЦИИ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК
ИЗМЕРЕНИЙ В УГЛОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ**

Ю. Г. Булычев, А. П. Лапсарь

*Ростовский военный институт ракетных войск,
344027, г. Ростов-на-Дону, пр. М. Нагибина, 24/50
E-mail: ProfBulychev@yandex.ru*

Развит метод компенсации систематических ошибок (СО) измерений в угломерных системах, основу которого составляют инварианты плоскостного движения объекта. Получены точные уравнения для СО измерения широты местоположения объекта без учета флуктуационных погрешностей измерений, а также аналитические выражения для вычисления дисперсии ошибки оценивания СО при учете данных погрешностей, которые позволяют предъявить обоснованные требования к тактико-техническим характеристикам угломерных систем наблюдения за объектами.

Ключевые слова: угломерные системы, инварианты движения, систематические ошибки, флуктуационные ошибки.

Введение. Основными показателями качества измерительной информации считают ее высокую точность, достоверность и своевременность получения. Несовершенство измерительной аппаратуры, наличие разнообразных помех, различного рода ограничения и допуски принятой модели измерения приводят к искажению поступающей к потребителю информации за счет присутствия в результатах измерений инструментальных погрешностей (ИП), а также флуктуационных и систематических ошибок (ФО и СО). Проблема компенсации ошибок актуальна как для существующих, так и перспективных информационно-измерительных систем. Снижение ИП осуществляется за счет улучшения технических характеристик измерительной аппаратуры, снижение ФО – различными методами обработки, в частности фильтрацией, а СО – путем внедрения оригинальных методов обработки результатов измерений.

Компенсация СО является достаточно сложной задачей, однако ее решение позволяет значительно повысить точность измерений, так как данная погрешность присутствует на всех этапах обработки и ее доля в конечном результате может многократно увеличиться. Особую значимость данная проблема приобретает для угломерных оптических систем, используемых при решении навигационных задач [1–5].

Классические методы оценки постоянных СО в угломерных измерениях имеют существенный недостаток, связанный с неполным использованием априорных данных о характере движения объекта. В этих методах применяются только функциональные зависимости оцениваемых величин от измеряемых [1–3], что приводит к увеличению размерности решаемых задач из-за расширения пространства состояний и, как следствие, к известному эффекту «размывания» точности. В данной работе предлагается метод, позволяющий избавиться от указанных проблем для случая плоскостного движения объекта при наличии постоянных СО в измерениях широты и долготы объекта. Плоскостное движение объекта является типичным особенно на небольших интервалах [4–6].

Расчет траектории объекта, как правило, производится в два этапа. На первом этапе с использованием достаточно простых алгоритмов определяется приближенная траектория, на втором – ее параметры уточняются более совершенными методами статистической обработки результатов измерений навигационных параметров. Большинство известных методов статистической обработки, таких как метод наименьших квадратов, максимального правдоподобия и других, требуют достаточно сложных и трудоемких вычислений.

СО измерений угловых координат могут быть скомпенсированы на втором этапе в рамках известных статистических методов [1–5], однако получаемые алгоритмы оценки расширенного вектора состояния объекта сложно реализуемы и не обеспечивают требуемой точности расчетов. В связи с этим желательно уже на первом этапе оценки параметров траектории иметь достаточно простые алгоритмы компенсации СО, позволяющие значительно упростить реализацию статистических методов обработки результатов измерений, используемых на втором этапе. Необходимо учитывать, что результирующие оценки параметров движения объекта, полученные после реализации второго этапа, оказываются смещенными за счет так называемых вторичных СО, природа которых отлична от СО, содержащихся в первичной измерительной информации [4].

Таким образом, выявление и учет СО как на первом, так и на втором этапах определения параметров траектории объекта является важнейшей задачей навигационных измерений.

Целью предлагаемой работы является создание метода оценивания СО измерения широты местоположения объекта на основе инвариантов его плоскостного движения при наличии ФО в измерениях угловых координат.

Постановка задачи. Предположим, что объект движется в пространстве под действием притяжения и некоторой возмущающей силы. Рассмотрим прямоугольную абсолютную систему координат XYZ и обозначим через F_x , F_y и F_z проекции возмущающей силы $F = [F_x, F_y, F_z]^T$ на ее оси. Уравнение возмущенного движения объекта запишется в виде

$$\frac{dP}{dt} = G(t, P, F), \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

где $P = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ – вектор параметров движения объекта;

$$G(t, P, F) = \left[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, -\frac{\mu x}{r^3} + F_x, -\frac{\mu y}{r^3} + F_y, -\frac{\mu z}{r^3} + F_z \right]^T, \quad \mu = f(M + M_0),$$

f – постоянная тяготения, M и M_0 – массы планеты и объекта навигации соответственно, $r = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$.

Полагаем, что в течение всего времени измерения $[t_0, T]$ движение объекта происходит в одной плоскости. Случай плоскостного движения объекта особенно на небольших интервалах с априори неизвестной или известной с низкой точностью правой частью уравнения (1) на практике является достаточно распространенным [4–6]. Это накладывает некоторые ограничения на вектор возмущений $F = [F_x, F_y, F_z]^T$ и требует выполнения очевидного условия

$$\begin{vmatrix} P_1^T \\ P_{10}^T \\ H_0^T \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

где $P_1 = [x, y, z]^T$, $P_{10} = P_1(t_0)$, $H_0 = P_{20}V_0^{-1}$, $P_2 = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$, $P_{20} = P_2(t_0)$, $V_0 = |P_{20}|$.

Для двухканальной угломерной системы характерна следующая модель измерений:

$$\hat{\beta} = \beta^* + \delta n_\beta = \beta + S_\beta + \delta n_\beta, \quad \hat{\beta} \in [-\pi/2, \pi/2], \quad (3)$$

$$\hat{\alpha} = \alpha^* + \delta n_\alpha = \alpha + S_\alpha + \delta n_\alpha, \quad \hat{\alpha} \in [0, 2\pi], \quad (4)$$

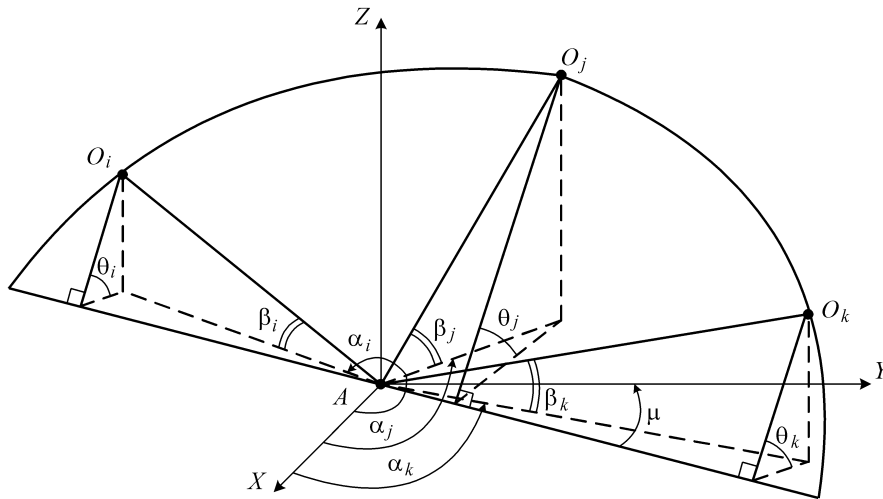
где $\beta = \beta(t)$, $\alpha = \alpha(t)$ – истинные сферические координаты объекта; S_β, S_α – постоянные СО измерений; $\delta n_\beta = \delta n_\beta(t)$, $\delta n_\alpha = \delta n_\alpha(t)$ – ФО с известными статистическими характеристиками; $t \in [t_0, T]$.

Как отмечалось во введении, представляет интерес разработка метода компенсации СО S_β и S_α в угломерных системах наблюдения за объектами. Однако в такой постановке задача совместного оценивания СО S_β и S_α не имеет решения, т. е. не выполняются известные условия наблюдаемости [5]. Поэтому ограничимся разработкой метода компенсации СО S_β косвенных измерений широты положения объекта с учетом (3) и (4), т. е. при наличии СО и ФО в обоих каналах угломерной системы.

Решение задачи в детерминированной постановке. Полагаем, что объект движется в плоскости произвольным образом. Рассмотрим идеальную ситуацию, когда ФО отсутствуют, т. е. $n_\beta \equiv 0$ и $n_\alpha \equiv 0$. Получим точное решение задачи компенсации СО S_β с привлечением данных $\hat{\beta} = \beta + S_\beta$ и $\hat{\alpha} = \alpha + S_\alpha$.

Плоскостному движению объекта соответствуют инварианты (см. рисунок)

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \beta_i}{\sin(\alpha_i + \mu)} = \frac{\operatorname{tg} \beta_j}{\sin(\alpha_j + \mu)} = \frac{\operatorname{tg} \beta_k}{\sin(\alpha_k + \mu)}, \\ \operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg} \beta_j \cdot \sin \alpha_i - \operatorname{tg} \beta_i \cdot \sin \alpha_j}{\operatorname{tg} \beta_i \cdot \cos \alpha_j - \operatorname{tg} \beta_j \cdot \cos \alpha_i} = \frac{\operatorname{tg} \beta_k \cdot \sin \alpha_j - \operatorname{tg} \beta_j \cdot \sin \alpha_k}{\operatorname{tg} \beta_j \cdot \cos \alpha_k - \operatorname{tg} \beta_k \cdot \cos \alpha_j}, \end{cases} \quad (5)$$



где θ и μ – углы, определяющие положение плоскости, в которой происходит движение объекта;

$$\frac{d\theta}{dt} \equiv \frac{d\mu}{dt} \equiv 0 \quad \forall t \in [t_0, T];$$

$$\beta_{i(j,k)} = \beta_i(t_{i(j,k)}), \quad \alpha_{i(j,k)} = \alpha_i(t_{i(j,k)}), \quad t_i, t_j, t_k \in [t_0, T].$$

На основе инвариантов (5) получим базовое уравнение для оценки $CO S_\beta$ по трем замерам широты β и долготы α местоположения объекта:

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{tg}(\beta_j^* - S_\beta) \cdot \sin \alpha_i - \operatorname{tg}(\beta_i^* - S_\beta) \cdot \sin \alpha_j}{\operatorname{tg}(\beta_i^* - S_\beta) \cdot \cos \alpha_j - \operatorname{tg}(\beta_j^* - S_\beta) \cdot \cos \alpha_i} = \\ & = \frac{\operatorname{tg}(\beta_k^* - S_\beta) \cdot \sin \alpha_j - \operatorname{tg}(\beta_j^* - S_\beta) \cdot \sin \alpha_k}{\operatorname{tg}(\beta_j^* - S_\beta) \cdot \cos \alpha_k - \operatorname{tg}(\beta_k^* - S_\beta) \cdot \cos \alpha_j}, \quad i \neq j \neq k, \quad i, j, k \in \overline{1, N}. \quad (6) \end{aligned}$$

Считая, что $\alpha_{i(j,k)} + \mu \neq \pi n$, $|\alpha_i - \alpha_j| \neq \pi n$, $|\alpha_j - \alpha_k| \neq \pi n$, $n \in \{0, 1, 2\}$, $\beta_{i(j,k)} \neq (\pi/2)n$, $n \in \{0, 1\}$, и с учетом (6) получим кубическое уравнение

$$\sum_{n=0}^3 A_n \operatorname{tg}^n S_\beta = 0, \quad (7)$$

где

$$A_n = (C_n, L) = \sum_{g=1}^3 C_{ng} L_g, \quad (8)$$

(\cdot, \cdot) – скобки скалярного произведения двух векторов,

$$\begin{aligned}
C_0 &= \{\operatorname{tg} \beta_k^*, \operatorname{tg} \beta_j^*, \operatorname{tg} \beta_i^*\}, \\
C_1 &= \{1 - \operatorname{tg} \beta_k^* (\operatorname{tg} \beta_i^* + \operatorname{tg} \beta_j^*), 1 - \operatorname{tg} \beta_j^* (\operatorname{tg} \beta_i^* + \operatorname{tg} \beta_k^*), 1 - \operatorname{tg} \beta_i^* (\operatorname{tg} \beta_j^* + \operatorname{tg} \beta_k^*)\}, \\
C_2 &= \{\operatorname{tg} \beta_i^* + \operatorname{tg} \beta_j^* - d, \operatorname{tg} \beta_j^* + \operatorname{tg} \beta_k^* - d, \operatorname{tg} \beta_j^* + \operatorname{tg} \beta_k^* - d\}, \quad (9) \\
C_3 &= \{\operatorname{tg} \beta_i^* \cdot \operatorname{tg} \beta_j^*, \operatorname{tg} \beta_i^* \cdot \operatorname{tg} \beta_k^*, \operatorname{tg} \beta_j^* \cdot \operatorname{tg} \beta_k^*\}, \\
C_n &= C_n(i, j, k) = \{C_{ng} = C_{ng}(i, j, k), g = 1, 2, 3\}, \\
d &= d(i, j, k) = \operatorname{tg} \beta_k^* \cdot \operatorname{tg} \beta_j^* \cdot \operatorname{tg} \beta_i^*, \\
L &= L(i, j, k) = \{L_g = L_g(i, j, k), g = 1, 2, 3\}, \\
L &= \{\sin(\alpha_i - \alpha_j), \sin(\alpha_k - \alpha_i), \sin(\alpha_j - \alpha_k)\} = \\
&= \{\sin(\alpha_i^* - \alpha_j^*), \sin(\alpha_k^* - \alpha_i^*), \sin(\alpha_j^* - \alpha_k^*)\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Непосредственно из (10) следует, что алгоритм вычисления СО S_β оказывается инвариантным по отношению к СО S_α , т. е. не реагирует на присутствие в измерениях долготы СО S_α любой величины. Это позволяет расширить применение предлагаемого метода для повышения точности измерений за счет компенсации СО S_β .

Анализ задачи (см. рисунок) и соотношений (8)–(10) показывает, что уравнение (7) при установленных выше ограничениях имеет один действительный и два комплексных корня. Для отыскания действительного корня запишем уравнение (7) в канонической форме [7]:

$$v^3 + 3\tilde{A}_1 v + 2\tilde{A}_0 = 0, \quad (11)$$

где

$$2\tilde{A}_0 = \frac{2A_2^3}{27A_3^3} - \frac{A_2 A_1}{3A_3^2} + \frac{A_0}{A_3}; \quad 3\tilde{A}_1 = \frac{3A_3 A_1 - A_2^2}{3A_3^2}, \quad (12)$$

$$v = \operatorname{tg} S_\beta + \frac{A_2}{3A_3}. \quad (13)$$

Рассмотрим возможные комбинации, возникающие в данной задаче в зависимости от знаков коэффициента \tilde{A}_1 и дискриминанта $D = \tilde{A}_0^2 + \tilde{A}_1^3$.

1. $\tilde{A}_1 < 0$, $D > 0$. Действительный корень уравнения (7) с учетом (11)–(13) находится по формуле

$$\operatorname{tg} S_\beta = -2Q \operatorname{ch}(\gamma/3) + p, \quad (14)$$

где $\text{ch } \gamma = \frac{1}{2}(e^\gamma + e^{-\gamma}) = \frac{\tilde{A}_0}{Q^3}$, $\gamma = \text{arch}\left(\frac{\tilde{A}_0}{Q^3}\right)$, $Q = \pm |\tilde{A}_1|^{1/2}$, $\rho = -\frac{A_2}{3A_3}$.

2. $\tilde{A}_1 > 0$, $D > 0$. В этом случае

$$\text{tg } S_\beta = -2Q \text{sh}(\gamma/3) + \rho, \quad (15)$$

где $\text{sh } \gamma = \frac{1}{2}(e^\gamma - e^{-\gamma}) = \frac{\tilde{A}_0}{Q^3}$, $\gamma = \text{arsh}\left(\frac{\tilde{A}_0}{Q^3}\right)$, $Q = \pm |\tilde{A}_1|^{1/2}$.

3. $\tilde{A}_1 < 0$, $D < 0$. Данная комбинация при установленных выше ограничениях не реализуема.

В формулах (14) и (15) знак коэффициента Q должен совпадать со знаком \tilde{A}_0 .

Оценка точностных характеристик при наличии флуктуационных ошибок. Соотношения (7)–(15) определяют алгоритм вычисления точного значения СО S_β (без учета ФО измерений), обеспечивая равенство нулю методической погрешности. Вместе с тем оценка СО является статистической задачей, которая решается на основе известных методов оптимального оценивания. Проведем оценку точностных характеристик предлагаемого метода с учетом присутствия в измерениях углов β и α не только СО S_β и S_α , но и ФО δn_β и δn_α :

$$\hat{\alpha} = \alpha^* + \delta n_\alpha = \alpha + S_\alpha + \delta n_\alpha, \quad \hat{\beta} = \beta^* + \delta n_\beta = \beta + S_\beta + \delta n_\beta.$$

Представим искомую СО в виде $S_\beta = \psi(\lambda)$, где $\psi(\cdot)$ – известная функция, вид которой определяется соотношениями (14), (15) в зависимости от рассмотренных выше комбинаций;

$$\lambda = \{\lambda_m, m = \overline{1,6}\}, \quad \lambda_1 = L_1 = \sin(\alpha_i^* - \alpha_j^*) = \sin(\alpha_i - \alpha_j),$$

$$\lambda_2 = L_3 = \sin(\alpha_j^* - \alpha_k^*) = \sin(\alpha_j - \alpha_k),$$

$$\lambda_3 = L_2 = \sin(\alpha_k^* - \alpha_i^*) = \sin(\alpha_k - \alpha_i),$$

$$\lambda_4 = C_{03} = \text{tg } \beta_i^*, \quad \lambda_5 = C_{02} = \text{tg } \beta_j^*, \quad \lambda_6 = C_{01} = \text{tg } \beta_k^*.$$

Если для случайных величин $\hat{\lambda}_m = \lambda_m^* + \delta n_{\lambda_m}$, $m = \overline{1,6}$, известны их математические ожидания M_{λ_m} , $m = \overline{1,6}$, и корреляционная матрица $K_\lambda = [K_{\lambda_n \lambda_m}]$, $n, m = \overline{1,6}$, то для высокоточных измерений (когда справедлива линеаризация функции $\psi(\lambda)$) возможно вычислить дисперсию СО S_β [4]:

$$\sigma_{S_\beta}^2(i, j, k) = \sum_{n=1}^6 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_n} \right)_{M_\lambda}^2 \sigma_{\lambda_n}^2 + 2 \sum_{n=1}^6 \sum_{\substack{m=1 \\ n < m}}^6 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_n} \right)_{M_\lambda} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_m} \right)_{M_\lambda} K_{\lambda_n \lambda_m}, \quad (16)$$

где $M_\lambda = \{M_{\lambda_n}, n = \overline{1,6}\}$.

Если справедлив используемый принцип линеаризации, соотношение (16) позволяет исследовать зависимость точности оценивания СО S_β от характера движения объекта в плоскости, выбора точек $i, j, k \in \overline{1, N}$ и статистических характеристик ФО.

Допустим, что априори известны или вычислены дисперсии $\sigma_Q^2, \sigma_\gamma^2, \sigma_\rho^2$ и математические ожидания M_Q, M_γ, M_ρ случайных величин $\hat{Q}, \hat{\gamma}$ и $\hat{\rho}$ соответственно. Тогда по аналогии с (16) для (14) будем иметь

$$\sigma_{S_\beta}^2(i, j, k) = \left[1 + \left(\rho - 2Q \operatorname{ch} \frac{\gamma}{3} \right)^2 \right]^{-2} \times$$

$$\times \left[4 \operatorname{ch}^2 \frac{\gamma}{3} \sigma_Q^2 + \frac{4}{9} Q^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma}{3} \sigma_\gamma^2 + \sigma_\rho^2 + \frac{4}{3} Q \operatorname{sh} \frac{2\gamma}{3} K_{Q\gamma} - 4 \operatorname{ch} \frac{\gamma}{3} K_{Q\rho} - \frac{4}{3} Q \operatorname{sh} \frac{\gamma}{3} K_{\gamma\rho} \right],$$
(17)

где $K_{Q\gamma}, K_{Q\rho}, K_{\gamma\rho}$ – корреляционные моменты случайных величин $\hat{Q}, \hat{\gamma}$ и $\hat{\rho}$, которые можно определить по известным характеристикам M_λ и K_λ векторной случайной величины $\hat{\lambda}$ по формулам (8)–(15).

По аналогии с (16) из (15) получим

$$\sigma_{S_\beta}^2(i, j, k) = \left[1 + \left(\rho - 2Q \operatorname{sh} \frac{\gamma}{3} \right)^2 \right]^{-2} \times$$

$$\times \left[4 \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma}{3} \sigma_Q^2 + \frac{4}{9} Q^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\gamma}{3} \sigma_\gamma^2 + \sigma_\rho^2 + \frac{4}{3} Q \operatorname{sh} \frac{2\gamma}{3} K_{Q\gamma} - 4 \operatorname{sh} \frac{\gamma}{3} K_{Q\rho} - \frac{4}{3} Q \operatorname{ch} \frac{\gamma}{3} K_{\gamma\rho} \right].$$
(18)

При малых значениях СО S_β в зависимости от требуемой точности оценивания можно опустить члены высшего порядка малости $O(\operatorname{tg}^d S_\beta)$, $d \in \{2, 3\}$. Опуская в (7) кубические и квадратные члены, запишем линейное уравнение, решение которого имеет вид

$$S_\beta = -\operatorname{arctg} [\tau/\delta],$$
(19)

где

$$\delta = [1 - \lambda_6(\lambda_4 + \lambda_5)]\lambda_1 + [1 - \lambda_5(\lambda_4 + \lambda_6)]\lambda_3 + [1 - \lambda_4(\lambda_5 + \lambda_6)]\lambda_2,$$

$$\tau = \lambda_1\lambda_6 + \lambda_3\lambda_5 + \lambda_2\lambda_4.$$

Для высокоточных измерений с учетом (19) получим выражение для дисперсии:

$$\sigma_{S_\beta}^2(i, j, k) = \frac{\delta^{-4}}{[1 + \tau^2/\delta^2]^2} \sum_{d=1}^6 (\tau_d \delta - \tau \delta_d)^2 \sigma_{\lambda_d}^2,$$
(20)

где

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \lambda_6, \quad \tau_2 = \lambda_4, \quad \tau_3 = \lambda_5, \quad \tau_4 = \lambda_2, \quad \tau_5 = \lambda_3, \quad \tau_6 = \lambda_1, \\ \delta_1 &= 1 - \lambda_6(\lambda_4 + \lambda_5), \quad \delta_2 = 1 - \lambda_4(\lambda_5 + \lambda_6), \\ \delta_3 &= 1 - \lambda_5(\lambda_4 + \lambda_6), \quad \delta_4 = -\lambda_1\lambda_6 - \lambda_5(\lambda_3 + \lambda_2), \\ \delta_5 &= -\lambda_1\lambda_6 - \lambda_4(\lambda_3 + \lambda_2), \quad \delta_6 = -\lambda_5\lambda_3 - \lambda_4(\lambda_1 + \lambda_2).\end{aligned}$$

Формула (20), а также соотношения (17) и (18) могут быть использованы для исследования точности предлагаемого подхода при оценке СО (при условии ее малости) в различных режимах работы угломерной системы.

Компенсация СО остается статистической задачей даже с учетом применения сглаженных значений. При этом представляет интерес синтез алгоритмов компенсации СО при отсутствии априорной информации о статистических характеристиках измеряемых величин. Определение СО S_β может основываться на использовании алгоритмов, устойчивых к аномальным измерениям, например мажоритарных или близких к ним, которые хорошо известны в практике обработки результатов многократных измерений [8].

Для реальных измерений утверждение о плоскостном движении объекта может оказаться неправомерным, т. е. не выполняется условие (2). Оценим методическую погрешность для этого случая.

Поскольку предлагаемый метод использует лишь три замера широты и долготы (см. рисунок), то для оценки указанной погрешности достаточно ограничиться следующими измерениями:

$$\begin{aligned}\beta_i^* &= \beta_i + S_\beta, \quad \alpha_i^* = \alpha_i + S_\alpha, \quad \beta_j^* = \beta_j + S_\beta, \quad \alpha_j^* = \alpha_j + S_\alpha, \\ \beta_k' &= \beta_k^* + \delta\beta = \beta_k + S_\beta + \delta\beta, \quad \alpha_k^* = \alpha_k + S_\alpha.\end{aligned}$$

Здесь «возмущение» $\delta\beta$ появляется вследствие нарушения условия (2). Искаженные возмущениями $\delta\beta$ результаты измерений порождают две плоскости, каждая из которых определяется парой углов $\mu(i, j) = \mu(t_i, t_j)$, $\theta(i, j) = \theta(t_i, t_j)$ и $\mu(j, k) = \mu(t_j, t_k)$, $\theta(j, k) = \theta(t_j, t_k)$ соответственно:

$$\begin{aligned}\mu(i, j) &= \arctg \left\{ \frac{\operatorname{tg} \beta_j \cdot \sin \alpha_i - \operatorname{tg} \beta_i \cdot \sin \alpha_j}{\operatorname{tg} \beta_i \cdot \cos \alpha_j - \operatorname{tg} \beta_j \cdot \cos \alpha_i} \right\}, \quad \theta(i, j) = \arctg \left\{ \frac{\operatorname{tg} \beta_i}{\sin(\alpha_i + \mu(i, j))} \right\}, \\ \mu(j, k) &= \arctg \left\{ \frac{\operatorname{tg}(\beta_k + \delta\beta) \cdot \sin \alpha_j - \operatorname{tg} \beta_j \cdot \sin \alpha_k}{\operatorname{tg} \beta_j \cdot \cos \alpha_k - \operatorname{tg}(\beta_k + \delta\beta) \cdot \cos \alpha_j} \right\}, \\ \theta(j, k) &= \arctg \left\{ \frac{\operatorname{tg} \beta_j}{\sin(\alpha_j + \mu(j, k))} \right\}.\end{aligned}$$

Поскольку в общем случае при невыполнении условия (2) $\mu(i, j) \neq \mu(j, k)$, то с учетом (6) получим следующее уравнение (относительно методической погрешности $\delta S_\beta = \delta S_\beta(i, j, k)$) для вычисления СО S_β :

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta_j - \delta S_\beta) \cdot \sin \alpha_i - \operatorname{tg}(\beta_i - \delta S_\beta) \cdot \sin \alpha_j}{\operatorname{tg}(\beta_i - \delta S_\beta) \cdot \cos \alpha_j - \operatorname{tg}(\beta_j - \delta S_\beta) \cdot \cos \alpha_i} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\beta_k + \delta\beta - \delta S_\beta) \cdot \sin \alpha_j - \operatorname{tg}(\beta_j - \delta S_\beta) \cdot \sin \alpha_k}{\operatorname{tg}(\beta_j - \delta S_\beta) \cdot \cos \alpha_k - \operatorname{tg}(\beta_k + \delta\beta - \delta S_\beta) \cdot \cos \alpha_j}, \quad i \neq j \neq k, \quad i, j, k \in \overline{1, N}.$$

На базе данного уравнения обосновывается возможность применения предлагаемого метода компенсации СО в каждом конкретном случае в зависимости от характера движения объекта. Кроме того, появляется возможность аргументированного выбора совокупности результатов навигационных измерений, практически обеспечивающих выполнение условия (2).

Например, для линейного случая (когда в (7) не учитываются кубический и квадратный члены) из (18) и (19) получим

$$\delta S_\beta = \operatorname{arctg} [\tau' / \delta'],$$

где

$$\tau' = \lambda_1 \lambda'_6 + \lambda_3 \lambda'_5 + \lambda_2 \lambda'_4,$$

$$\delta' = [1 - \lambda'_6(\lambda'_4 + \lambda'_5)]\lambda_1 + [1 - \lambda'_5(\lambda'_4 + \lambda'_6)]\lambda_3 + [1 - \lambda'_4(\lambda'_5 + \lambda'_6)]\lambda_2,$$

$$\lambda'_6 = \operatorname{tg}(\beta_k + \delta\beta).$$

Результаты проведенных экспериментов по оценке СО S_β предложенным методом показали высокую его эффективность, которая существенно возрастает с уменьшением ФО в результатах измерений. Дальнейшее повышение точности может обеспечиваться путем статистической обработки совокупности оценок S_β .

Заключение. Предложенный в данной работе метод дает возможность получить точное (без учета ФО) решение задачи оценки СО угломерных измерений широты положения объекта независимо от диапазона ее возможных значений. Полученные аналитические выражения для дисперсий позволяют предъявить обоснованные требования к максимально допустимым ФО измерения широты и долготы объекта в зависимости от необходимых точностных характеристик оценивания СО. Тем самым появляется возможность выбора средств измерений в зависимости от их точности для оснащения измерительного комплекса или формирования измерительных каналов информационно-измерительных систем.

Показано, что алгоритм вычисления СО широты на основе базового кубического уравнения (7) инвариантен по отношению к СО, содержащимся в измерениях долготы. Линеаризация уравнения (7) обеспечивает при условии малости СО значительное упрощение алгоритма ее вычисления.

Предлагаемый метод хорошо согласуется с классическими методами оптимального статистического оценивания, предполагающими включение СО в расширенный вектор состояния объекта. При этом можно сократить раз-

мерность исходной задачи (на втором этапе обработки измерений) за счет компенсации СО, что обеспечит повышение точности итогового результата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жданюк Б. Ф.** Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.
2. **Шебшаевич В. С.** Введение в теорию космической навигации. М.: Сов. радио, 1971.
3. **Теоретические основы радиолокации** /Под ред. Я. Д. Ширмана. М.: Сов. радио, 1970.
4. **Бульчев Ю. Г., Манин А. П.** Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000.
5. **Брандин В. Н., Разоренов Г. Н.** Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978.
6. **Разоренов Г. Н., Бахрамов Э. А., Титов Ю. Ф.** Системы управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1978.
7. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1978.
8. **Гильбо Е. Н., Челпанов И. Б.** Обработка сигналов на основе упорядоченного выбора. М.: Сов. радио, 1976.

Поступила в редакцию 25 января 2008 г.
