УДК 532.529

ОБ УРАВНЕНИЯХ КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ В УСЛОВИЯХ МОДУЛЯЦИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В. С. Теплов

Пермский государственный технический университет, 614990 Пермь
E-mail: teplov@pstu.ru

Исследуется тепловая конвекция в неоднородной среде, состоящей из жидкости и твердой примеси, в условиях вибраций конечной частоты. В рамках обобщенного приближения Буссинеска выводятся уравнения конвекции и рассматривается задача об устойчивости горизонтального слоя по отношению к бесконечно малым возмущениям при вертикальных вибрациях.

Ключевые слова: частицы, вибрация, конвекция, устойчивость.

Введение. Изучение влияния периодического изменения одного из параметров среды на возникновение конвекции начато в работе [1], в которой рассмотрен случай периодической модуляции равновесного градиента температуры. Показано, что модуляция оказывает различное влияние на устойчивость неравномерно нагретой жидкости. При малых амплитудах модуляции η вибрации приводят к изменению порогового значения числа Рэлея R_{cr}, причем R_{cr} монотонно увеличивается с ростом амплитуды модуляции. Стабилизирующее влияние колебаний на устойчивость имеет место лишь при малых амплитудах. Начиная с некоторого критического значения η_* увеличение амплитуды при заданных числе Рэлея и частоте модуляции приводит к параметрическому возбуждению колебательных конвективных движений с периодом изменения интенсивности, кратным периоду модуляции. Параметрическая дестабилизация равновесия имеет место при любых значениях R (в том числе при значениях $\mathrm{R} < 0$, соответствующих нагреву сверху). Экспериментально этот факт подтвержден в работах [2, 3].

В [1–3] исследовалась конвективная неустойчивость однофазной среды. Однако, как известно, в экспериментах для визуализации течения часто используются мелкие частицы алюминиевой пудры, полистирена, табачного дыма и др. В связи с этим возникает вопрос о влиянии примеси на структуру и устойчивость конвекции.

Первая попытка учесть влияние примеси на устойчивость конвекции предпринята в работах [4, 5], где для рассмотрения таких задач предложена простейшая модель в рамках приближений Буссинеска. Полученная модель применяется для анализа устойчивости стационарного конвективного течения среды, содержащей твердую примесь, между вертикальными плоскостями, нагретыми до разных температур. При этом, если в работе [4] оседанием частиц пренебрегается, то в [5] задача решается в полной постановке. Однако, как показано в [6], система уравнений [5], вообще говоря, не является строго буссинесковой, так как содержит асимптотически большие и асимптотически малые параметры. В [6] также впервые получена непротиворечивая замкнутая система уравнений конвекции в среде с твердой примесью.

Предложенный в [6] подход использован в [7, 8] для вывода уравнений конвекции жидкости с примесью в условиях модуляции поля силы тяжести. Там же рассмотрена задача устойчивости течения в вертикальном слое жидкости при горизонтальных вибрациях вдоль слоя.

Вместе с тем можно показать, что полученные в [6–8] уравнения конвекции в запыленной среде имеют существенные ограничения на величину градиентов массовой концентрации примеси. Следовательно, рассматриваемые в указанных работах задачи корректны лишь при однородном распределении концентрации по объему. Ясно, что в этом случае можно говорить лишь о качественной характеристике процесса, так как, например, в силу уравнения неразрывности мелкомасштабная модуляция концентрации примеси приводит к пространственной модуляции поля скорости, в котором находятся частицы. Исследование, проведенное в настоящей работе, позволяет восполнить указанный пробел. В рамках выведенных ниже уравнений рассматривается задача устойчивости горизонтального слоя двухфазной среды в условиях вертикальных вибраций конечной частоты.

1. Вывод определяющих уравнений. Пусть слой жидкости с примесью совершает гармонические колебания в направлении вектора $\boldsymbol{n}$ с амплитудой a и частотой ω. В этом случае на каждый элемент объема двухфазной среды помимо силы тяжести действуют вибрационные силы инерции. Формально это означает, что в неинерциальной системе отсчета, связанной с полостью, к статическому ускорению свободного падения добавляется переносное (вибрационное) ускорение:

$$\boldsymbol{g} \to \boldsymbol{g} + \boldsymbol{n} a\omega^2 \sin(\omega t).$$

Пусть величины μ и φ — соответственно доля жидкости и твердой фазы в единице объема гетерогенной смеси: $\mu+\varphi = 1$. Для каждого компонента среды запишем уравнения баланса массы, импульса и энергии в дифференциальной форме [9]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial(\mu\rho_f)}{\partial t} + \nabla\cdot(\mu\rho_f\boldsymbol{v}_f) = 0, \qquad \frac{\partial(\varphi\rho_s)}{\partial t} + \nabla\cdot(\varphi\rho_s\boldsymbol{v}_s) = 0,\\
\mu\rho_f\Big(\frac{\partial\boldsymbol{v}_f}{\partial t} + \boldsymbol{v}_f\cdot\nabla\boldsymbol{v}_f\Big) = -\mu\nabla P + \eta\nabla\cdot(\mu_*\boldsymbol{e}) + \varphi\alpha(\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_f) - \mu\rho_f g(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{n}A\sin(\omega t)),\\
\varphi\rho_s\Big(\frac{\partial\boldsymbol{v}_s}{\partial t} + \boldsymbol{v}_s\cdot\nabla\boldsymbol{v}_s\Big) = -\varphi\nabla P - \varphi\alpha(\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_f) - \varphi\rho_s g(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{n}A\sin(\omega t)), \qquad (1)\\
\mu\rho_f C_f\Big(\frac{\partial T_f}{\partial t} + \boldsymbol{v}_f\cdot\nabla T_f\Big) = \varkappa\nabla\cdot(\mu\nabla T_f) + \varphi\zeta(T_s - T_f),\\
\varphi\rho_s C_s\Big(\frac{\partial T_s}{\partial t} + \boldsymbol{v}_s\cdot\nabla T_s\Big) = -\varphi\zeta(T_s - T_f).
\end{gathered}$$

Здесь t — время; P — давление; $\boldsymbol{v}_f$, $\boldsymbol{v}_s$ — скорости компонентов смеси; индексы f, s соответствуют жидкой и твердой фазам; T_f, T_s — температуры; ρ_f, ρ_s и c_f, c_s — соответственно плотности и теплоемкости; $\varkappa$ — теплопроводность жидкости; μ_* — вязкость; α, ζ — коэффициенты трения и теплообмена между фазами; $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z; $\boldsymbol{e}$ — тензор вязких напряжений; $A = a\omega^2/g$ — параметр перегрузки. В (1) учтено, что взаимодействие между фазами происходит по закону Стокса, а теплообмен — по закону Фурье. Частицы предполагаются сферическими, с одинаковым радиусом r, поэтому

$$\alpha = 6\pi r\eta/V, \qquad \zeta = 4\pi r\varkappa/(Vc_f), \qquad (2)$$

где V — характерный объем частицы.

Неоднородность температурного поля в выражениях для массовых сил будем учитывать на основе приближения Буссинеска, т. е. отклонения значений плотности среды от среднего значения будем полагать настолько малыми, что ими можно пренебречь во всех уравнениях, кроме уравнения движения, где это отклонение учитывается лишь в члене с подъемной силой. Плотность жидкости, содержащуюся в этом члене, разложим в ряд Тейлора с удержанием только первых двух членов ряда:

$$\rho_f = \rho_{f0}(1 + \beta_f \theta). \tag{3}$$

Здесь β_f — коэффициент теплового расширения жидкости; $\theta = T - T_0$ — характерная разность температур в полости.

Для последовательного учета вклада каждого слагаемого в задаче (1) перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве масштаба длины характерный размер h, времени — h^2/ν, скорости — ν/h, температуры — θ, давления — $\rho_{f0}\nu^2/h^2$ (ν — кинематическая вязкость). Тогда с учетом (2), (3) в пренебрежении изменением плотности твердой примеси за счет теплового расширения получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu \boldsymbol{v}_f) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{v}_s) = 0,$$

$$\mu\Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t} + \boldsymbol{v}_f \cdot \nabla \boldsymbol{v}_f\Big) = -\mu \nabla P + \nabla \cdot (\mu_* \boldsymbol{e}) + \varphi G(\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_f) - \mu\,\mathrm{Ga}(1 - \beta\theta T)(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{n} A \sin(\Omega t)),$$

$$\varphi D\Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} + \boldsymbol{v}_s \cdot \nabla \boldsymbol{v}_s\Big) = -\varphi \nabla P - \varphi G(\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_f) - \varphi D\,\mathrm{Ga}(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{n} A \sin(\Omega t)), \tag{4}$$

$$\mu\Big(\frac{\partial T_f}{\partial t} + \boldsymbol{v}_f \cdot \nabla T_f\Big) = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \nabla \cdot (\mu \nabla T_f) + \varphi\zeta(T_s - T_f),$$

$$\varphi D B\Big(\frac{\partial T_s}{\partial t} + \boldsymbol{v}_s \cdot \nabla T_s\Big) = -\varphi\zeta(T_s - T_f).$$

В задаче (4) помимо параметра перегрузки A имеются следующие безразмерные параметры: $G = \tau/\tau_v = (9/2)(h/r)^2 \gg 1$ — отношение характерного “вязкого” времени к времени выравнивания возмущений скорости вблизи частиц; $\zeta = \tau/\tau_T = (3/\mathrm{Pr})(h/r)^2 \gg 1$ — отношение характерного “вязкого” времени к времени выравнивания возмущений температуры; $\mathrm{Ga} = gh^3/\nu^2 \gg 1$ — число Галилея; $\Omega = \omega h^2/\nu$ — безразмерная частота модуляции; $D = \rho_{s0}/\rho_{f0} \gg 1$ — отношение плотности твердой фазы к плотности жидкости; $B = c_s/c_f$ — отношение теплоемкостей фаз; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля.

Будем считать, что характерные времена выравнивания возмущений вблизи частиц существенно меньше остальных характерных времен задачи, т. е.

$$\frac{G}{\Omega} = \frac{9}{2}\frac{\tau_\omega}{\tau_v} = \frac{9}{2}\frac{\nu}{\omega r^2} = \frac{9}{2}\Big(\frac{h_s}{r}\Big)^2 \gg 1, \qquad \frac{\zeta}{\Omega} = \frac{3}{\mathrm{Pr}}\frac{\tau_\omega}{\tau_T} = \frac{3}{\mathrm{Pr}}\frac{\nu}{\omega r^2} = \frac{3}{\mathrm{Pr}}\Big(\frac{h_s}{r}\Big)^2 \gg 1.$$

Следовательно, радиус частиц существенно меньше толщины вязкого скин-слоя $h_s = \sqrt{\nu/\omega}$. Предположим также, что объемная доля частиц настолько мала, что при $D \to \infty$ величина φD асимптотически стремится к нулю.

Следуя стандартной процедуре, поля давления, температуры и скорости представим в виде суммы постоянных средних значений p_0, T_{f0}, T_{s0}, v_{f0}, v_{s0} и малых отклонений от них p, T_f, T_s, v_f, v_s. Для этих величин примем следующие разложения в ряд по формальному малому параметру ε:

$$P = \varepsilon^{-1} P_{-1} + P_0 + \ldots, \qquad \boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_{f0} + \varepsilon \boldsymbol{v}_{f1} + \ldots, \qquad \boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_{s0} + \varepsilon \boldsymbol{v}_{s1} + \ldots,$$

$$\mu = 1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \ldots, \qquad \varphi = \varepsilon^2 \varphi_2 + \ldots, \qquad T_f = T_{f0} + \varepsilon T_{f1} + \ldots,$$

$$T_s = T_{s0} + \varepsilon T_{s1} + \ldots, \qquad \tau = \Omega t, \qquad t = t_0, \qquad t_1 = \Omega^{-1} t.$$

Подставляя указанные разложения в (4) и собирая члены одного порядка малости, в основном порядке получим

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_f=0,$$

$$0=-\nabla P_{-1}-\mathrm{Ga}(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{n}A\sin(\omega t)),\qquad 0=-\varphi G(\boldsymbol{v}_s-\boldsymbol{v}_f)-\varphi D\,\mathrm{Ga}(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{n}A\sin(\Omega t)),$$

$$0=\varphi\zeta(T_s-T_f),\qquad 0=-\varphi\zeta(T_s-T_f),$$

откуда следует, что в первом приближении различием температур жидкости и твердой фазы можно пренебречь. При этом скорости частиц и жидкости связаны соотношением

$$\boldsymbol{v}_s=\boldsymbol{v}_f-S(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{n}A\sin(\Omega t)). \tag{5}$$

Здесь $S=D\,\mathrm{Ga}/G=(2/9)D\,\mathrm{Ga}(r/h)^2$ — параметр, совпадающий с параметром, введенным в работах [6–8]. Вместе с тем в данном разложении отсутствуют какие-либо ограничения на массовую концентрацию примеси.

В следующем порядке разложения с учетом (5) окончательно получим замкнутую систему уравнений конвекции двухфазной среды в условиях вибрации конечной частоты:

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_f}{\partial t}+\boldsymbol{v}_f\cdot\nabla\boldsymbol{v}_f=-\nabla P+\Delta\boldsymbol{v}_f+(\mathrm{Gr}\,T-\xi)(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{n}A\sin(\Omega t)),$$

$$\frac{\partial T_f}{\partial t}+\boldsymbol{v}_f\cdot\nabla T_f=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T_f,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}+\boldsymbol{v}_f\cdot\nabla\xi=S(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{n}A\sin(\Omega t))\cdot\nabla\xi, \tag{6}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_f=0.$$

Эволюцию системы (6) помимо введенных ранее параметров S, A, Ω, Pr определяет число Грасгофа $\mathrm{Gr}=g\beta\theta h^3/\nu^2$. При этом массовая концентрация $\xi=\varphi D\,\mathrm{Ga}$.

2. Устойчивость горизонтального слоя двухфазной среды в условиях вибрации конечной частоты. Полученные уравнения используем при решении задачи устойчивости бесконечного горизонтального слоя двухфазной среды жидкость — твердые частицы толщиной $2h$ в поле поперечных вибраций конечной частоты ($\boldsymbol{n}=(0,0,1)$) при постоянной разности температур на границах 2θ (рис. 1). Будем считать, что границы слоя свободные (задача Рэлея), т. е. на них отсутствуют касательные напряжения. Границы предполагаются плоскими, т. е. возникающие конвективные возмущения не приводят к искривлению границы. Что касается температуры, то, как отмечено выше, ее значения

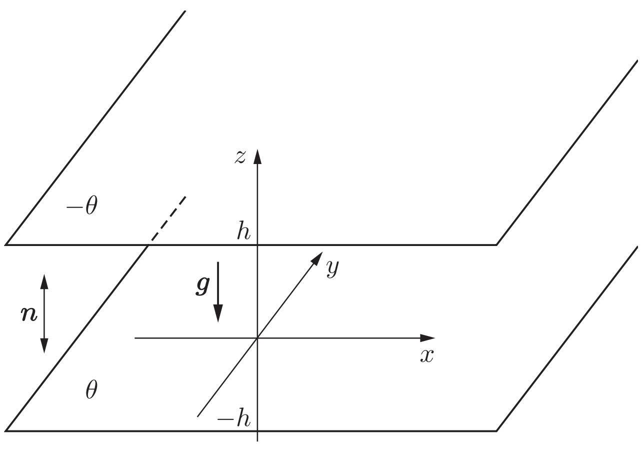

Рис. 1. Геометрия задачи

на границах фиксированы и, следовательно, возмущения температуры на границах отсутствуют. Таким образом, направив ось z вертикально вверх, в безразмерных переменных получаем следующую систему граничных условий:

$$z = \pm 1: \qquad T_0 = \mp 1, \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Задача (6) с граничными условиями (7) допускает нестационарное механическое равновесие, при котором массовая концентрация постоянна, т. е. остается однородной во всем объеме, занимаемом жидкостью, скорость равна нулю, а температура зависит только от вертикальной координаты z ($T_0 = -z$). При этом давление зависит как от вертикальной координаты, так и от времени:

$$P_0(z,t) = -(\mathrm{Gr}\, z^2/2 + \xi_0 z)(1 + A\sin(\Omega t)) + C(t).$$

Линеаризуя уравнения (6) в окрестности основного состояния, исключая давление и горизонтальные компоненты скорости и вводя нормальные возмущения скорости $v(z,t)$, температуры $\vartheta(z,t)$ и массовой концентрации $\sigma(z,t)$, получим следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\,(v'' - k^2 v) = (v^{\mathrm{IV}} - 2k^2 v'' + k^4 v) - k^2(\mathrm{Gr}\,\vartheta - \sigma)(1 + A\sin(\Omega t)),\\
\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\,(\vartheta'' - k^2\vartheta) + v, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = S(1 + \sin(\Omega t))\sigma',\\
z = \pm 1: \qquad v = 0, \quad v'' = 0, \quad \vartheta = 0, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2.
\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по z.

Уравнение для σ имеет решение

$$\sigma(z,t) = \sigma_0 \sin\alpha[z + S(t - (A/\Omega)\cos(\Omega t))]. \tag{9}$$

Отметим, что уравнение (9) представляет собой уравнение волны, распространяющейся вдоль оси z с зависящей от времени фазовой скоростью, что естественно: оседая, частицы порождают волну, распространяющуюся в неоднородной по объему среде из-за присутствия периодически зависящих от времени массовых сил.

Для дальнейшего упрощения задачи будем считать частицы настолько малыми, что параметр S, характеризующий оседание частиц в отсутствие вибраций, можно положить равным нулю. Заметим, что в этом случае в силу симметрии на границах слоя должны исчезать возмущения массовой концентрации примеси, т. е.

$$z = \pm 1: \qquad \sigma = 0. \tag{10}$$

С учетом (10) задача (8) допускает точное решение

$$v = a(t)\sin(n\pi z), \qquad \vartheta = b(t)\sin(n\pi z), \qquad \sigma = \sigma_0 \sin(n\pi z), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (8) и принимая $n = 1$, что соответствует основному уровню неустойчивости, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд $a(t)$ и $b(t)$:

$$\begin{gathered}
(k^2 + \pi^2)\dot a + (k^2 + \pi^2)^2 a = k^2(\mathrm{Gr}\, b - \sigma_0)(1 + A\sin(\Omega t)),\\
\dot b + (k^2 + \pi^2) b/\mathrm{Pr} = a
\end{gathered} \tag{12}$$

(точка означает дифференцирование по времени).

В уравнениях (12) выполним замену переменных согласно соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial t} = (k^2 + \pi^2)\,\frac{\partial}{\partial \tau}, \quad a = (k^2 + \pi^2)\bar a, \quad b = \bar b, \quad \sigma_0 = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2}\,\bar\sigma.$$

Опуская черту над величинами и исключая амплитуду a, получим неоднородное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами:

$$\ddot{b} + 2\beta\dot{b} + (\omega_0^2 - A\hat{\mathrm{Gr}}\sin(\Omega t))b = -\sigma(1 + A\sin(\Omega t)). \qquad (13)$$

Здесь $\beta = (1 + 1/\mathrm{Pr})/2$; $\omega_0^2 = \mathrm{Pr}^{-1} - \hat{\mathrm{Gr}}$; $\hat{\mathrm{Gr}} = \mathrm{Gr}/\mathrm{Gr}_0$ — приведенное число Грасгофа; $\mathrm{Gr}_0 = (k^2 + \pi^2)^3/k^2$ — критическое число Грасгофа в отсутствие модуляции в чистой жидкости.

При $\sigma = 0$ задача (13) сводится к задаче [1] о модуляции равновесного вертикального градиента температуры. В этом случае при произвольных значениях параметров решение системы либо затухает, либо возрастает со временем. Периодическое (нейтральное) поведение возмущений возможно лишь при определенном соотношении параметров, которое и определяет границу устойчивости. Таким образом, нахождение границ конвективной устойчивости сводится к отысканию условий существования периодических решений уравнения (13). В случае $\sigma \neq 0$ система (13) становится неоднородной. Тогда наряду с рассматриваемым в [1] параметрическим резонансом возможен обычный резонанс из-за присутствия в уравнении вынуждающей силы. Кроме того, при определенных значениях параметров периодических решений, найденных в [1], может и не существовать. Для их отыскания на нетривиальные решения однородной задачи необходимо наложить определенные условия разрешимости, а именно: правая часть системы (13) должна быть ортогональна любому решению однородной системы.

3. Разложение вблизи периодического решения. Исследуем систему (13) в предположении малости коэффициента затухания β и амплитуды модуляции A, применив метод многих масштабов. Согласно основной идее метода амплитуду b, параметры β, A и оператор дифференцирования по времени представим в виде рядов по формальному малому параметру ε:

$$\begin{gathered} b = b_0 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \ldots, \qquad A = \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots, \qquad \beta = \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \ldots, \\ t = t_0 + \varepsilon t_1 + \varepsilon^2 t_2 + \ldots, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2\,\frac{\partial}{\partial t_2} + \ldots . \end{gathered} \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13) и собирая соответствующие члены при одинаковых степенях ε, получаем неоднородную задачу, которая при определенном соотношении собственной частоты и частоты вынуждающей силы содержит линейные по t_0 решения. Для рассматриваемой системы возможны три случая: 1) $\Omega \neq \omega_0$ и $\Omega \neq 2\omega_0$; 2) $\Omega = 2\omega_0$; 3) $\Omega = \omega_0$.

В первом случае, когда частота вынуждающей силы не является кратной собственной частоте системы, условия разрешимости приводят к экспоненциальному затуханию в решении задачи в основном порядке разложения. Таким образом, получаем решение, осциллирующее с частотой вынуждающей силы в окрестности некоторого среднего значения:

$$b = -\frac{\sigma}{\omega_0^2} - \varepsilon\,\frac{A_1\sigma}{\omega_0^2 - \Omega^2}\Big(1 + \frac{\hat{\mathrm{Gr}}}{\omega_0^2}\Big)\sin(\Omega t_0). \qquad (15)$$

Во втором случае, когда $\Omega = 2\omega_0$, имеет место обычный параметрический резонанс. При этом условия разрешимости определяют границу, отделяющую устойчивые решения от неустойчивых. Характеристическое уравнение задачи имеет вид

$$\lambda = -\beta_1 \pm \sqrt{\Big(\frac{\hat{\mathrm{Gr}}A_1}{4\omega_0}\Big)^2 - \Big(\frac{\delta}{2}\Big)^2}.$$

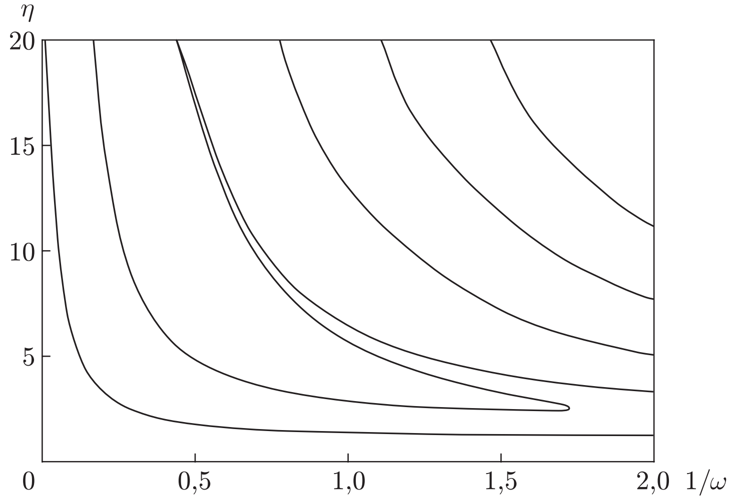

Рис. 2. Области устойчивости в плоскости параметров обратная частота модуляции — абсолютная амплитуда модуляции при $\hat{\mathrm{Gr}} = 1{,}2$, $\mathrm{Pr} = 1$

Граница устойчивости определяется из условия $\lambda = 0$. Следует отметить, что при наличии диссипации даже при точном резонансе, когда параметр расстройки $\delta = 0$, для возникновения неустойчивости необходима конечная глубина модуляции параметра, пороговое значение которой равно $A_1 = 4\beta_1\omega_0/\hat{\mathrm{Gr}}$.

В третьем случае, когда $\Omega = \omega_0$, также можно ожидать резонанса, но он должен быть обусловлен наличием вынуждающей силы. Вводя параметр расстройки и полагая при этом $\Omega = \omega_0 + \varepsilon\delta$, найдем решение задачи

$$b_0 = \frac{\sigma A_1 \delta}{2\omega_0(\beta_1^2 + \delta^2)}\Big(1 + \frac{\hat{\mathrm{Gr}}}{\omega_0^2}\Big)\cos(\Omega t_0) - \frac{\sigma A_1 \beta_1}{2\omega_0(\beta_1^2 + \delta^2)}\Big(1 + \frac{\hat{\mathrm{Gr}}}{\omega_0^2}\Big)\sin(\Omega t_0) - \frac{\sigma}{\omega_0^2}.$$

Таким образом, на границах зон устойчивости, определяемых целыми решениями, система стремится к установившемуся движению с частотой вынуждающей силы.

В случае конечных значений β для отыскания границ устойчивости основного течения системы использовался метод Флоке, включающий построение матрицы монодромии и вычисление ее собственных значений. При вычислениях находились такие значения управляющих параметров, при которых хотя бы один мультипликатор выходил на единичную окружность. Результаты расчетов в плоскости параметров $(1/\omega, \eta)$ ($\eta = \hat{\mathrm{Gr}}A$ — абсолютная амплитуда модуляции) при фиксированных значениях чисел Грасгофа и Прандтля представлены на рис. 2. Значение $\hat{\mathrm{Gr}} = 1$ соответствует границе устойчивости в статическом случае. При отсутствии модуляции равновесие неустойчиво при $\hat{\mathrm{Gr}} > 1$. Таким образом, при $\hat{\mathrm{Gr}} = 1{,}2$ ось $\eta = 0$ принадлежит области неустойчивости. К этой оси примыкает основная полоса неустойчивости, внутри которой возмущения нарастают, осциллируя с частотой, равной частоте модуляции. С увеличением амплитуды модуляции, в отличие от случая однородной жидкости, когда достигается стабилизация, получаем решение, осциллирующее в окрестности некоторого среднего значения с частотой вынуждающей силы и определяемое соотношением (15). Дальнейшее увеличение амплитуды модуляции приводит к появлению областей резонансной неустойчивости с чередующимися целыми и полуцелыми решениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, № 5. С. 779–783.
2. **Putin G. F., Zavarykin M. P., Zorin S. V., Zyuzgin A. V.** Dynamic suppression and parametric resonance excitation of convection by the variable inertia field // Abstr. of Intern. workshop “Non-gravitational mechanisms of convection and heat/mass transfer”, Zvenigorod (Russia), Sept. 15–17, 1994. P. 12.
3. **Зюзгин А. В., Путин Г. Ф.** Устойчивость подъемно-опускного течения в вертикальном слое жидкости под воздействием высокочастотных вибраций // Вибрационные эффекты в гидродинамике. Пермь: Перм. гос. ун-т, 1998. Вып. 1. С. 130–141.
4. **Дементьев О. Н.** О спектре возмущений и устойчивости жидкости, содержащей твердые тяжелые частицы // Гидродинамика. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1976. Вып. 8. С. 42–53.
5. **Дементьев О. Н.** Конвективная устойчивость среды, содержащей тяжелую твердую примесь // ПМТФ. 1976. № 3. С. 105–115.
6. **Любимов Д. В., Брацун Д. А.** Об уравнениях конвекции в запыленной среде // Вестн. Перм. ун-та. Физика. 1998. Вып. 2. С. 15–29.
7. **Брацун Д. А., Теплов В. С.** О параметрическом возбуждении вторичного течения в вертикальном слое жидкости в присутствии мелких твердых частиц // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 48–55.
8. **Bratsun D. A., Teplov V. S.** On the stability of the pulsed convective flow with small heavy particles // Eur. Phys. J. Appl. Phys. 2000. V. 10. P. 219–230.
9. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1.

Поступила в редакцию 22/II 2007 г.,
в окончательном варианте — 25/IV 2007 г.