

ТЕЧЕНИЕ ПРАНДТЛЯ — МАЙЕРА СМЕСИ ГАЗОВ С БОЛЬШИМ РАЗЛИЧИЕМ МОЛЕКУЛЯРНЫХ МАСС

УДК 533.6.011.8

С. В. Долгушев, В. М. Фомин

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Неоднородность течения газовой смеси, состоящей из молекул с большим различием молекулярных масс, приводит к возникновению температурной и скоростной неравномерности компонентов [1–3]. Относительно малая скорость обмена импульсом и энергией между молекулами различного сорта приводит к установлению максвелловского распределения по скоростям внутри каждого компонента в отдельности и к отсутствию равновесия по температуре и средней скорости смеси в целом. В этом случае течение смеси можно рассматривать как комбинацию локально-равновесных течений отдельных компонентов, взаимодействующих между собой через релаксацию температур и средних скоростей молекул. Такая модель получила название теории взаимопроникающих континуумов или двухжидкостной среды [4–6]. Она адекватно описывает температурно-скоростную неравномерность и ряд характерных для смесей явлений, например: смену механизмов распространения ультразвука [7], несовпадение профилей плотности и температуры компонентов в сильной ударной волне [6], ориентацию вращений линейных молекул в сверхзвуковых струях и молекулярных пучках [8]. Взаимное скольжение компонентов приводит к локальным изменениям состава среды, что позволяет использовать это явление для разделения газовых смесей и изотопов [1–3].

Один из видов движения газа, в котором имеется сильная неоднородность параметров, — это течение Прандтля — Майера [9]. Внезапное расширение газа в окрестности угловой точки происходит при замороженных физико-химических процессах на расстояниях порядка длины релаксации. Дальнейшая эволюция течения и процесса установления равновесия определяется системой уравнений газодинамики и кинетики.

В настоящей работе численно (с использованием методов характеристик и консервативной схемы Мак-Кормака) изучалось неравновесное по температуре и скорости течение смеси гелий — аргон в веере волн разрежения Прандтля — Майера и за ним возле наклонной стенки. Получены распределения параметров течения отдельных компонентов смеси по высоте над поверхностью наклонной стенки, позволяющие анализировать протекание температурно-скоростной релаксации и изменение состава смеси, а также качественная картина разделения малой порции смеси на тяжелые и легкие компоненты при обтекании угловой точки.

1. Постановка задачи. На рис. 1 луч OA , выходящий из угловой точки O , представляет собой передний фронт замороженного веера разрежения гелия, который опережает соответствующие фронты равновесного веера разрежения смеси и замороженного веера разрежения аргона. Угол α_{01} — угол Маха, вычисляемый по замороженной скорости звука гелия в набегающем потоке ($\alpha_{01} = \arcsin M_{01}^{-1}$, $M_{01} = V_0 / (\gamma R_1 T_0)^{1/2}$, M — число Маха, V — скорость газа, $\gamma = 5/3$ — отношение удельных теплоемкостей, R — газовая постоянная, T — температура, индексом 0 обозначены параметры в набегающем потоке, а индексами 1 и 2 — здесь и ниже параметры легкого и тяжелого компонентов). Отрезок луча OA — верхняя граница расчетной области, а участок наклонной стенки OB — ее нижняя граница. На рис. 1 не показаны передняя и задняя границы расчетной области, расположенные соответственно на малом ($\sim 0,01 l_{01}$, l_{01} — длина свободного пробега молекул гелия, вычисляемая для условий набегающего потока) и на достаточно большом расстоянии ($\sim 2000 l_{01}$) от точки O вниз по течению. Конкретный вид этих границ зависит от

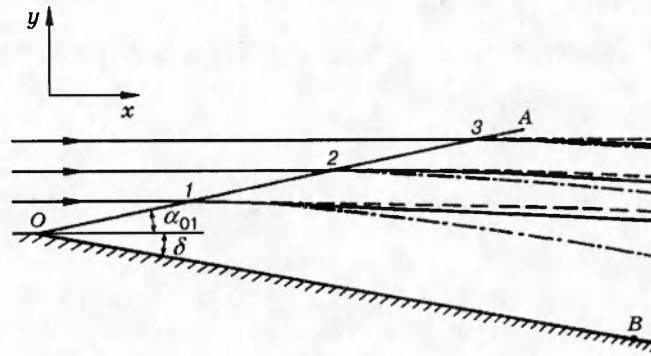


Рис. 1

применяемого метода расчета: при использовании метода характеристик границы представляют собой отрезки характеристик отрицательного семейства легкого компонента, а схемы Мак-Кормака — это линии, перпендикулярные к наклонной стенке. На луче OA задаются граничные условия в виде параметров набегающего потока, на передней границе — параметры замороженного расширения Прандтля — Майера компонентов смеси, на задней границе граничные условия не задаются ввиду прихода на нее всех характеристик. На стенке OB задается условие непротекания, которое при расчете по методу характеристик означает совпадение углов наклона скоростей компонентов с углом наклона стенки, а по схеме Мак-Кормака аппроксимируется с применением принципа отражения.

Расчеты проводились для числа Маха набегающего потока $M_0 = 7$ и 12 , угла наклона стенки $\delta = 10^\circ$, $p_0 = 10^{-2}$ Н/м, $T_0 = 100$ К. Оказалось, что для используемой здесь модели газа из молекул в виде твердых сфер результаты не зависят от конкретных значений p_0 и T_0 , если течение характеризовать параметрами, обезразмеренными на параметры набегающего потока, а пространственные переменные измерять в единицах l_{01} .

2. Уравнения двухжидкостной газодинамики. Стационарное плоское движение газовой смеси без учета вязкости и теплопроводности описывается системой уравнений двухжидкостной газодинамики в эйлеровом приближении [6]:

$$\frac{\partial \rho_i u_i}{\partial x} + \frac{\partial \rho_i v_i}{\partial y} = 0; \quad (2.1)$$

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial x} = -\frac{K}{\rho_i} (u_i - u_j); \quad (2.2)$$

$$u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial y} = -\frac{K}{\rho_i} (v_i - v_j); \quad (2.3)$$

$$\frac{3}{2} n_i k \left(u_i \frac{\partial T_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) = -p_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) - q(T_i - T_j) + \alpha_{ij} K (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j)^2; \quad (2.4)$$

$$n_i = p_i / (kT_i).$$

Здесь n , ρ , p — плотность числа частиц, массовая плотность и давление; \mathbf{U} — вектор скорости, имеющий компоненты (u, v) в декартовой системе координат (x, y) ; k — постоянная Больцмана; индексы i, j принимают значения 1 и 2. Используя формулы, приведенные в [6, 10], имеем

$$q = \frac{3R_1 R_2}{R_1 + R_2} K, \quad \alpha_{ij} = \frac{T_i/m_i}{T_1/m_1 + T_2/m_2}, \quad K = \frac{p_1 p_2}{p_1 T_2 + p_2 T_1} \frac{T_{12}}{D_{12}(p, T_1, T_2)},$$

$$T_{12} = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}, \quad D_{12}(p, T_1, T_2) = \frac{3k^2 T_1 T_2}{\delta p \sigma_{12}^2} \left(\frac{\pi}{2m_{12} k T_{12}} \right)^{1/2},$$

$$m_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad p = p_1 + p_2, \quad p_i = K_i \rho_i \bar{T}_i,$$

где m — масса молекулы; $\sigma_{12} = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)$ — газокинетический диаметр столкновения молекул двух типов ($\sigma_1 = 2,19 \cdot 10^{-10}$ м, $\sigma_2 = 3,66 \cdot 10^{-10}$ м).

3. Расчеты методом характеристик. Если $M_i > 1$ для $i = 1$ и 2 , то из уравнений (2.1)–(2.4) получим следующие характеристические соотношения:

$$\frac{dJ^+}{d\xi_i} = \frac{\cos \alpha_i}{\rho_i V_i^2} \Pi_i^+ - \frac{0,4 \sin \alpha_i}{p_i V_i} \Phi_i; \quad (3.1)$$

$$\frac{dJ^-}{d\eta_i} = -\frac{\cos \alpha_i}{\rho_i V_i^2} \Pi_i^- + \frac{0,4 \sin \alpha_i}{p_i V_i} \Phi_i; \quad (3.2)$$

$$\frac{dS_i}{d\sigma_i} = -\frac{2}{3} \frac{\Phi_i}{p_i V_i}; \quad (3.3)$$

$$\frac{dH_i}{d\sigma_i} = -\frac{\chi_i + \Phi_i}{\rho_i V_i^2}, \quad i = 1, 2. \quad (3.4)$$

В (3.1)–(3.4) $\alpha_i = \arcsin M_i^{-1}$; $H_i = h_i + 0,5 V_i^2$; $h_i = (\gamma/(\gamma - 1)) p_i / \rho_i$; $V_i^2 = u_i^2 + v_i^2$; $S_i = \ln(p_i / \rho_i^\gamma)$; J_i^+ и J_i^- определяются дифференциальными соотношениями $dJ_i^\pm = d\psi_i \pm (\operatorname{ctg} \alpha_i / \rho_i V_i^2) dp_i$ (ψ_i — угол наклона вектора скорости i -го компонента к направлению набегающего потока); $\Phi_i = q(T_i - T_j) - \alpha_{ij} K [V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos(\psi_i - \psi_j)]$; $\Pi_i^\pm = K \{V_i \operatorname{tg} \alpha_i \mp V_j \cos(\psi_i - \psi_j) [\operatorname{tg}(\psi_i - \psi_j) \pm \operatorname{tg} \alpha_i]\}$; $\chi_i = K V_i [V_i - V_j \cos(\psi_i - \psi_j)]$; ξ_i , η_i , σ_i — соответственно расстояния, отсчитываемые вдоль C_i^+ , C_i^- и C_i^0 -характеристик системы (2.1)–(2.4), которые имеют углы наклона к оси x , равные $\psi_i + \alpha_i$, $\psi_i - \alpha_i$ и ψ_i . В набегающем потоке при умеренной степени отклонения от равновесия замороженное число Маха тяжелого компонента значительно превышает соответствующее число Маха легкого компонента в данной точке пространства ввиду существенного различия замороженных скоростей звука компонентов. Если направления векторов скоростей U_1 и U_2 имеют небольшое расхождение, то линия тока гелия и все характеристики аргона, приходящие в некоторую точку плоскости (x, y) , расположены между C_1^+ - и C_1^- -характеристиками гелия, приходящими в эту точку.

Такая конфигурация характеристик показана на рис. 2. На линии AB решение предполагается известным, необходимо вычислить параметры течения в точке C , в которой пересекаются линии Маха гелия, выходящие из точек A и B . Вычисления проводились в основном с использованием той же схемы, что и в обычном методе характеристик для одножидкостной среды [11], но здесь поиск точек пересечения с линией AB и последующая интерполяция параметров для этой точки осуществляются не только для линии тока гелия, но и для всех характеристик аргона. Для нахождения координат точки C и расчета приращений величин J_1^+ и J_1^- на отрезках AC и BC применялся такой же итерационный метод последовательных приближений, что и в обычном методе характеристик [11]. Внутри этого итерационного цикла осуществлялось ньютоновское решение нелинейной системы разностных характеристических уравнений, связывающих остальные параметры течения в точке C с известным решением в точках D, E, F, G .

Расчеты методом характеристик проводились послойно, начиная от первой C_1^+ -характеристики замороженного веера разрежения гелия OA (см. рис. 1) и переходя к другим характеристикам этого семейства. Шаг по угловой переменной $\Delta\varphi = 10^{-4}$ рад, по пространственным переменным $\Delta\xi_1, \Delta\eta_1 \sim 0,05 l_{01}$ ($l_{01} = (2^{1/2} \pi n_0 \sigma_{12}^2)^{-1}$). Начальный

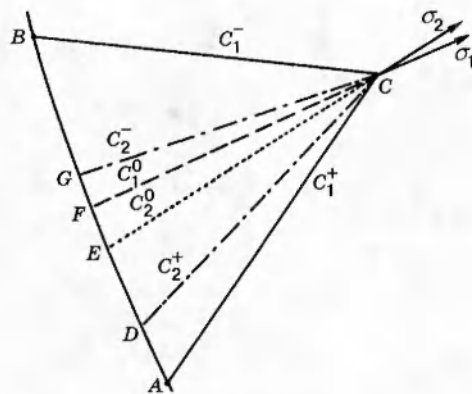


Рис. 2

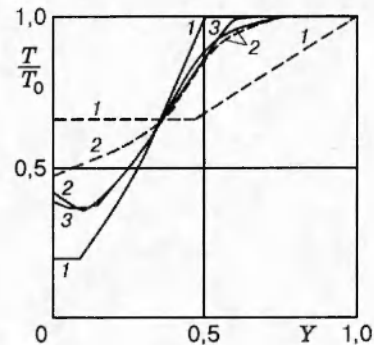


Рис. 3

этап расчетов проходил достаточно эффективно: для сходимости вычислений в каждой сеточной точке требовались 1 — 2 итерации. Однако в дальнейшем эффективность работы программы снижалась, так как требовалось большое число итераций, и вычисления прекращались. Это связано с тем, что на некотором этапе расчета показанная на рис. 2 конфигурация нарушается ввиду сильной неравномерности течения около угловой точки.

В процессе вычислений прослеживался ход линий тока отдельных компонентов и смеси в целом путем нахождения изолиний функций тока компонентов и суммарной функции тока смеси. Начальные значения функций тока задавали на линии начальных данных OA (см. рис. 1), предполагая, что до этой линии частица газа движется как единое целое.

На рис. 1 штриховыми линиями показаны линии тока аргона, штрихпунктирными — гелия, сплошными — смеси в целом (последние являются траекториями центров масс первоначально целых частиц смеси). Представленная здесь картина распада частиц смеси получена при $\delta = 10^\circ$, $M_0 = 7$ и при соотношении молярных концентраций гелия и аргона $c_1 : c_2 = 90 : 10$. Расстояния между частицами смеси, обозначенными на рис. 1 цифрами 1–3, составляют l_{01} , $2l_{01}$ и $3l_{01}$ вдоль линии OA . Поскольку возле угловой точки O линии тока гелия имеют большую кривизну поворота, чем линии тока аргона, около стенки смесь обогащается гелием. Частицы тяжелого газа имеют большую инерцию, их траектории напоминают траектории частиц конденсированной фазы при обтекании выпуклого угла двухфазной средой. При удалении от стенки эффект разделения смеси постепенно ослабевает и на больших расстояниях от угловой точки, где течение равномерно, исчезает.

4. Расчеты с помощью консервативной схемы Мак-Кормака. Если декартову систему координат выбрать таким образом, чтобы ось x была направлена вдоль наклонного участка стенки, а затем перейти к координатам (X, Y) , связанным с обтекаемой поверхностью и определяемым соотношениями $X = x$, $Y = y/(\text{tg } \beta x)$, $\beta = \alpha_{01} + |\delta|$, то уравнения (2.1)–(2.4) можно преобразовать к следующему консервативному виду:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial X} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial Y} = \mathbf{G}. \quad (4.1)$$

Здесь $\mathbf{E} = X \text{tg } \beta \mathbf{e}$; $\mathbf{F} = \mathbf{f} - Y \text{tg } \beta \mathbf{e}$; $\mathbf{G} = X \text{tg } \beta \mathbf{g}$; $\mathbf{e} = (\rho_1 u_1, \rho_1 u_1^2 + p_1, \rho_1 u_1 v_1, \rho_1 u_1 H_1, \rho_2 u_2, \rho_2 u_2^2 + p_2, \rho_2 u_2 v_2, \rho_2 u_2 H_2)^T$; $\mathbf{f} = (\rho_1 v_1, \rho_1 u_1 v_1, \rho_1 v_1^2 + p_1, \rho_1 v_1 H_1, \rho_2 v_2, \rho_2 u_2 v_2, \rho_2 v_2^2 + p_2, \rho_2 v_2 H_2)^T$; $\mathbf{g} = (0, Z, W, Q_1, 0, -Z, -W, Q_2)^T$; $Z = -K(u_1 - u_2)$, $W = -K(v_1 - v_2)$; $Q_i = -q(T_i - T_j) + \alpha_{ij} K[(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2] - K[u_i(u_i - u_j) + v_i(v_i - v_j)]$ ($i, j = 1, 2$).

В системе координат (X, Y) , в которой расчетная область имеет форму прямоугольника, расчеты проводились с использованием полуявной схемы Мак-Кормака [12], имеющей второй порядок аппроксимации по обоим независимым переменным. Последователь-

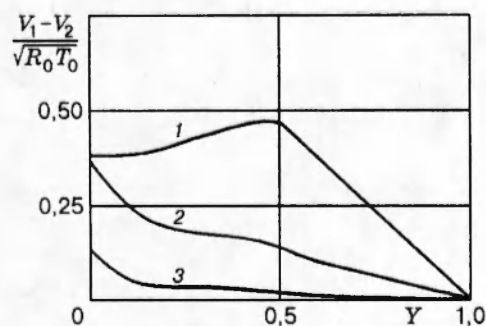


Рис. 4

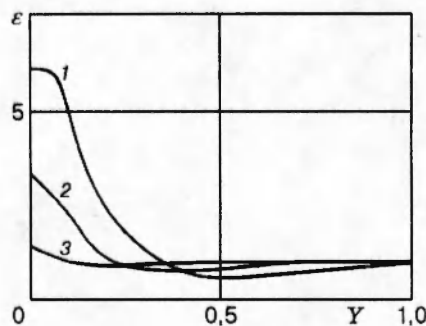


Рис. 5

ность вычислений общепринята для маршевых расчетов обтекания угловых конфигураций [13]. Отрезок $0 \leq Y \leq 1$ разбивался на 100 равных частей, $\Delta X \leq 0,4\Delta Y$.

На рис. 3–5 представлены результаты расчетов при $\delta = 10^\circ$, $M_0 = 7$, $c_1 : c_2 = 50 : 50$. На рис. 3 показана зависимость температуры компонентов, обезразмеренной на температуру набегающего потока, от Y при разных значениях X . Штриховые линии относятся к гелию, сплошные — к аргону, линии 1 соответствуют замороженному расширению двух газов около угловой точки ($X = 0,01 l_{01}$). При увеличении X температура компонентов релаксирует к единому равновесному распределению, это видно по зависимостям $T_1(Y)$ и $T_2(Y)$ при $X = 70 l_{01}$ (линии 2) и при $X = 500 l_{01}$ (линии 3). При $X = 500 l_{01}$ $T_1 \approx T_2$ при всех значениях Y . Если концентрация одного из компонентов мала ($\sim 1\%$), то распределение по Y температуры основного компонента практически не зависит от X (везде имеет место автомодельное распределение Прандтля — Майера, к нему релаксирует распределение температуры примесного компонента).

Характер релаксации скоростей компонентов показан на рис. 4, где приведена зависимость от Y безразмерной разности скоростей $(V_1 - V_2)/(R_0 T_0)^{1/2}$ (R_0 — газовая постоянная смеси в набегающем потоке). Кривая 1 соответствует замороженному расширению около угловой точки, 2 — $X = 7 l_{01}$, 3 — $X = 70 l_{01}$ (здесь скольжение компонентов практически отсутствует в большей части области изменения Y).

На рис. 5 представлена зависимость коэффициента обогащения смеси гелием $\epsilon = (n_1/n_2)/(n_1/n_2)_0$ от Y при различных значениях X . Линия 1 отвечает замороженному течению возле угловой точки. По мере удаления от точки O вдоль стенки OB вниз по течению зависимость $\epsilon(Y)$ становится более полой, происходит существенное уменьшение максимального значения $\epsilon(Y=0)$, а в основной области изменения Y ($0,1 \leq Y \leq 1$) $\epsilon = 1$. Кривые 2 и 3 — зависимость $\epsilon(Y)$ при $X = 70 l_{01}$ и $1250 l_{01}$. Видно, что в отличие от скоростной и температурной релаксаций, завершающихся в основном при $X \sim (100 \div 500) l_{01}$ от угловой точки, релаксация состава смеси около стенки ($Y \leq 0,1$) протекает медленнее; вследствие этого состав смеси около стенки отличается от состава смеси в набегающем потоке до расстояний $\sim (1500 \div 2000) l_{01}$ от точки O . Возле стенки образуется слой газа с повышенным содержанием гелия. Качественное поведение коэффициента обогащения ϵ остается таким же при других параметрах течения и состава смеси. При увеличении δ и M_0 набегающего потока возрастают производные $\partial\epsilon/\partial X$ и $\partial\epsilon/\partial Y$, а также значения $\epsilon(Y=0)$.

5. Выводы. На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Возле наклонной стенки образуется слой смеси, в котором процесс релаксации температур и скоростей компонентов распространяется на значительные расстояния от угловой точки. По существу, это соответствует представлению о наличии около стенки энтропий-

ного (вихревого) слоя при течении Прандтля — Майера с неравновесными процессами произвольного вида [14].

2. Слой газа около стенки значительно обогащается легким компонентом. Коэффициент обогащения увеличивается при возрастании числа Маха набегающего потока и угла поворота стенки в угловой точке.

3. Качественная картина расхождения траекторий легкого и тяжелого компонентов малой порции смеси в веере разрежения соответствует инерционному механизму разделения смеси.

4. Наблюдается качественное различие между процессом температурно-скоростной релаксации в смеси, в которой молярные концентрации обоих компонентов имеют большие значения, и этим процессом в смеси, в которой один из компонентов присутствует в виде примеси. В первом случае релаксационный процесс сопровождается значительными изменениями параметров обоих компонентов, приводящими к установлению общего равновесия, во втором — параметры примеси релаксируют к параметрам основного компонента, которые можно считать не подверженными изменениям за счет релаксации и описываемыми автомодельным решением Прандтля — Майера для чистого газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reis V. H., Fenn J. B. Separation of gas mixtures in supersonic jets // J. Chem. Phys. 1963. V. 39, N 12. P. 3240–3250.
2. Cattolica R. J., Gallagher R. J., Anderson J. B., Talbot L. Aerodynamic separation in free jet expansion // AIAA J. 1979. V. 17, N 4. P. 344–355.
3. Compargue R., Anderson J. B., Fenn J. B., et al. Sur les methodes aerodynamique de separation dez gaz et isotopes // Entropie. 1976. T. 12, N 67. P. 11–33.
4. Goldman E., Sirovich L. Equations for gas mixtures // Phys. Fluids. 1967. V. 10, N 9. P. 1928–1940.
5. Goebel C. J., Harris S. M., Johnson E. A. Two-temperature disparate-mass gas mixtures: a thirteen moment description // Phys. Fluids. 1976. V. 19, N 5. P. 627–635.
6. Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П. и др. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск: Наука, 1992.
7. Bowler J. R., Johnson E. A. Anomalous dispersion in disparate mass gas mixtures // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54, N 4. P. 329–332.
8. DePaul S., Pullman D., Friedrichs B. Pocket model of seeded supersonic beams // J. Phys. Chem. 1993. V. 97, N 10. P. 2167–2171.
9. Абрамович Г. И. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1991. Ч. 1.
10. Ramshaw J. D. Hydrodynamic theory of multicomponent diffusion and thermal diffusion in multitemperature gas mixtures // J. Non-Equil. Therm. 1993. V. 19, N 2. P. 121–134.
11. Кацкова О. Н., Крайко А. Н. Расчет плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений при наличии необратимых процессов. М.: ВЦ АН СССР, 1964.
12. LeVeque R. J., Yee H. C. A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms // J. Comput. Phys. 1990. V. 86, N 1. P. 187–210.
13. Shankar V., Anderson D., Kutler P. Numerical solution for supersonic corner flow // J. Comput. Phys. 1975. V. 17, N 2. P. 160–180.
14. Агафонов В. П., Вертушкин В. К., Гладков А. А., Полянский О. Ю. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. М.: Машиностроение, 1972.

Поступила в редакцию 9/VIII 1995 г.,
в окончательном варианте — 16/X 1995 г.