

УДК 621.438

## **Сопряженный теплообмен на неизотермическом вращающемся диске**

**М.В. Миронова<sup>1</sup>, Н.Н. Кортиков<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*ОАО “Силовые машины — ЛМЗ”, Санкт-Петербург*

<sup>2</sup>*Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*

E-mail: m.mironova@rambler.ru

Дан вывод критерия сопряжения для вращающегося диска. Анализируются характеристики сопряженного теплообмена на одиночном диске и в полости, образованной вращающимися и неподвижными дисками.

**Ключевые слова:** сопряженный теплообмен, неизотермичность, вращение диска, число Бюна.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Одной из важнейших проблем эксплуатации тепловых электрических станций является продление срока службы основных элементов (в частности, дисков) паровых турбин. Прогнозирование ресурса роторов при сверхкритических значениях температуры пара зависит от точности расчета температуры металла. Так, занижение расчетной температуры металла с 565 до 490 °С приведет к изменению ресурса на 44,5 % (со 100 тыс. часов до 144,5 тыс. часов) [1].

В настоящее время расчет теплообмена между вращающейся твердой стенкой диска и потоком пара осуществляется на основе закона Ньютона с введением коэффициента теплоотдачи [2]. Справедливость данного закона ограничивается случаем постоянства температуры стенки (или бесконечно большой теплопроводностью) [3]. Необходимость в сопряженной постановке задачи для неподвижной пластины определяется значением числа Бюна  $Bt$ , которое пропорционально отношению тепловых сопротивлений теплопроводности стенки и локальной теплоотдачи в пограничном слое на пластине [4]. Численное значение числа Бюна определяет границы применимости сопряженной постановки, которая является физически наиболее корректной при решении задач конвективного теплообмена.

В настоящее время для вращающихся неизотермических тел отсутствуют рекомендации, при выполнении которых возможен переход от сопряженной постановки (граничные условия четвертого рода) к классической (граничные условия

третьего рода), а также важные для практических приложений критериальные выражения вида

$$\text{Nu}_r = \text{Nu}_{r,0} f(\text{Br}_r), \quad (1)$$

где  $\text{Br}_r$  — число Бюна для вращающегося тела.

Выражение (1) содержит число Нуссельта  $\text{Nu}_{r,0}$ , которое описывает теплообмен диска в несопряженной постановке  $\text{Br}_r = 0$ , а также функцию  $f(\text{Br}_r)$ , учитывающую влияние неизотермичности внутри твердого тела. Она находится либо из решения уравнения энергии для теплового пограничного слоя [4], либо по результатам численного моделирования уравнений Рейнольдса и энергии.

### 1. КРИТЕРИЙ СОПРЯЖЕНИЯ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

Распределение температуры вдоль поверхности вращающегося твердого тела невозможно определить без совместного (сопряженного) рассмотрения теплопроводности внутри твердого тела и конвекции окружающей ее жидкости. При решении данной задачи необходимо применять граничные условия четвертого рода для поверхности сопряжения

$$-\lambda_f \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_W = -\lambda_s \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_W, \quad T_W = \theta_W. \quad (2)$$

Здесь  $T$  — температура в потоке жидкости,  $\theta$  — температура внутри твердого тела.

Используя, аналогично [3], конечно-разностную аппроксимацию производных в (2), условие равенства тепловых потоков преобразуем к виду

$$\theta_T = \frac{\Delta \theta}{\Delta T} \approx \frac{\lambda_f}{\lambda_s} \frac{b}{\delta_T}, \quad (3)$$

где  $\Delta \theta$  — перепад температуры по толщине диска,  $\Delta T = T_\infty - T_W$  — перепад температуры по толщине теплового пограничного слоя,  $\lambda_f$ ,  $\lambda_s$  — коэффициенты теплопроводности жидкости и диска соответственно.

Принимая, что толщина теплового пограничного слоя  $\delta_T = r / \text{Nu}_r$  и число Нуссельта  $\text{Nu}_r = \alpha r / \lambda_f = A \text{Pr}^m \text{Re}_{\omega,r}^n$  [2], параметр сопряжения  $\theta_T$  равен

$$\theta_T = A \frac{\lambda_f}{\lambda_s} \frac{b}{r} \text{Pr}^m \text{Re}_{\omega,r}^n, \quad (4)$$

где  $\text{Re}_{\omega,r} = \omega r^2 / \nu$  — число Рейнольдса вращения,  $r$  — радиальная координата,  $b$  — толщина диска,  $\text{Pr}$  — число Прандтля. Выражение в (4), которое в  $A$  раз меньше, чем  $\theta_T$ , принимается в качестве числа Бюна для вращающегося диска

$$\text{Br}_{\omega,r} = \frac{\lambda_f}{\lambda_s} \frac{b}{r} \text{Pr}^m \text{Re}_{\omega,r}^n. \quad (5)$$

Абсолютное значение числа Бюна вращения и характер его поведения вносят изменения в результаты решения задачи о локальном теплообмене на диске вследствие учета сопряженности. При ламинарном течении вокруг вращающегося диска, когда  $n = 1/2$  [2], число  $\text{Br}_{\omega,r}$  не зависит от радиальной координаты  $r$ . Для турбулентного режима течения показатель степени  $n = 4/5$ . В этом случае число  $\text{Br}_{\omega,r}$  возрастает к периферии диска, пропорционально  $r^{0,6}$ . Это указывает, что сопряженный подход в определении теплообмена более важен на периферии диска, чем в приосевой зоне. В отличие от диска, для пластины влияние сопряженности

сказывается сильнее в области ее носика [4]. Абсолютное значение числа Брюна возрастает для материалов с низкой теплопроводностью (например, стекло  $\lambda_S = 0,096 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ) при обтекании жидкостью (вода  $\lambda_f = 0,68 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ,  $\text{Pr} = 1,75$ ).

## 2. СОПРЯЖЕННЫЙ ТЕПЛОБМЕН НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДИСКЕ

### 2.1. Ламинарное течение

Уравнение энергии для ламинарного пограничного слоя на вращающемся в свободном пространстве диске имеет вид:

$$\frac{d}{dr} \left[ \int_0^{\delta_T} r v_r (T_\infty - T) dy \right] = ar \left( \frac{dT}{dy} \right)_{y=0}, \quad (6)$$

где  $a = \lambda_f / (\rho c_p)$ ,  $\rho, c_p$  — температуропроводность, плотность и теплоемкость жидкости. Приближенное решение для распределения радиальной составляющей скорости  $v_r$  по толщине динамического пограничного слоя  $\delta_0$  получено в [2]:

$$v_r = \frac{49}{60} \omega r \left[ \frac{y}{\delta_0} - \left( \frac{y}{\delta_0} \right)^2 \right], \quad \delta_0 = 3,5 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}. \quad (7)$$

Распределение температуры в тепловом пограничном слое и теле диска ищется в виде

$$\vartheta_1 = \vartheta_W + \frac{3}{2} \frac{\vartheta_\infty - \vartheta_W}{\delta_T} y - \frac{1}{2} \frac{\vartheta_\infty - \vartheta_W}{\delta_T^3} y^3, \quad \vartheta_2 = \vartheta_W + \frac{\vartheta_W}{b} y, \quad (8)$$

где  $\vartheta_1 = T - T_b$ ,  $\vartheta_2 = \theta - \theta_b$ ,  $T_b = \theta_b = \text{const}$ . Коэффициенты в степенных рядах (8) находятся из граничных условий (рис. 1):

$$\text{при } y = \delta_T, \quad \vartheta_1 = \vartheta_\infty = T_\infty - T_b, \quad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} = 0; \quad (9)$$

$$\text{при } y = 0, \quad \lambda_f \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} = \lambda_S \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y}, \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_W; \quad (10)$$

$$\text{при } y = -b, \quad \vartheta_2 = 0. \quad (11)$$

Параметр сопряжения, который характеризует безразмерную температуру стенки, равняется

$$\theta_T = \frac{\vartheta_W}{\vartheta_\infty} = \frac{z}{1+z}, \quad \text{где } z = \frac{3}{2} (\lambda_f / \lambda_S) (b / \delta_T).$$

Подставляя выражения (7) и (8) в интегральное соотношение (6), получим дифференциальное уравнение для определения соотношения между толщинами теплового и динамического пограничных слоев

$k = \delta_T / \delta_0$ :

$$\left( \text{Br}_0 + k \right) \frac{\delta_0}{r} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \left( \frac{k^3}{k + \text{Br}_0} \right) \right] = \frac{900}{49} \frac{a}{\omega \delta_0}, \quad (12)$$

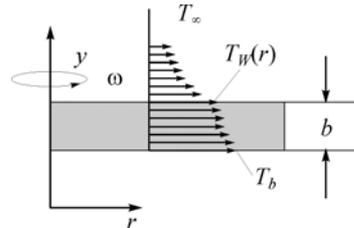


Рис. 1. К выводу условия сопряжения для диска.

где  $Br_0 = \frac{3}{2}(\lambda_f / \lambda_s)(b / \delta_0)$ . Уравнение (12) имеет решение:  $k = 0,908 Pr^{-1/3}$  в случае, когда  $Br_0 \rightarrow 0$ . При этом  $Nu_r = 0,472 Re_{\omega,r}^{1/2} Pr^{1/3}$ , которое для воздуха ( $Pr = 0,7$ ) практически совпадает с точным решением уравнения баланса энергии [2] (погрешность не превышает 6 %). Приближенное решение уравнения (12) при конечных значениях  $Br_0$  имеет вид:

$$k = 0,908 Pr^{-1/3} (1+z)^{1/2}. \quad (13)$$

При этом выражение для локального теплообмена для неизотермического вращающегося диска конечной толщины запишется:

$$Nu_r = 0,472 Re_{\omega,r}^{1/2} Pr^{1/3} (1+z)^{-1/2}. \quad (14)$$

Последний множитель в (14) указывает, что учет сопряженности приводит к снижению теплообмена на диске. Это связано с тем, что безразмерный температурный напор  $\frac{T_\infty - T_W}{T_\infty - T_b} = \frac{1}{1+z}$  уменьшается по величине при конечных значениях параметра сопряжения  $\theta_T$  (или  $z$ ). Аналогичное снижение коэффициента теплоотдачи отмечалось в [3] при ламинарном продольном обтекании пластины и падающем по ее длине температурном напоре.

## 2.2. Турбулентное течение

Характеристики турбулентного динамического и теплового пограничных слоев принимаются в соответствии с результатами [2]

$$v_r = 0,162 \omega r \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right), \quad v_\varphi = \omega r \left[ 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right], \quad \delta = 0,525 r Re_{\omega,r}^{-1/5}, \quad (15)$$

$$q = q_W = c_p \tau_\varphi \frac{T_W - T_\infty}{r}, \quad \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty} = \frac{v_\varphi}{\omega r}, \quad \tau_\varphi = 0,0267 \rho (\omega r)^2 Re_{\omega,r}^{-1/5}. \quad (16)$$

Условие сопряжения (10) при использовании видоизмененной аналогии Рейнольдса для вращающегося диска (16) переписывается в виде параметра сопряжения для турбулентного режима течения на диске

$$\theta_T = \frac{g_W}{g_\infty} = \frac{z_t}{1+z_t}, \quad z_t = 0,0267 \frac{\lambda_f}{\lambda_s} \frac{b}{r} Re_{\omega,r}^{4/5}. \quad (17)$$

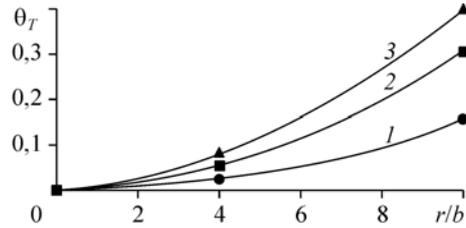
В уравнении (17) переменная  $z_t$  включает в себя число Брюна  $Br_{\omega,r}$ .

Расчет параметра  $\theta_T$  для турбулентного режима течения (рис. 2) приведен для  $Re_{\omega,r} = 10^6$ , что соответствует условиям работы дисков турбин [1]. При расчете принималось, что радиус диска равняется 200 мм, его толщина — 20 мм. Диск изготовлен из нержавеющей стали и обтекается воздухом.

Результаты расчетов (рис. 2) показывают, что увеличение числа оборотов приводит к возрастанию радиальной неравномерности температуры для верхней поверхности диска. При этом в случае 3000 об/мин на периферии диска ( $r/b = 10$ )

Рис. 2. Изменение температуры поверхности вращающегося диска в зависимости от радиуса.

1 — 1000, 2 — 3000, 3 — 5000 об/мин при  $\omega = 104,7; 314; 523,31$  с.



параметр сопряжения  $\theta_T = 0,3$ , и, следовательно, радиальная неравномерность температуры может составлять 30 % от величины  $T_\infty - T_b$ .

### 3. СОПРЯЖЕННЫЙ ТЕПЛОБМЕН ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДИСКА

В настоящее время благодаря развитию вычислительной техники и программного обеспечения появляется возможность моделировать процессы теплообмена в сопряженной постановке [5]. Для практического применения наибольший интерес представляют турбулентные течения с осевым входом газа в полость, образованную двумя дисками: один диск (неизотермический) вращается, другой — неподвижен [6].

Диск из нержавеющей стали (радиусом  $r_0$  и толщиной  $b$ ) вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в пространстве, ограниченном неподвижным вторым диском и ободом. Холодный газ (воздух) с массовым расходом  $G_i$  втекает в междисковый зазор  $s$  в осевом направлении через отверстие радиусом  $r_i$  во вращающемся диске и выходит из полости через кольцевую щель  $\Delta$  (рис. 3). На внешней поверхности вращающегося диска и на неподвижном ободе задается тепловой поток. Неподвижный диск является адиабатическим. Исследуемая область задается следующими геометрическими соотношениями  $s/r_0$  и  $r_0/r_i$ , которые характеризуют осевую и радиальную протяженность полости соответственно. Численные значения размерных параметров задачи приведены в таблице.

Постановка задачи предполагает, что течение и теплообмен описываются системой уравнений Навье–Стокса и энергии (с учетом диссипации), осредненных по Рейнольдсу, в осесимметричной постановке. Решение основных уравнений сохранения строится на основе алгоритма segregated solver в пакете FLUENT [7]. Дискретизация пространственных операторов осуществляется по методу конечных объемов (схемы дискретизации второго порядка). В качестве сеточного генератора применяется пакет GAMBIT.

Задача решается в сопряженной постановке, когда совместно решаются уравнения конвективного теплообмена для газовой области и теплопроводности для дисков. В качестве модели турбулентности выбирается SST  $k-\omega$  (модель Ментера). В проведенных расчетах модель турбулентности применялась с техникой расширенного пристенного моделирования, которое нацелено на корректное описание турбулентных течений вплоть до самой стенки. Это приводит к необходимости использования достаточно подробных расчетных сеток: безразмерная координата первого пристенного узла  $y^+$  должна удовлетворять условию  $y^+ \leq 1$ .

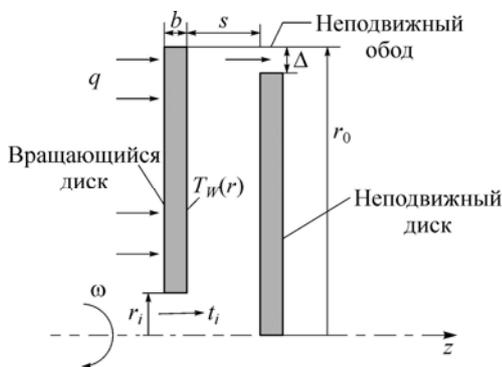


Рис. 3. Расчетная область.

Таблица

Геометрические и режимные характеристики задачи о вращении диска в ограниченном пространстве

$s$	$r_i$	$\Delta$	$b$	$r_0$	$\omega$	$q$	$G_i$
мм	мм	мм	мм	мм	об/мин	Вт/м <sup>2</sup>	кг/с
99,2	51,0	13,0	0,74	451,0	3000	500	$3,57 \cdot 10^{-2}$

Результаты расчета температуры на внутренней поверхности нагреваемого диска ( $z = 0$ ) и в сечении  $z = 0,0254$  м приведены на рис. 4, где отмечается удовлетворительное согласование с опытными данными [6] (погрешность не превышает 10 %).

Сопоставление результатов расчета с данными по распределению числа Нуссельта на вращающемся диске  $Nu_r = \frac{qr}{\lambda_f(t_w - t_i)}$  [6] представлено на рис. 5, где

показано улучшение соответствия результатов расчета и данных эксперимента при использовании граничных условий четвертого рода (1 — расчетная модель с сопряжением, 2 — несопряженная постановка). Использование несопряженной постановки (кривая 1) приводит к завышению результатов расчета над опытными данными (до 20 % на периферии диска). Это может быть связано с неучетом дополнительного термического сопротивления теплопроводности вращающегося диска, а также с наличием в полости уменьшающегося к периферии температурного напора (см. рис. 4).

Для получения критериального выражения вида (1) был исследован диапазон  $1 < Br_{\omega,r} < 4$  для неизотермического диска, вращающегося в ограниченной полости. В рассмотренном диапазоне чисел  $Br_{\omega,r}$  отношение локальных характеристик теплообмена  $Nu_{r,0} / Nu_r$  обобщается в виде линейной функции и описывается уравнением вида

$$Nu_r = Nu_{r,0}(1 + 0,0516Br_{\omega,r})^{-1}. \quad (18)$$

Выражение (18) указывает на важность внесения уточнений (в сторону занижения до 20 %) в рекомендации по расчету теплового и напряженного состояний дисков паровых турбин [8].

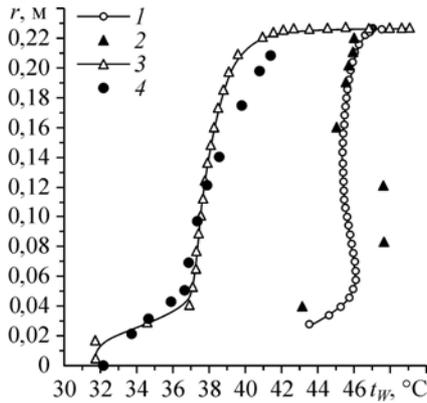


Рис. 4. Сравнение расчетных и опытных данных [6] для температуры.

На поверхности диска ( $z = 0$ ): 1 — расчет, 2 — опыт; в сечении ( $z = 0,0254$  м): 3 — расчет, 4 — опыт.

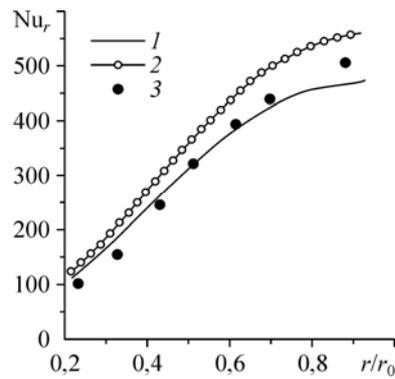


Рис. 5. Распределение  $Nu_r$  на поверхности вращающегося диска в зависимости от радиуса (частота вращения диска 3700 об/мин).

1, 2 — расчет (сопряженная и несопряженная постановка), 3 — опыт.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ковалев И.А., Хоменок Л.А., Елькин Д.В.** Проблема прогибов роторов турбин и пути их решения // Тр. НПО ЦКТИ. 2002. Вып. 283. С. 24–31.
2. **Дорфман Л.А.** Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М.: ГИФМЛ, 1960. 260 с.
3. **Дорфман А.Ш.** Теплообмен при обтекании неизотермических тел. М.: Машиностроение, 1982. 192 с.
4. **Luikov A.V.** Conjugate convective heat transfer problems // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1974. Vol. 17, No. 2. P. 257–265.
5. **Кортиков Н.Н., Миронова М.В.** Методика расчета сопряженного теплообмена при обтекании неизотермических вращающихся тел // Мат. XIII Всеросс. конф. по проблемам науки и высшей школы. Т. 1. СПб.: Изд-во Политех. ун-та, 2009. 272 с.
6. **Yu J.P., Sparrow E.M., Eckert E.R.G.** Experiments on a shrouded, parallel disk with rotation and coolant throughflow // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1973. Vol. 16. P. 311–328.
7. **FLUENT 6.3.26.** User's Guide. Fluent Inc. USA. 2003.
8. **Фролов К.В., Израилев Ю.Л., Махутов Н.А., Морозов Е.М., Партон В.З.** Расчет термонапряжений и прочности роторов и корпусов турбин. М.: Машиностроение. 1988. 239 с.

*Статья поступила в редакцию 4 мая 2010 г.,  
после доработки — 27 декабря 2010 г.*