УДК 532.591+539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЗДЕЙСТВИИ ШТАМПА НА УПРУГИЙ СЛОЙ, ЛЕЖАЩИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

В. П. Рябченко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: ryabchenko@hydro.nsc.ru

Рассмотрена плоская линейная нестационарная задача о вдавливании по заданному закону жесткого штампа в упругий слой конечной толщины, лежащий на поверхности сжимаемой жидкости бесконечной глубины. В упругом слое выполняются уравнения Ламе, а в жидкости — волновое уравнение для потенциала скорости. С помощью преобразований Лапласа и Фурье задача сведена к определению контактных напряжений под штампом из решения интегрального уравнения первого рода, ядро которого имеет логарифмическую особенность. Построено асимптотическое решение задачи при больших временах взаимодействия.

Ключевые слова: штамп, упругий слой, сжимаемая жидкость, контактные напряжения.

Введение. При эксплуатации объектов, расположенных на льду, необходимо знать динамические нагрузки, вызванные движением этих объектов, например, под действием вибрации или приложенной нагрузки. Ледяной покров часто моделируется тонкой упругой пластиной, плавающей на поверхности жидкости [1, 2]. При этом полагается, что лед полностью покрывает свободную поверхность жидкости и на него действует нагрузка в виде сосредоточенной силы или локально распределенного периодического по времени давления на его поверхности. Другая модель основана на предположении, что лед — упругое полупространство и на его поверхности находится жесткий штамп, моделирующий объект. Из состояния покоя штамп начинает двигаться по заданному закону, при этом влияние жидкости не учитывается [3, 4]. Поскольку ледяной покров имеет конечную толщину, представляет интерес решение задачи о штампе, находящемся на упругом слое, который лежит на поверхности жидкости. В данной работе при больших временах взаимодействия получено асимптотическое решение этой гидроупругой задачи в линейной постановке.

Постановка задачи. Жесткий штамп шириной $2a$ $(-a \leqslant x_1 \leqslant a)$ по заданному закону внедряется в упругий слой толщиной $2h_1$ $(-\infty < x_1 < \infty,\ -h_1 \leqslant y_1 \leqslant h_1)$, лежащий на поверхности сжимаемой жидкости бесконечной глубины $(-\infty < y_1 \leqslant -h_1)$. В предположении, что до внедрения штампа $(t_1 < 0)$ упругая среда и жидкость находятся в состоянии покоя, течение жидкости является потенциальным и в начальный момент времени $t_1 = 0$ смещения упругой среды u_1, v_1, скорости этих смещений, а также потенциал течения жидкости φ_1 и $\partial\varphi_1/\partial t_1$ равны нулю. Силы трения и сцепления в зоне контакта штампа с верхней границей слоя $y_1 = h_1$ не учитываются и вне штампа верхняя граница слоя не нагружена. На нижнюю границу слоя действуют только нормальные напряжения, вызванные течением жидкости, и выполняется условие контакта жидкости и упругого слоя. Форма штампа и закон его внедрения в слой определяются функцией $f(x_1, t_1)$. При $(x_1, y_1) \to \infty$ перемещения и напряжения отсутствуют.

В сделанных допущениях задача сводится к решению уравнений Ламе в упругом слое относительно безразмерных перемещений u, v [5]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-\beta_1^2)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \beta_1^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \beta_1^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$\beta_1^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1-\beta_1^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \beta_1^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Здесь $\beta_1 = c_2/c_1$; $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $c_2^2 = \mu/\rho$ — скорости распространения продольных и поперечных волн в упругой среде; λ, μ — постоянные Ламе; ρ — плотность упругого материала; $x = x_1/a$, $y = y_1/a$, $t = c_2 t_1/a$ — безразмерные координаты и время.

Потенциал скорости течения жидкости $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\varphi - \beta_2^2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \varphi_1 = ac_2\varphi, \qquad \beta_2 = \frac{c_2}{c_0}, \tag{3}$$

а давление p определяется интегралом Коши — Лагранжа

$$p = -\rho_0 c_2^2\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{4}$$

(c_0 — скорость звука в жидкости; ρ_0 — ее плотность).

Уравнения (1)–(3) решаются при следующих условиях:

— граничные условия:

$$\tau_{xy}(x, \pm h, t) = 0, \qquad -\infty < x < \infty; \tag{5}$$

$$\sigma_{yy}(x, h, t) = 0, \qquad -\infty < x < -1, \quad 1 < x < \infty; \tag{6}$$

$$\sigma_{yy}(x, -h, t) = -p(x, t), \qquad |x| < \infty; \tag{7}$$

$$v(x, h, t) = f(x, t), \qquad |x| < 1, \quad h = h_1/a; \tag{8}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, -h, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, -h, t), \qquad |x| < \infty; \tag{9}$$

$$\varphi \to 0, \quad u \to 0, \quad v \to 0, \quad \tau_{xy} \to 0, \quad \sigma_{yy} \to 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \to \infty; \tag{10}$$

— начальные условия:

$$u = v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

В (5)–(10) τ_{xy}, σ_{yy} — касательные и нормальные напряжения в упругом слое.

Требуется определить распределение нормальных контактных напряжений под штампом $\sigma_{yy}(x, h, t) = -q(x, t)$, напряжения и перемещения в упругом слое и поле скоростей течения жидкости.

Вывод интегрального уравнения. К уравнениям (1)–(3) применим преобразование Лапласа по времени

$$u^L(x, y, s) = \int_0^\infty u(x, y, t) \exp{(-st)}\,dt.$$

Для изображений получаем

$$\frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} + (1-\beta_1^2)\,\frac{\partial^2 v^L}{\partial x\,\partial y} + \beta_1^2\,\frac{\partial^2 u^L}{\partial y^2} = s^2\beta_1^2 u^L; \tag{11}$$

$$\beta_1^2\,\frac{\partial^2 v^L}{\partial x^2} + (1-\beta_1^2)\,\frac{\partial^2 u^L}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 v^L}{\partial y^2} = s^2\beta_1^2 v^L; \tag{12}$$
$$\frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^l}{\partial y^2} = s^2\beta_2^2\varphi^L.$$

Для изображений напряжений имеем

$$\sigma_{yy}^L = \lambda\Big(\frac{\partial u^L}{\partial x} + \frac{\partial v^L}{\partial y}\Big) + 2\mu\,\frac{\partial v^L}{\partial y}, \qquad \tau_{xy}^L = \mu\Big(\frac{\partial u^L}{\partial y} + \frac{\partial v^L}{\partial x}\Big).$$

Для изображений (11), (12) решение уравнений Ламе ищем в виде

$$\boldsymbol{u}^L = \nabla\Phi + \boldsymbol{u}_1.$$

Эти уравнения выполняются, если новые искомые функции удовлетворяют уравнениям [6]

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}_1 = 0, \quad \Delta\Phi - \beta_1^2 s^2\Phi = 0, \quad \Delta\boldsymbol{u}_1 - s^2\boldsymbol{u}_1 = 0, \quad \boldsymbol{u}_1 = (u_1, v_1).$$

Решение уравнений для изображений, симметричное по x, будем искать в виде

$$u_1 = \int\limits_0^\infty \sin(\alpha x)\Big(A_1'\,\frac{\operatorname{ch}(\gamma_2 y)}{\operatorname{sh}(\gamma_2 h)} + C_1'\,\frac{\operatorname{sh}(\gamma_2 y)}{\operatorname{ch}(\gamma_2 h)}\Big)\,d\alpha,$$

$$v_1 = \int\limits_0^\infty \cos(\alpha x)\Big(A_2'\,\frac{\operatorname{sh}(\gamma_2 y)}{\operatorname{sh}(\gamma_2 h)} + C_2'\frac{\operatorname{ch}(\gamma_2 y)}{\operatorname{ch}(\gamma_2 h)}\Big)\,d\alpha,$$

$$\Phi = \int\limits_0^\infty \cos(\alpha x)\Big(A_3\frac{\operatorname{ch}(\gamma_1 y)}{\operatorname{sh}(\gamma_1 h)} + C_3\frac{\operatorname{sh}(\gamma_1 y)}{\operatorname{ch}(\gamma_1 h)}\Big)\,d\alpha, \quad \varphi^L = \int\limits_0^\infty A(\alpha, s)\exp(\gamma_0 y)\cos(\alpha x)\,d\alpha,$$

где $\gamma_1^2 = \alpha^2 + \beta_1^2 s^2$; $\gamma_2^2 = \alpha^2 + s^2$; $\gamma_0^2 = \alpha^2 + \beta_2^2 s^2$. Тогда из уравнения $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_1 = 0$ найдем

$$\alpha A_1' = \gamma_2 A_2', \qquad \alpha C_1' = -\gamma_2 C_2'.$$

Вводя коэффициенты $\alpha A_2 = A_2'$, $\alpha C_2 = C_2'$, из граничного условия (5) получаем

$$2\alpha\gamma_1 A_3 = -(\alpha^2 + \gamma_2^2)A_2, \quad 2\alpha\gamma_1 C_3 = -(\alpha^2 + \gamma_2^2)C_2, \quad A_1 = -\gamma_2 A_2, \quad C_1 = -\gamma_2 C_2.$$

Для поперечных смещений при $y = \pm h$ имеем

$$v^L(x, h, s) = -\frac{1}{2}\,s^2\int\limits_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}\,(A_2 + C_2)\,d\alpha,$$

$$v^L(x, -h, s) = \frac{1}{2}\,s^2\int\limits_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}\,(A_2 - C_2)\,d\alpha.$$

Аналогично для нормальных напряжений при $y = \pm h$ получаем

$$\sigma_{yy}^L(x, h, s) = -\mu\int\limits_0^\infty \cos(\alpha x)\Big(\frac{(\gamma_2^2 + \alpha^2)^2}{2\alpha\gamma_1}\,(A_2\operatorname{cth}(\gamma_1 h) + C_2\operatorname{th}(\gamma_1 h)) - {}$$
$$- 2\alpha\gamma_2(A_2\operatorname{cth}(\gamma_2 h) + C_2\operatorname{th}(\gamma_2 h))\Big)\,d\alpha,$$

$$\sigma_{yy}^L(x,-h,s) = -\mu \int\limits_0^\infty \cos(\alpha x)\Big(\frac{(\gamma_2^2+\alpha^2)^2}{2\alpha\gamma_1}\,(A_2 \operatorname{cth}(\gamma_1 h) - C_2 \operatorname{th}(\gamma_1 h)) - \\ - 2\alpha\gamma_2(A_2 \operatorname{cth}(\gamma_2 h) - C_2 \operatorname{th}(\gamma_2 h))\Big)\, d\alpha.$$

Из граничного условия (9) находим $A(\alpha, s) = sv^L/\gamma_0$. Тогда с учетом (4) $p^L(x,-h,s) = -\rho_0 c_2^2 s^2 v^L(x,-h,s)$.

Подставляя найденные выражения для σ_{yy}^L, p^L, v^L в граничное условие (7) и вводя обозначения

$$X_a = \frac{(\gamma_2^2+\alpha^2)^2}{\gamma_1} \operatorname{cth}(\gamma_1 h) - 4\alpha^2\gamma_2 \operatorname{cth}(\gamma_2 h), \qquad \rho_* = \frac{\rho_0}{\rho},$$
$$X_c = \frac{(\gamma_2^2+\alpha^2)^2}{\gamma_1} \operatorname{th}(\gamma_1 h) - 4\alpha^2\gamma_2 \operatorname{th}(\gamma_2 h), \qquad X_0 = \frac{\rho_* s^4}{\gamma_0},$$

для коэффициентов A_2, C_2 получаем уравнение

$$(X_a + X_0)A_2 - (X_c + X_0)C_2 = 0 \tag{13}$$

(величина X_0 характеризует влияние жидкости на деформирование упругого слоя).

При $y = h$ граничное условие (6) для σ_{yy} запишем в виде

$$\sigma_{yy}^L(x,h,s) = -q_*^L(x,s), \tag{14}$$

где $q_*^L(x,s) = q^L(x,s)$ при $|x| < 1$, $q_*^L(x,s) = 0$ при $|x| > 1$; $q^L(x,s)$ — L-изображение искомой контактной нагрузки под штампом $q(x,t)$. Определяя преобразование Фурье функции q_*^L:

$$q_*^L(x,s) = \int\limits_0^\infty Q^L(\alpha,s)\cos(\alpha x)\, d\alpha$$

и обратное ему преобразование

$$Q^L(\alpha,s) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} q^L(\xi,s)\cos(\alpha\xi)\, d\xi,$$

из граничного условия (14) получаем

$$X_a A_2 + X_c C_2 = 2Q^L\alpha. \tag{15}$$

Таким образом, для коэффициентов A_2, C_2 имеем систему уравнений (13), (15), из которой находим

$$A_2 = 2\alpha Q^L(X_a + X_0)/D, \quad C_2 = 2\alpha Q^L(X_a + X_0)/D, \quad D = X_a(X_c + X_0) + X_c(X_a + X_0).$$

Подставляя A_2, C_2 в соотношение (14) и обозначая через $f^L(x,s)$ L-изображение функции $f(x,t)$, находим

$$f^L(x,s) = -s^2\int\limits_0^\infty \cos(\alpha x) Q^L(\alpha,s)\frac{2X_0 + X_a + X_c}{D}\, d\alpha.$$

Используя выражение для Q^L, получаем интегральное уравнение первого рода относительно функции $q^L(\xi, s)$ ($|x| < 1$):

$$\int\limits_{-1}^{1} q^L(\xi, s) k(x, \xi, s)\, d\xi = f^L(x, s)$$

с ядром

$$k(x, \xi, s) = \frac{1}{\pi} s^2 \int\limits_{0}^{\infty} \cos(\alpha\xi) \cos(\alpha x) \frac{2X_0 + X_a + X_c}{D}\, d\alpha.$$

Для плоского штампа $f^L(x, s) = f_0^L(s)$.

Некоторые свойства ядра $k(x, \xi, s)$**.** Для изучения свойств ядра $k(x, \xi, s)$ в несобственном интеграле выполним замену $\alpha = sz$ и будем рассматривать интегралы вида

$$J(s) = \int\limits_{0}^{\infty} \cos(uz)\, K(s, z)\, dz, \quad u = s(x \pm \xi),$$

где $K(s, z) = (2X_0 + X_a + X_c)/D$. В функцию $K(s, z)$ входят величины

$$X_a = \frac{(2z^2 + 1)^2}{\gamma_1} \operatorname{cth}(sh\gamma_1) - 4z^2\gamma_2 \operatorname{cth}(sh\gamma_2),$$

$$X_c = \frac{(2z^2 + 1)^2}{\gamma_1} \operatorname{th}(sh\gamma_1) - 4z^2\gamma_2 \operatorname{th}(sh\gamma_2), \quad X_0 = \frac{\rho_*}{\gamma_0}$$

($\gamma_1^2 = z^2 + \beta_1^2$; $\gamma_2^2 = z^2 + 1$; $\gamma_0^2 = z^2 + \beta_2^2$; для γ_0, γ_1, γ_2 сохранены прежние обозначения). С учетом $q^L(\xi, s) = q^L(-\xi, s)$ ядро принимает вид

$$k(x, \xi, s) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \cos(sz)(x - \xi)\, K(s, z)\, dz,$$

где параметр преобразования Лапласа s входит лишь в аргументы тригонометрических и гиперболических функций. Для получения асимптотического решения при малых значениях s в разложениях $\operatorname{cth} x$ и $\operatorname{th} x$ будем удерживать два и один член соответственно. Тогда $X_a = Q(z)/(sh) + sh/3$, $X_c = sh$ ($Q(z) = [1 + 4z^2(1 - \beta_1^2)]/\gamma_1^2$) и функцию $K(s, z)$ можно представить в виде

$$K(s, z) = a_0 + a_1 sh + a_2 s^2 h^2 + \ldots,$$

где $a_0 = 1/X_0$; $a_1 = 2/Q - 1/X_0^2$; $a_2 = -a_1/X_0$. Интеграл $J(s)$ запишем в виде суммы интегралов $J_1(s)$, $J_2(s)$:

$$J_1(s) = \int\limits_{0}^{1} \cos(uz)\, K(s, z)\, dz, \qquad J_2(s) = \int\limits_{1}^{\infty} \cos(uz)\, K(s, z)\, dz.$$

Для получения приближенного выражения $J_1(s)$ $\cos(uz)$ заменим двумя первыми членами его разложения в ряд, а $K(s, z)$ — его представлением при малых s. Тогда

$$J_1(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2,$$

где

$$q_0 = \int\limits_0^1 a_0(z)\,dz, \quad q_1 = h\int\limits_0^1 a_1(z)\,dz, \quad q_2 = -\frac{1}{2}\,(x-\xi)^2\int\limits_0^1 z^2 a_0(z)\,dz + h^2\int\limits_0^1 a_2(z)\,dz.$$

При больших z будем считать, что $\gamma_1 \approx z$, $\gamma_2 \approx z$. Используя разложения

$$\mathrm{cth}\,(sh\gamma_1) \approx 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\exp\,(-2mshz), \qquad \mathrm{th}\,(sh\gamma_1) \approx 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\exp\,(-2mshz),$$

получаем

$$X_a = X_{a\infty}[1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\exp\,(-2mshz)], \qquad X_c = X_{a\infty}[1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\exp\,(-2mshz)],$$

где

$$X_{a\infty} = (2z^2+1)^2/\sqrt{z^2+\beta_1^2} - 4z^2\sqrt{z^2+1}.$$

В этом случае ($|z| \gg 1$) имеет место представление

$$K(s,z) = b_0 + b_1\exp\,(-2shz) + b_2\exp\,(-4shz) + \dots,$$

где $b_0 = 1/X_{a\infty}$; $b_1 = 0$; $b_2 = 2(1 - X_0/X_{a\infty})/(X_0 + X_{a\infty})$.

При больших z

$$X_{a\infty} = 2(1-\beta_1^2)z + \frac{h_a}{z}, \quad h_a = \frac{1}{2}\,(3 + 3\beta_1^4 - 4\beta_1^2), \quad X_0 = \rho_*\Big(\frac{1}{z} - \frac{\beta_2^2}{2z^3}\Big),$$

поэтому

$$b_0 = \frac{d_1}{z} - \frac{h_a d_1^2}{z^3}, \quad d_1 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\beta_1^2}, \quad b_2 = \frac{2d_1}{z} - \frac{2d_1^2(h_a + 2\rho_*)}{z^3}.$$

Вводя переменную $u = s|x-\xi|$ и подставляя в $J_2(s)$ $K(s,z)$ при больших z, получаем

$$J_2(s) = \int\limits_1^{\infty}\cos\,(uz)\Big(\frac{d_1}{z} - \frac{h_a d_1^2}{z^3} + \dots\Big)\,dz + 2\int\limits_1^{\infty}\cos\,(uz)\Big(\frac{d_1}{z} - \frac{d_1^2(h_a+2\rho_*)}{z^3}\Big)\exp\,(-4hsz)\,dz.$$

Введем обозначения

$$I_1 = \int\limits_1^{\infty}\frac{\cos\,(uz)}{z}\,dz = -\mathrm{Ci}(u), \qquad I_2 = \int\limits_1^{\infty}\frac{\cos\,(uz)}{z^3}\,dz,$$

$$I_3 = \int\limits_1^{\infty}\frac{\cos\,(uz)}{z}\exp\,(-4hsz)\,dz, \qquad I_4 = \int\limits_1^{\infty}\frac{\cos\,(uz)}{z^3}\exp\,(-4hsz)\,dz$$

($\mathrm{Ci}(u)$ — интегральный косинус). Тогда при малых s асимптотика интегралов I_k ($k = 1,\dots,4$) имеет вид

$$I_1 = -C - \ln u + u^2/4, \quad I_2 = (1 + u^2\ln u + u^2(C - 3/2))/2,$$

$$I_3 = -C - \ln\,(s\sqrt{16h^2 + (x-\xi)^2}\,) + 4sh + s^2\alpha_1/4, \quad I_4 = 1/2 - 4sh + \alpha_1 s^2\ln s + \alpha_2 s^2,$$

где C — постоянная Эйлера,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\,[(x-\xi)^2 - 16h^2], \quad \alpha_2 = \alpha_1\Big(C - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln\,[16h^2 + (x-\xi)^2]\Big) + 4h(x-\xi)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\xi}{4h}.$$

Используя полученные асимптотические выражения интегралов для малых значений s, в случае плоского штампа интегральное уравнение запишем в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} q^L(\xi,s)\ln(s|x-\xi|)\,d\xi = g^L(x,s), \tag{16}$$

где

$$g^L(x,s) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} q^L(\xi,s)\ln\,[16h^2 + (x-\xi)^2]\,d\xi + f^L(s) + \int_{-1}^{1} q^L(\xi,s)F(x,\xi,s)\,d\xi,$$

$$F = a_{0*} + a_{1*}s + a_{2*}s^2\ln s + a_{3*}s^2, \tag{17}$$

$$\pi d_1 a_{0*} = q_0 - 3Cd_1 - d_1^2(3h_a/2 + 2\rho_*), \qquad \pi d_1 a_{1*} = q_1 + 8d_1 h + 8hd_1^2(h_a + 2\rho_*),$$

$$\pi d_1 a_{2*} = -h_a d_1^2 (x-\xi)^2/2 - 2d_1\alpha_1(h_a + 2\rho_*),$$

$$\pi d_1 a_{3*} = q_2 + d_1(x-\xi)^2/4 - (1/2)h_a d_1^2(x-\xi)^2\ln|x-\xi| + d_1\alpha_1 - 2d_1^2\alpha_2(h_a + 2\rho_*).$$

Уравнение (16) для $q^L(\xi,s)$ является уравнением первого рода с логарифмическим ядром [7]. Второй член с логарифмом учитывает наличие границы слоя, находящегося на расстоянии $2h$ от штампа, и аналогичен получаемому, например, при расчете методом отражения [8] обтекания профиля, находящегося на расстоянии $2h$ от твердого экрана.

Продифференцировав уравнение (16) по x, получим сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} q^L(\xi,s)\,\frac{d\xi}{x-\xi} = -\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q^L(\xi,s)\,\frac{(x-\xi)\,d\xi}{16h^2 + (x-\xi)^2} + \int_{-1}^{1} q^L(\xi,s)\,\frac{\partial F}{\partial x}(x,\xi,s)\,d\xi.$$

Временно считая правую часть $\partial g^L/\partial x$ известной, решение этого уравнения запишем в виде

$$q^L(x,s) = \frac{P^L(s)}{\pi\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta - x}\,\frac{\partial g^L}{\partial\eta}(\eta,s)\,d\eta, \tag{18}$$

где

$$P^L(s) = \int_{-1}^{1} q^L(\xi,s)\,d\xi, \qquad \frac{\partial F}{\partial\eta} = \frac{\partial a_{2*}}{\partial\eta}\,s^2\ln s + \frac{\partial a_{3*}}{\partial\eta}\,s^2,$$

$$\pi\,\frac{\partial a_{2*}}{\partial\eta} = -d_1(\eta-\xi)(3h_a + 2\rho_*),$$

$$\pi d_1\,\frac{\partial a_{3*}}{\partial\eta} = -(\eta-\xi)\int_{0}^{1} z^2 a_0(z)\,dz + \frac{3}{2}\,d_1(\eta-\xi) - h_a d_1^2(\eta-\xi)\ln|\eta-\xi| -$$

$$- \frac{1}{2}\,h_a d_1^2(\eta-\xi) - 2d_1^2(h_a + 2\rho_*)\,\frac{\partial\alpha_2}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \eta} = \Big(C - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln [16h^2 + (\eta - \xi)^2]\Big)(\eta - \xi) + \frac{(\eta - \xi)^3}{16h^2 + (\eta - \xi)^2} + 4h \operatorname{arctg} \frac{\eta - \xi}{4h}.$$

Искомую функцию представим в виде разложения

$$q^L(x, s) = P^L(s)(Q_0 + Q_1 s^2 \ln s + Q_2 s^2 + \ldots). \tag{19}$$

Подставляя (19) в уравнение (18) и удерживая члены при одинаковых степенях s, получим интегральные уравнения для Q_0, Q_1 и Q_2:

$$Q_0(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}\Big(1 - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta - x}\, d\eta \int_{-1}^{1} Q_0(\xi)\, \frac{\eta - \xi}{16h^2 + (\eta - \xi)^2}\, d\xi\Big); \tag{20}$$

$$Q_1(x) = -\frac{2}{\pi^2\sqrt{1 - x^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta - x}\, d\eta \int_{-1}^{1} Q_1(\xi) \frac{\eta - \xi}{16h^2 + (\eta - \xi)^2}\, d\xi + {}$$
$$+ \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta - x}\, d\eta \int_{-1}^{1} Q_0(\xi)\, \frac{\partial a_{2*}}{\partial \eta}\, d\xi; \tag{21}$$

$$Q_2(x) = -\frac{2}{\pi^2\sqrt{1 - x^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta - x}\, d\eta \int_{-1}^{1} Q_2(\xi)\, \frac{\eta - \xi}{16h^2 + (\eta - \xi)^2}\, d\xi + {}$$
$$+ \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta - x}\, d\eta \int_{-1}^{1} Q_0(\xi)\, \frac{\partial a_{3*}}{\partial \eta}\, d\xi. \tag{22}$$

Для того чтобы найти функции $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, подынтегральные функции в правой части уравнений (20)–(22) разложим в ряды по некоторому параметру, связанному с толщиной слоя h. В качестве такого параметра примем $\tau = \sqrt{1 + h^2/4} - h/2$, причем при любых h $\tau < 1$, в частности при $h = \infty$ $\tau = 0$, при $h = 0$ $\tau = 1$. Имеет место разложение

$$\frac{1}{(x - \xi)^2 + 16h^2} = \frac{\tau^2}{16}\Big(1 - \tau^2(\tau^2 - 2) - \frac{\tau^2(x - \xi)^2}{16} + \ldots\Big). \tag{23}$$

Искомые функции также представим в виде рядов по τ:

$$Q_n = Q_{n0} + \tau^2 Q_{n1} + \tau^4 Q_{n2} + \ldots \qquad (n = 0, 1, 2).$$

Подставляя эти разложения в уравнения (20)–(22) и приравнивая члены при одинаковых степенях τ, находим

$$Q_{n0}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}, \quad Q_{01}(x) = -\frac{1}{8\pi^2\sqrt{1 - x^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta - x}\, d\eta \int_{-1}^{1} Q_{00}(\xi)(\eta - \xi)\, d\xi,$$

$$Q_{02}(x) = -\frac{1}{8\pi^2\sqrt{1 - x^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta - x}\, d\eta \int_{-1}^{1} (\eta - \xi)\Big[Q_{00}(\xi)\Big(2 - \frac{(\eta - \xi)^2}{16}\Big) + Q_{01}(\xi)\Big]\, d\xi.$$

Вычисляя интегралы в правых частях выражений для $Q_{01}(x)$, $Q_{02}(x)$, получаем

$$Q_{01}(x) = -\frac{x^2}{4\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad Q_{02}(x) = -\frac{1}{128\pi\sqrt{1-x^2}}\,(x^4 + 56{,}5x^2 - 0{,}125).$$

Аналогичный прием использовался в [8, 9].

Переходя в (19) к оригиналам Лапласа для рассматриваемого случая плоского штампа, для контактной нагрузки под штампом при больших временах получим асимптотическое выражение

$$q(x,t) = Q_0(x)P(t) + \frac{d^2P(t)}{dt^2}\,[Q_2(x) - CQ_1(x)] - Q_1(x)\,\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{d^2P}{d\tau^2}\ln(t-\tau)\,d\tau.$$

(Для получения оригинала Лапласа выражения $s^2P^L(s)\ln s$ использованы теорема о свертке и соотношение $s^{-1}\ln s \Rightarrow -\ln t - C$ [10].)

Для того чтобы найти $P^L(s)$, уравнение (16) умножим на $1/\sqrt{1-x^2}$ и проинтегрируем по x от -1 до 1:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} q^L(\xi,s)d\xi \int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln s|x-\xi|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int\limits_{-1}^{1} q^L(\xi,s)d\xi \int\limits_{-1}^{1} \frac{F(x,\xi,s)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + {}$$
$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} q^L(\xi,s)\,d\xi \int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln s\sqrt{16h^2+(x-\xi)^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi f^L(s). \tag{24}$$

В левой части выражения (24) первый интеграл по x имеет вид [11]

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln s|x-\xi|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi\ln\frac{s}{2}.$$

Второй интеграл запишем в виде

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln s\sqrt{16h^2+(x-\xi)^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi\ln s + I_2(\xi),$$

где

$$I_2(\xi) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln\sqrt{16h^2+(x-\xi)^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Дифференцируя по ξ $I_2(\xi)$ и используя разложение (23) по параметру τ, получаем

$$\frac{dI_2}{d\xi} = \frac{\tau^2}{16}\,\pi\xi - \frac{\tau^4\pi}{256}\,\xi(\xi^2 - 30{,}5).$$

Интегрируя это выражение по ξ, находим

$$I_2(\xi) = \frac{\tau^2}{32}\,\pi\xi^2 + \frac{\tau^4\pi}{1024}\,\xi^2(61-\xi^2) + C_*.$$

Постоянная C_* определяется как значение интеграла I_2 при $\xi = 0$ [11]:

$$C_* = \pi\ln(4h) + \pi\ln 0{,}5\big[1 + \sqrt{1 + 1/(16h^2)}\,\big].$$

Подставляя значения интегралов и функцию $F(x, \xi, s)$, определяемую формулой (17), в уравнение (24), получаем

$$P^L(s) = \pi f^L(s)/w(s), \tag{25}$$

где

$$w(s) = d_1 \ln s + d_0 + d_2 s + d_3 s^2 \ln s + d_4 s^2 + \ldots,$$

$$d_0 = -(\ln 2 + \pi a_{0*}) J_0 + \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} Q_0(\xi) I_2(\xi)\, d\xi, \quad d_1 = 3J_0, \quad d_2 = -\pi a_{1*} J_0,$$

$$d_3 = -(\ln 2 + \pi a_{0*}) J_1 + 3J_2 + \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} Q_1(\xi) I_2(\xi)\, d\xi - J_0 \int\limits_{-1}^{1} \frac{a_{2*}(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx,$$

$$d_4 = -(\ln 2 + \pi a_{0*}) J_2 + \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} Q_2(\xi) I_2(\xi)\, d\xi - J_0 \int\limits_{-1}^{1} \frac{a_{3*}(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx,$$

$$J_k = \int\limits_{-1}^{1} Q_k(\xi)\, d\xi, \quad k = 0, 1, 2.$$

При получении для $P^L(s)$ асимптотических формул при малых s представим $w^{-1}(s)$ в выражении (25) в виде

$$w^{-1}(s) = \frac{1}{d_1 \ln s} \Big(1 + \frac{d_0}{d_1 \ln s} + \frac{d_2 s}{d_1 \ln s} + \ldots\Big)^{-1},$$

а выражение в скобках разложим в ряд, учитывая, что $s < 1$. Тогда

$$P^L(s) = \frac{\pi}{d_1} f^L(s) g_1^L(s) - \frac{\pi d_0}{d_1^2} f^L(s) g_2^L(s) + \ldots,$$

где $g_1^L(s) = 1/\ln s$; $g_2^L = 1/\ln^2 s$. Используя теорему о свертке, перейдем к оригиналам Лапласа

$$P(t) = \frac{\pi}{d_1} \int\limits_0^t f(t - \tau) g_1(\tau)\, d\tau - \frac{\pi d_0}{d_1^2} \int\limits_0^t f(t - \tau) g_2(\tau)\, d\tau + \ldots, \tag{26}$$

где согласно [10]

$$g_1(\tau) = \int\limits_0^\infty \frac{\tau^{z-1}}{\Gamma(z)}\, dz, \qquad g_2(\tau) = \int\limits_0^\infty \frac{z\tau^{z-1}}{\Gamma(z)}\, dz,$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция.

При $t \to \infty$ интегралы по τ становятся несобственными. Для оценки сходимости этих интегралов изучим поведение функций $g_1(\tau)$ и $g_2(\tau)$ при больших значениях аргумента. Применяя метод перевала [12] для оценки интегралов $g_1(\tau)$, $g_2(\tau)$ при $\tau \to \infty$, представим их в виде

$$g_1(\tau) = \int\limits_0^\infty \exp\left(h_1(z, \tau)\right) dz, \qquad g_2(\tau) = \int\limits_0^\infty \exp\left(h_2(z, \tau)\right) dz,$$

где $h_1(z,\tau) = (z-1)\ln\tau - \ln\Gamma(z)$; $h_2(z,\tau) = (z-1)\ln\tau + \ln z - \ln\Gamma(z)$. Для точки перевала имеем $h_i'(z) = 0$. Так как при больших z ($z \sim t$, $\tau \gg 1$) $\ln\Gamma(z) \sim z\ln z - z + \dots$, находим точку перевала $z = \tau$, в которой $h''(\tau,\tau) = -1/\tau$. Для вклада в интеграл $g_1(\tau)$ получаем

$$V_{1c}(\tau) = \sqrt{2\pi\tau}\,\tau^{\tau-1}\Gamma^{-1}(\tau) = e^{\tau},$$

поскольку при $\tau \to \infty$ $\Gamma(\tau) = \sqrt{2\pi}\exp(-\tau)\tau^{\tau-1/2}$. Для интеграла $g_2(\tau)$ точка перевала $z = \tau$ и при $\tau \to \infty$ ее вклад в интеграл $V_{2c}(\tau) = \tau e^{\tau}$.

Таким образом, для сходимости интегралов в представлении (26) для $P(t)$ необходимо, чтобы при $t \to \infty$ заданная функция перемещения штампа $f(x,t)$ экспоненциально возрастала. В этом случае суммарная нагрузка на штамп также возрастает со временем по экспоненте, так как в выражении для $P(t)$ под интегралом стоит функция $f(t-\tau)$.

В работе [13] путем асимптотического анализа получено аналогичное распределение при достаточно большом времени действия на штамп касательного усилия в задаче о чистом сдвиге штампом защемленного по основанию упругого слоя. Также в [13] отмечено, что в случае если вектор перемещения искать в виде $\boldsymbol{u}(x,y,t) = \boldsymbol{u}_0(x,y)\exp(\nu t)$, асимптотический анализ позволяет при достаточно больших временах строить асимптотическое решение задачи без применения преобразования Лапласа.

Функция $f(t)$, полученная из условия сходимости интегралов в (26), является частным случаем закона движения штампа. В общем случае данные интегралы могут быть расходящимися. Это обусловлено тем, что в ряде плоских контактных задач предельный переход по параметру осуществить не удается. В частности, в [14] показано, что ряд плоских смешанных задач для слоя толщиной λ сводится к интегральным уравнениям первого рода, которые при больших λ можно записать в виде

$$\int_{-1}^{1} q(\xi)(-\ln|\xi - x| + d)\,d\xi = f(x),$$

где $d = \ln(4\lambda/\pi)$. При больших λ ядро этого уравнения стремится к бесконечности. В [14] отмечается, что из-за наличия в ядре постоянной d предельный случай $\lambda = \infty$ не может быть рассмотрен. Авторы [14] считают это следствием замены пространственных задач плоскими. Ядро интегрального уравнения (16) также содержит логарифмическую постоянную, которая при $s \to 0$ стремится к бесконечности, поэтому решение данного уравнения стремится к бесконечности как $\ln s$, т. е. при $s \to 0$ предельный переход в решение стационарной задачи отсутствует. В работе [3] также отмечается, что при $t \to \infty$ такой предельный переход осуществить не удается.

В плоских задачах теории упругости и гидродинамики логарифмические члены появляются в случае, если рассматриваемая область сплошной среды содержит бесконечно удаленную точку. Однако это не препятствует использованию полученных решений в той части области, где соответствующие величины невелики (например, смещения в теории упругости или потенциал в гидродинамике). Полученное решение можно использовать при конечных временах взаимодействия, так же как и асимптотические решения в плоских контактных задачах для слоя конечных значений параметра λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
2. **Squire V. A.** Moving loads on ice plates / V. A. Squire, R. J. Hosking, A. D. Kerr, P. J. Langhorne. Dordrecht: Kluwer, 1996.

3. **Зеленцов В. Б.** Асимптотические методы в нестационарных динамических контактных задачах // Механика контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. С. 30–54.
4. **Коваленко Е. В., Зеленцов В. Б.** Асимптотические методы в нестационарных динамических задачах для упругого полупространства // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 1. С. 111–119.
5. **Сеймов В. М.** Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976.
6. **Филиппов А. П.** Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций / А. П. Филиппов, С. С. Кохманюк, Ю. С. Воробьев. Киев: Наук. думка, 1974.
7. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
8. **Панченков А. Н.** Теория потенциала ускорений. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1975.
9. **Рябченко В. П.** Метод интегральных уравнений в плоской и пространственной задачах об ударе пластины о жидкость конечной глубины // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 4. С. 98–111.
10. **Деч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971.
11. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1962.
12. **Евграфов М. А.** Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматгиз, 1962.
13. **Александров В. М., Коваленко Е. В.** Асимптотическое решение неустановившихся динамических контактных задач при большом времени // Теоретическая и прикладная механика. Киев; Донецк: Вища шк., 1985. Вып. 16. С. 9–14.
14. **Александров В. М.** Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В. М. Александров, Е. В. Коваленко. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 22/XII 2006 г.,
в окончательном варианте — 14/III 2007 г.