

УДК 539.3

## ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В НАНОСТРУКТУРАХ, ОБРАЗОВАННЫХ МАССИВАМИ НАНОТРУБОК ИЛИ НАНОРАЗМЕРНЫХ КРИСТАЛЛОВ

В. А. Еремеев<sup>\*,\*\*</sup>, Е. А. Иванова<sup>\*\*\*</sup>, Д. А. Индейцев<sup>\*\*\*\*</sup>

\* Южный научный центр РАН, 344006 Ростов-на-Дону

\*\* Южный федеральный университет, 344006 Ростов-на-Дону

\*\*\* Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург

\*\*\*\* Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург

E-mails: eremeyev.victor@gmail.com, elenaivanova239@post.ru, ind@director.ipme.ru

Получены основные параметры волновых процессов в структурах, образованных массивами параллельных друг другу наноразмерных кристаллов или нанотрубок, выращенных в направлении, перпендикулярном подложке. Данная задача рассматривается при моделировании поведения наноэлектромеханических систем, например сенсоров, в которых используются такие структуры. Полученные параметры могут быть также использованы для определения эффективных упругих характеристик нанообъектов, образующих эту структуру.

Ключевые слова: тонкостенные конструкции, колебания упругих тел, наноструктуры.

### ВВЕДЕНИЕ

Использование современных нанотехнологий позволяет получать упорядоченные массивы, образованные параллельными друг другу практически одинаковыми нанокристаллами или нанотрубками, выращенными в направлении, перпендикулярном подложке [1]. Интерес к данным наноструктурам обусловлен, в частности, разработкой таких наноэлектромеханических устройств, как сенсоры, УФ-лазеры, фотодетекторы и др. (см., например, [2–6]).

Свойства нанообъектов существенно отличаются от свойств аналогичных макроскопических образцов [1, 7–10], поэтому актуальна разработка моделей таких наноструктур, позволяющих оценить их механические свойства. Один из наиболее эффективных методов определения модулей упругости основан на измерении собственных частот исследуемого объекта. При использовании этого метода применительно к нанообъектам возникают проблемы, обусловленные трудностью измерения их собственных частот. Вместе с тем вполне реальным является измерение собственных частот системы микроподложка — регулярная структура одинаковых нанообъектов. В [11, 12] предложен метод определения собственных

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 06-01-00452, 09-01-00459) и Советов по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МД-4829.2007.1) и ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2405.2008.1).

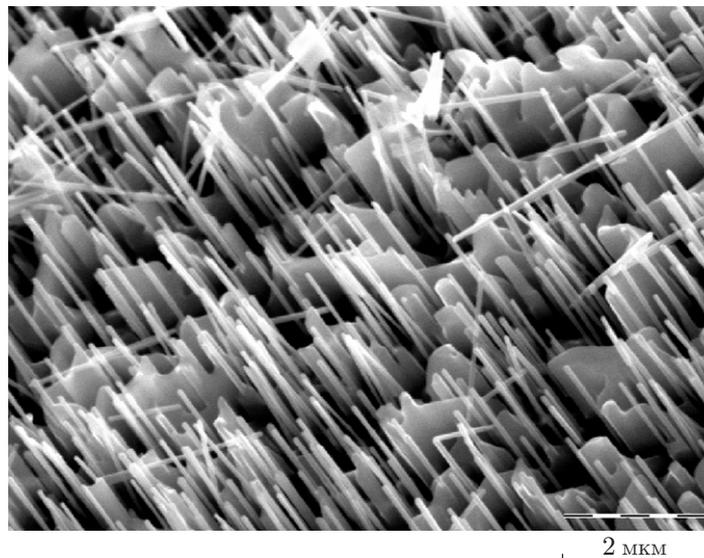


Рис. 1. Решетка нанокристаллов из оксида цинка (фотография сделана К. В. Двадненко (Институт аридных зон Южного научного центра РАН), образец предоставлен Е. М. Кайдашевым (Южный федеральный университет))

частот некоторых наноструктур (нанотрубок и нанокристаллов), основанный на измерении собственных частот системы, состоящей из вертикально ориентированного массива (решетки) одинаковых нанотрубок или нанокристаллов, выращенных на подложке и расположенных перпендикулярно ей. Примером массива нанокристаллов, исследованного в [11, 12], служат полупроводниковые микро- и нанокристаллы из оксида цинка (рис. 1), полученные различными способами, в частности методом импульсного лазерного напыления [13–15]. Интерес к нанокристаллам ZnO обусловлен, в частности, тем, что они используются при создании УФ-нанолазеров, высокочувствительных УФ-фотодетекторов, оптических переключателей, эмиттеров электронов, солнечных элементов с наноструктурированными ZnO-электродами, пьезонаномеханических устройств [2, 6].

В [11, 12] показано, что спектр собственных частот системы решетка нанотрубок (нанокристаллов) — подложка делится на две части. Одна часть спектра системы соответствует спектру собственных частот нанообъектов. При колебаниях нанообъектов с такими частотами подложка остается практически неподвижной. Другая часть спектра системы представляет собой спектр собственных частот, близких к собственным частотам подложки без нанообъектов. При таких частотах амплитуда колебаний нанообъектов оказывается существенно меньше амплитуды колебаний подложки. Таким образом, по найденному спектру системы решетка — подложка и спектру подложки можно определить собственные частоты одного нанообъекта. Суть метода заключается в следующем. Нужно измерить несколько первых собственных частот системы решетка нанотрубок (нанокристаллов) — подложка и несколько первых собственных частот такой же подложки без нанообъектов. Сравнение двух полученных спектров позволит выделить в спектре системы частоты, для которых не найдено соответствия среди частот в спектре подложки. Выделенные таким образом частоты представляют собой частоты нанообъектов. Наиболее существенным ограничением предложенного в [11, 12] метода является частотный диапазон измерительных приборов. Этот метод эффективен в случае, когда первые собственные частоты нанообъектов сравнимы с первыми собственными частотами подложки. Если собственные частоты нанообъектов очень высоки, зафиксировать их не удается.

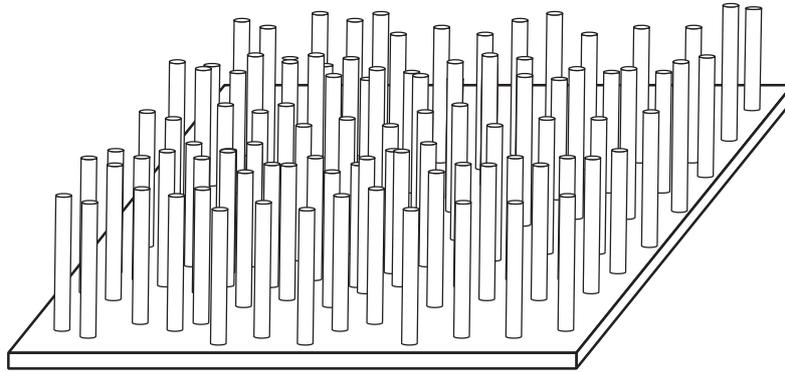


Рис. 2. Решетка нанокристаллов или нанотрубок на подложке

Ниже предлагается метод определения изгибной жесткости нанообъектов, эффективный даже в том случае, если собственные частоты нанообъектов не попадают в частотный диапазон измерительных приборов. Метод основан на измерении собственных частот системы, состоящей из подложки и регулярной структуры вертикально ориентированных нанообъектов. Суть метода заключается в следующем. Подложка представляет собой микрообъект, поэтому определение ее механических характеристик не вызывает принципиальных трудностей. Подложка достаточно тонкая, и ее динамика с высокой точностью описывается классической теорией пластин. Как показано ниже, динамика системы подложка — регулярная система нанообъектов описывается дифференциальным уравнением для поперечного прогиба подложки, которое имеет ту же структуру, что и уравнение колебаний пластины с учетом деформации поперечного сдвига. При этом несложно установить связь между механическими характеристиками нанообъектов и эффективной сдвиговой жесткостью. Таким образом, измерив собственные частоты системы и зная все механические характеристики подложки, можно определить эффективную сдвиговую жесткость. Если нанообъекты одинаковы и расположены регулярно, то, зная эффективную сдвиговую жесткость, можно определить изгибную жесткость одного нанообъекта. Известно, что сдвиговая жесткость пластин и оболочек определяется неоднозначно. Значение сдвиговой жесткости зависит (хотя и не очень существенно) от условий эксперимента. В значительно большей степени сдвиговая жесткость пластины зависит от ее строения. Поэтому для получения более достоверных результатов ниже рассматриваются две постановки задачи. В первой задаче нижние концы нанообъектов жестко прикреплены к подложке, верхние концы свободны (рис. 2). Во второй задаче нижние концы нанообъектов прикреплены к одной подложке, верхние — к другой такой же подложке (рис. 3). При этом предполагается, что нанообъекты взаимодействуют. Такая структура может быть получена, например, в результате заполнения решетки нанокристаллов полимерным материалом, обработки поверхности и нанесения на нее нового слоя. Вторая задача представляет интерес также при описании деформаций пластин из нанокompозитов.

## 1. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ПОДЛОЖКА — НАНООБЪЕКТЫ

**1.1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему, состоящую из горизонтально расположенной пластины, моделирующей подложку, и вертикальных стержней, моделирующих нанообъекты (см. рис. 2). Пластина занимает область  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , ее механические свойства характеризуются поверхностной плотностью  $\rho$  и изгибной жесткостью  $D$ . Стержни занимают области  $0 \leq z \leq l$ , их механические свойства характеризуются линейной плотностью  $\rho_*$  и изгибной жесткостью  $C$ . Нижние концы вертикально расположенных

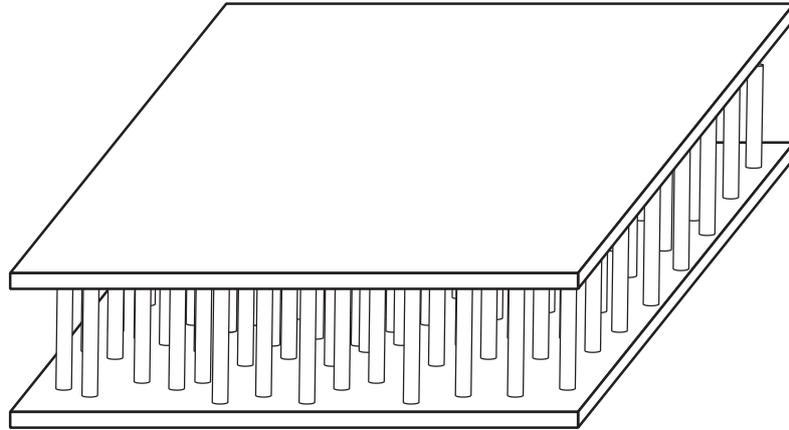


Рис. 3. Трехслойная наноструктура, образованная решеткой нанокристаллов или нанотрубок, помещенных между двумя пластинами

стержней жестко закреплены на пластине и находятся на одинаковых расстояниях друг от друга, поэтому плотность их распределения в направлениях осей  $x$  и  $y$  одна и та же:  $\zeta = M/a = N/b$  ( $M, N$  — число стержней в направлениях осей  $x$  и  $y$  соответственно). Верхние концы вертикальных стержней свободны, края пластины шарнирно оперты. Отметим, что размеры пластины, моделирующей подложку, значительно больше размеров одного нанообъекта.

Изгибные колебания нанообъектов описываются уравнениями классической теории стержней [16]

$$C\mathbf{u}_{mn}'''' + \rho_*\dot{\mathbf{u}}_{mn} = 0, \quad (1)$$

где штрих обозначает производную по пространственной координате  $z$ , точка — производную по времени;  $\mathbf{u}_{mn}$  — вектор перемещений стержней в горизонтальном направлении с их соответствующими порядковыми номерами. Выражения для остальных величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние стержней, имеют вид

$$\boldsymbol{\varphi}_{mn} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}'_{mn}, \quad \mathbf{L}_{mn} = C\mathbf{n} \times \mathbf{u}''_{mn}, \quad \mathbf{T}_{mn} = -C\mathbf{n} \times \mathbf{u}'''_{mn}.$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный вертикально вверх;  $\boldsymbol{\varphi}_{mn}$  — вектор углов поворота сечений стержней;  $\mathbf{L}_{mn}$  — вектор изгибающих моментов;  $\mathbf{T}_{mn}$  — вектор перерезывающих сил. Стержни считаются нерастяжимыми, поэтому их движение в вертикальном направлении описывается уравнениями

$$v'_{mn} = 0, \quad F'_{mn} = \rho_*\ddot{v}_{mn}, \quad (2)$$

где  $v_{mn}$  — перемещения в направлении оси  $z$ ;  $F_{mn}$  — продольные силы.

Уравнения движения пластины имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{N} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_{mn}|_{z=0} \delta(x-x_m)\delta(y-y_n) &= \rho\ddot{w}, \\ \nabla \cdot \mathbf{M} - \mathbf{n} \times \mathbf{N} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \mathbf{L}_{mn}|_{z=0} \delta(x-x_m)\delta(y-y_n) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $w$  — перемещения пластины в вертикальном направлении;  $\mathbf{N}$  — вектор поперечных сил;  $\mathbf{M}$  — тензор моментов;  $\delta$  — дельта-функция Дирака;  $\nabla \equiv \mathbf{e}_1 \partial/\partial x + \mathbf{e}_2 \partial/\partial y$  — оператор в плоскости  $x, y$ ;  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — векторы декартова базиса, ортогональные  $\mathbf{n}$ . Ниже

используется классическая теория пластин [17], согласно которой справедливо соотношение между вектором углов поворота  $\boldsymbol{\psi}$  и поперечным прогибом

$$\boldsymbol{\psi} = -\mathbf{n} \times \nabla w, \quad (4)$$

а тензор моментов выражается через поперечный прогиб по формуле

$$M = D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) \right]. \quad (5)$$

**1.2. Собственные колебания наноструктуры.** Исключив из уравнений (3) вектор поперечных сил  $\mathbf{N}$  и используя выражение (5) для тензора моментов, приведем систему (3) к одному скалярному уравнению

$$D \Delta \Delta w + \rho \ddot{w} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left\{ F_{mn} \Big|_{z=0} \delta(x - x_m) \delta(y - y_n) - \nabla \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{L}_{mn} \Big|_{z=0} \delta(x - x_m) \delta(y - y_n)] \right\}. \quad (6)$$

Деформацией пластины в плоскости  $x, y$  будем пренебрегать. Тогда кинематические условия соединения стержней с пластиной можно записать следующим образом:

$$\mathbf{u}_{mn} \Big|_{z=0} = 0, \quad v_{mn} \Big|_{z=0} = w \Big|_{x=x_m, y=y_n}, \quad \boldsymbol{\varphi}_{mn} \Big|_{z=0} = \boldsymbol{\psi} \Big|_{x=x_m, y=y_n}. \quad (7)$$

Верхние концы стержней свободны. Граничные условия на этих концах имеют вид

$$F_{mn} \Big|_{z=l} = 0, \quad \mathbf{T}_{mn} \Big|_{z=l} = 0, \quad \mathbf{L}_{mn} \Big|_{z=l} = 0. \quad (8)$$

Далее будем рассматривать задачу о свободных колебаниях системы. Представим решение в виде

$$\mathbf{u}_{mn}(z, t) = \mathbf{U}_{mn}(z) e^{i\omega t}, \quad v_{mn}(z, t) = V_{mn}(z) e^{i\omega t}, \quad w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t},$$

где  $\omega$  — собственная частота колебаний системы.

Исследование сформулированной выше задачи показало, что существует две группы решений. Первая группа решений соответствует случаю, когда пластина остается неподвижной, а вертикальные стержни движутся как консольные балки. В этом случае собственные частоты системы  $\omega$  совпадают с собственными частотами колебаний консольной балки и определяются в результате решения частотного уравнения

$$1 + \cos(\lambda l) \operatorname{ch}(\lambda l) = 0, \quad \lambda = \sqrt[4]{\rho_* / C} \sqrt{\omega}. \quad (9)$$

Исследуем вторую группу решений. Предположим, что собственные частоты системы отличны от тех, которые являются решением уравнения (9). В этом случае решение уравнений движения стержней (1), (2) с граничными условиями на их свободных концах (8) позволяет найти связь между усилиями и перемещениями в нижних точках стержней

$$F_{mn} \Big|_{z=0} = -\rho_* l \ddot{v}_{mn} \Big|_{z=0}, \quad \mathbf{L}_{mn} \Big|_{z=0} = \frac{C \lambda}{g(\lambda l)} \boldsymbol{\varphi}_{mn} \Big|_{z=0}, \quad (10)$$

где

$$g(\lambda l) = \frac{1 + \cos(\lambda l) \operatorname{ch}(\lambda l)}{\sin(\lambda l) \operatorname{ch}(\lambda l) - \cos(\lambda l) \operatorname{sh}(\lambda l)}.$$

Заметим, что при значениях собственных частот, удовлетворяющих уравнению (9), значение  $g(\lambda l)$  обращается в нуль и соотношение между вектором изгибающих моментов и вектором углов поворота (10) не имеет смысла. Далее рассматривается случай  $g(\lambda l) \neq 0$ .

С учетом соотношений (4), (7), (10) уравнение (6) записывается в виде

$$D \Delta \Delta W - \rho \omega^2 W = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left( \rho_* l \omega^2 W \delta(x - x_m) \delta(y - y_n) - \frac{C \lambda}{g(\lambda l)} \nabla \cdot [(\nabla W)|_{x=x_m, y=y_n} \delta(x - x_m) \delta(y - y_n)] \right). \quad (11)$$

Если вертикальных стержней достаточно много, то можно считать, что они непрерывно распределены по площади пластины. Осреднив правую часть уравнения (11), упростим математическую постановку задачи, сведя ее к уравнению

$$D \Delta \Delta W - \zeta^2 \frac{C \lambda}{g(\lambda l)} \Delta W - \rho \omega^2 \left( 1 + \zeta^2 \frac{\rho_* l}{\rho} \right) W = 0, \quad (12)$$

где  $\zeta^2$  — плотность распределения стержней по площади пластины (считается, что в направлениях осей  $x$  и  $y$  плотность распределения стержней одинакова). Представив решение уравнения (12) в виде

$$W(x, y) = W_0 \exp(i[\mu_1 x + \mu_2 y]/l),$$

получим дисперсионное соотношение

$$\mu^4 + \frac{A \sqrt{\Omega}}{g(\sqrt{\Omega}/B)} \mu^2 - (1 + \xi) \Omega^2 = 0,$$

где

$$\mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho}{D}} l^2 \omega, \quad A = \zeta^2 \frac{C l}{B D}, \quad B = \left( \frac{\rho C}{\rho_* D} \right)^{1/4}, \quad \xi = \zeta^2 \frac{\rho_* l}{\rho}$$

( $\Omega$  — безразмерная собственная частота;  $\mu_1, \mu_2$  — безразмерные волновые числа;  $A, B, \xi$  — безразмерные параметры, причем  $A$  и  $B$  — малые величины). Величина  $\xi$  может быть малой либо порядка единицы, если, например,  $l \sim h$  ( $h$  — толщина подложки), и  $\zeta h_* \sim 1$  ( $h_*$  — характерный диаметр сечения нанообъекта). На рис. 4 приведены дисперсионные кривые системы и подложки, построенные в разных масштабах. Вертикальные участки этих кривых соответствуют собственным частотам стержней.

Рассмотрим решения задачи о свободных колебаниях системы. Решения первой группы представляют собой свободные колебания вертикальных стержней на неподвижной пластине. Поскольку пластина шарнирно оперта, решения второй группы имеют вид

$$W_{mn}(x, y) = W_{mn} \sin(\pi m x/a) \sin(\pi n y/b).$$

Соответствующее частотное уравнение записывается следующим образом:

$$(\pi l)^4 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 + \frac{(\pi l)^2 A \sqrt{\Omega_{mn}}}{g(\sqrt{\Omega_{mn}}/B)} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] - (1 + \xi) \Omega_{mn}^2 = 0. \quad (13)$$

Здесь  $\Omega_{mn}$  — собственные частоты системы, отличные от собственных частот колебаний стержней  $\Omega_k$ , которые определяются из уравнения  $g(\sqrt{\Omega_k}/B) = 0$ .

**1.3. Вынужденные колебания.** Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях системы под действием внешней распределенной нагрузки, которую можно представить в виде ряда по собственным формам колебаний пластины:

$$Q(x, y, t) = \left[ \sum_{m,n} Q_{mn} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \right] \sin(\omega_* t)$$

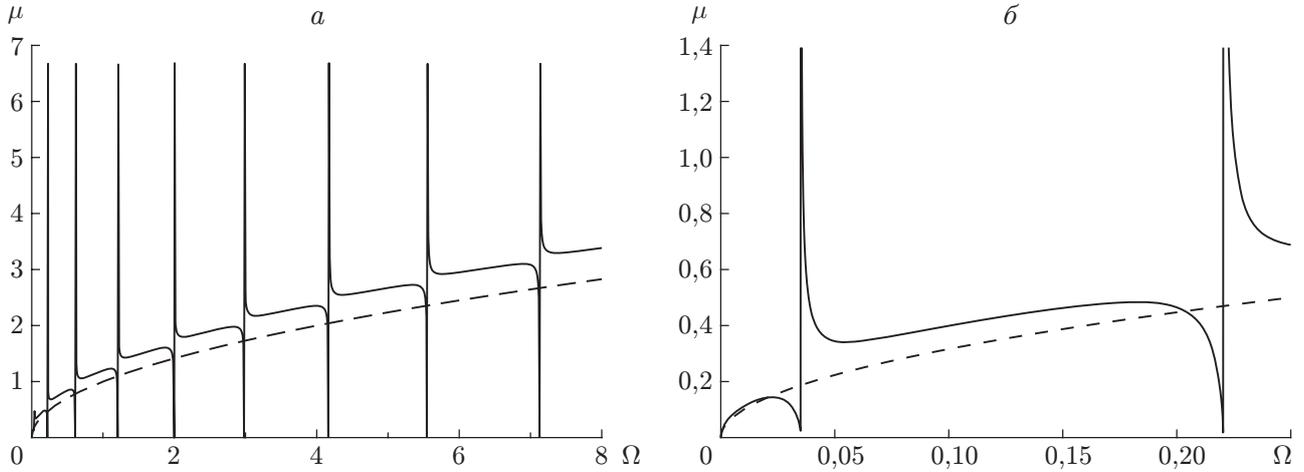


Рис. 4. Дисперсионные кривые системы (сплошные линии) и подложки (штриховые линии), полученные в разных масштабах

( $\omega_*$  — частота вынуждающей силы). Решение задачи имеет вид

$$W(x, y, t) = \left[ \sum_{m,n} W_{mn} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \right] \sin(\omega_* t).$$

Коэффициенты  $W_{mn}$  вычисляются по формуле

$$W_{mn} = Q_{mn}(l^4/D) / \left\{ (\pi l)^4 \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2 + \frac{(\pi l)^2 A \sqrt{\Omega_*}}{g(\sqrt{\Omega_*}/B)} \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] - (1 + \xi)\Omega_*^2 \right\},$$

где  $\Omega_*$  — безразмерная частота вынуждающей силы. Нетрудно заметить, что  $W_{mn}$  обращается в бесконечность, если  $\Omega_* = \Omega_{mn}$  (см. формулу (13)). Если  $\Omega_*$  совпадает с одной из собственных частот колебаний стержней, то  $W_{mn}$  обращается в нуль:

$$g(\sqrt{\Omega_*}/B) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{mn} = 0.$$

Таким образом, на собственных частотах колебаний стержней наблюдается затухание колебаний пластины.

## 2. ДИНАМИКА ТРЕХСЛОЙНОЙ НАНОСТРУКТУРЫ

Полученные выше дисперсионные соотношения аналогичны соотношениям в теории пластин с учетом поперечного сдвига. Отмеченная аналогия позволяет рассмотреть трехслойную наноструктуру (см. рис. 3) в рамках теории пластин типа теории Рейсснера [18]. В отличие от классической теории пластин [17] в этой теории учитываются деформации поперечного сдвига, имеющие большое значение при исследовании деформирования трехслойных пластин. Следует отметить, что даже в отсутствие матрицы между наностержнями возможно их взаимодействие вследствие влияния вандерваальсовых или электростатических сил. Это позволяет рассматривать решетку наностержней как упругий слой, обладающий эффективными свойствами трансверсально-изотропной среды.

**2.1. Основные соотношения теории пластин при учете поперечного сдвига.** Рассмотрим трехслойную пластину, имеющую симметричное по толщине строение (рис. 5). Толщину пластины обозначим через  $h$ , толщины внутреннего слоя и поверхностных слоев —  $h_c$  и  $h_f$  соответственно. Для описания поведения пластины используем

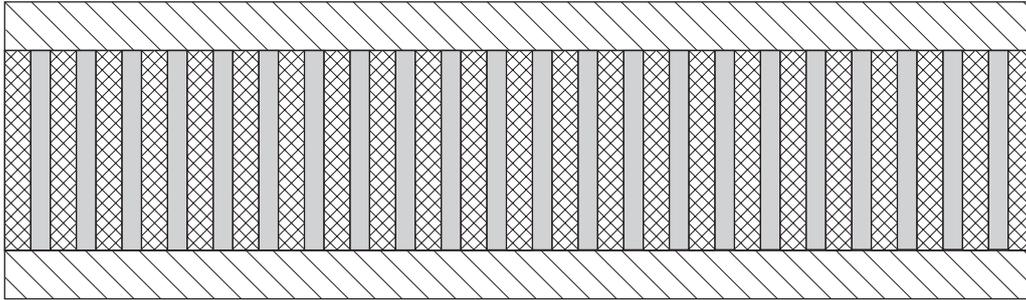


Рис. 5. Схема трехслойной пластины с внутренним слоем из нанокompозита

пятипараметрическую теорию пластин [19–21], в которой в качестве неизвестных рассматриваются перемещения срединной поверхности пластины  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + w\mathbf{n}$ , а также ее вектор поворота  $\boldsymbol{\psi} = \psi_1\mathbf{e}_1 + \psi_2\mathbf{e}_2$ .

Уравнения движения, кинематические соотношения и уравнения состояния симметричной по толщине изотропной пластины имеют вид [19–21]

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_x + \mathbf{m} = \rho \Theta \cdot \ddot{\boldsymbol{\psi}}; \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = ((\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T)/2, \quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\varkappa} = \nabla \boldsymbol{\psi}; \quad (15)$$

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varkappa} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varkappa} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}; \quad (16)$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{M}^T = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varkappa}} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varkappa}; \quad (17)$$

$$\mathbf{A} = A_{11}a_1a_1 + A_{22}(a_2a_2 + a_4a_4), \quad \mathbf{C} = C_{22}(a_2a_2 + a_4a_4) + C_{33}a_3a_3, \\ \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_1a_1 + \boldsymbol{\Gamma}_2a_2, \quad (18)$$

$$a_1 = \mathbf{a} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \quad a_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \quad a_3 = \mathbf{c} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1, \quad a_4 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1.$$

В (14)–(18)  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}$  — тензоры усилий и моментов; верхний индекс т обозначает транспонирование;  $\mathbf{T}_x$  — векторный инвариант тензора  $\mathbf{T}$ ;  $\rho$  — поверхностная плотность пластины;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $\boldsymbol{\psi}$  — вектор поворота;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор деформации растяжения и сдвига в касательной плоскости;  $\boldsymbol{\varkappa}$  — тензор деформации изгиба и кручения;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}$  — тензоры жесткости оболочки;  $\mathbf{a}$  — единичный тензор в касательной плоскости;  $\mathbf{c} = -\mathbf{a} \times \mathbf{n}$ ;  $\Theta$  — тензор инерции.

Определение тензоров жесткостей  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}$  проводилось в ряде работ (см. [20–23]). Для пластины из ортотропного материала, имеющей симметричное по толщине строение, компоненты тензоров жесткости определяются формулами [22, 23]

$$A_{11} = A_{22} = \frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 + E_2 + 2E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right\rangle, \quad A_{12} = \frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 - E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right\rangle, \quad (19)$$

$$A_{44} = \langle G_{12} \rangle, \quad C_{22} = \langle G_{12}z^2 \rangle;$$

$$C_{33} = C_{44} = \frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 + E_2 + 2E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} z^2 \right\rangle, \quad C_{34} = -\frac{1}{4} \left\langle \frac{E_1 - E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} z^2 \right\rangle, \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_1 = (\lambda^2 + \eta^2)C_{22}/2, \quad \boldsymbol{\Gamma}_2 = (\eta^2 - \lambda^2)C_{22}/2,$$

где  $\langle (\cdot) \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} (\cdot) dz$  — операция интегрирования по толщине;  $\lambda^2$ ,  $\eta^2$  — наименьшие

собственные значения краевых задач

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( G_{2n} \frac{dZ}{dz} \right) + \lambda^2 G_{12} Z &= 0, & \frac{dZ}{dz} \Big|_{|z|=h/2} &= 0, \\ \frac{d}{dz} \left( G_{1n} \frac{d\tilde{Z}}{dz} \right) + \eta^2 G_{12} \tilde{Z} &= 0, & \frac{d\tilde{Z}}{dz} \Big|_{|z|=h/2} &= 0, \end{aligned}$$

$E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12}, G_{1n}, G_{2n}$  — упругие модули, в общем случае зависящие от координаты  $z$ . В случае трансверсально-изотропного материала формулы (19), (20) существенно упрощаются, так как  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ ,  $\nu_{n1} = \nu_{n2} = \nu_3$ ,  $G_{12} = E/(2(1 + \nu))$ ,  $G_{1n} = G_{2n} = G$ . Отсюда следует, что  $A_{12} = C_{34} = \Gamma_2 = 0$ ,  $A_{22} = A_{44}$ ,  $C_{22} = C_{44}$ .

Плотность пластины и тензор инерции определяются уравнениями

$$\rho = \langle \rho_0 \rangle, \quad \rho \Theta = \Theta a, \quad \Theta = \langle \rho_0 z^2 \rangle,$$

где  $\rho_0(z)$  — плотность трехмерного тела.

**2.2. Анализ колебаний трехслойной пластины.** Анализ работ [22, 23] показывает, что для трехслойной пластины, имеющей симметричное по толщине строение, можно использовать приближенные соотношения, полученные в [24]:

$$D \equiv C_{22} + C_{33} = \frac{1}{4} \frac{E_f h^2 h_f}{1 - \nu_f^2}, \quad \Gamma = G_c h. \quad (21)$$

Здесь  $E_f, \nu_f$  — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона для поверхностных слоев;  $G_c$  — модуль сдвига для внутреннего слоя (нанокомпозита). Следует отметить, что  $G_c$  существенно зависит от свойств нанообъектов. Если пренебречь жесткостью матрицы, то можно показать, что

$$G_c = \frac{12N}{h_c^2} C,$$

где  $N$  — количество нанообъектов, приходящихся на единицу площади;  $C$  — жесткость на изгиб одного нанообъекта. Таким образом, жесткость  $\Gamma$  зависит от свойств нанокомпозита.

Если не учитывать плотность матрицы, то величины  $\rho$  и  $\Theta$  можно определить соотношениями

$$\rho = \rho_f h_f + \frac{\pi \rho_n N d^2}{4} \rho_n h_c, \quad \Theta = \frac{\rho_f}{12} (h^3 - h_c^3) + \frac{\pi \rho_n N d^2}{48} h_c^3, \quad (22)$$

где  $\rho_n, d$  — плотность и диаметр нанообъектов.

В случае отсутствия распределенного момента  $\mathbf{m} = 0$  уравнения движения (14) можно привести к одному уравнению [25]

$$D \Delta \Delta w + \rho \ddot{w} + \frac{\rho \Theta}{\Gamma} w^{(4)} - \left( \Theta + \rho \frac{D}{\Gamma} \right) \Delta \ddot{w} = q_n + \frac{\Theta}{\Gamma} \ddot{q}_n - \frac{D}{\Gamma} \Delta q_n, \quad (23)$$

где  $q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ ;  $w^{(4)} = \partial^4 w / \partial t^4$ .

Решение однородного уравнения (23) будем искать в виде

$$\bar{w} = W_\mu \exp(i\Omega \bar{t}) \exp(i\mu_1 \bar{x} + i\mu_2 \bar{y}),$$

где

$$\bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad T^2 = \frac{\rho h^4}{D}.$$

Нетривиальные решения однородного уравнения существуют, если частота  $\Omega$  связана с волновыми числами  $\mu_1, \mu_2$  дисперсионным соотношением

$$L(\mu, \Omega) \equiv \mu^4 - \Omega^2 + \beta \Omega^4 - \zeta \mu^2 \Omega^2 = 0,$$

где  $\beta = \Theta D / (\rho \Gamma h^4)$ ;  $\zeta = (\Theta / \rho + D / \Gamma) / h^2$ .

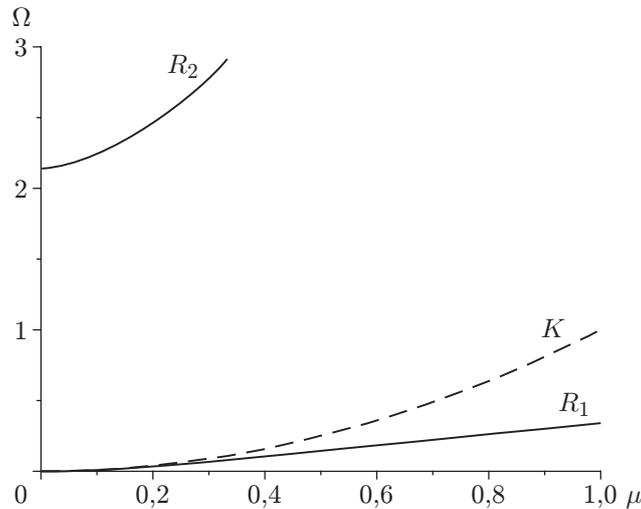


Рис. 6. Дисперсионные кривые для трехслойной пластины ( $\Gamma = \infty$ ,  $\Theta = 0$ ):  
 $R_1$ ,  $R_2$  — ветви дисперсионной кривой, полученной с использованием теории Рейсснера;  
 $K$  — дисперсионная кривая, полученная с использованием теории Кирхгофа

Характерные дисперсионные кривые представлены на рис. 6. Сравнение с дисперсионными кривыми для пластины с нанообъектами (см. рис. 4) показывает отсутствие внутренней динамики нанообъектов, которая не может быть учтена в рамках теории пластин типа теории Рейсснера [18, 24]. Имеется две ветви дисперсионной кривой, обозначенные  $R_1$ ,  $R_2$ . Высокочастотная ветвь  $R_2$  начинается в точке  $(0, \Omega^*)$ , где частота отсечки  $\Omega^*$  определяется по формуле

$$\Omega^* \equiv \frac{1}{\sqrt{\beta}} = h^2 \sqrt{\frac{\rho\Gamma}{\Theta D}}.$$

Отметим, что в отличие от однородной пластины, для которой частота отсечки находится в высокочастотном диапазоне, для рассматриваемой трехслойной пластины из нанокompозита она может изменяться в широком диапазоне, в том числе находиться в области достаточно низких частот. Зная частоту  $\Omega^*$ , которую можно найти, например, по экспериментальным данным исследования амплитудно-частотной характеристики, используя формулы (21), (22), можно оценить жесткость на изгиб одного нанообъекта.

Для того чтобы найти амплитудно-частотную характеристику, рассмотрим вынужденные колебания шарнирно опертой по периметру прямоугольной пластины со сторонами длиной  $a$ ,  $b$ . Предположим, что внешняя нагрузка определяется по формуле

$$\bar{q} = Q_{mn} \exp(i\Omega t) \sin(\pi m h \bar{x}/a) \sin(\pi n h \bar{y}/b),$$

где  $Q_{mn} = \text{const}$ . Тогда решение (23) записывается в виде

$$\bar{w} = W_{mn} \exp(i\Omega t) \sin(\pi m h \bar{x}/a) \sin(\pi n h \bar{y}/b), \quad (24)$$

где амплитуда  $W_{mn}$  определяется формулой

$$W_{mn} = \frac{1 - \beta\Omega^2 + \eta\mu^2}{L(\mu, \Omega)} Q_{mn}, \quad \mu^2 = \frac{(\pi m h)^2}{a^2} + \frac{(\pi n h)^2}{b^2}, \quad \eta = \frac{D}{h^2\Gamma}.$$

Отметим, что при любой достаточно гладкой нагрузке решения уравнения (23) представляют собой сумму ряда со слагаемыми вида (24). Таким образом, амплитудно-частотная характеристика полностью определяется амплитудами  $W_{mn}$ , которые на собственных частотах имеют особенности, являющиеся полюсами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построены дисперсионные кривые для некоторых наноструктур, образованных упорядоченными массивами нанообъектов (кристаллов или нанотрубок, параллельных друг другу). Обсуждается возможность использования полученных кривых для определения упругих свойств нанообъектов по резонансным частотам. Суть метода определения свойств нанообъектов состоит в получении в эксперименте спектра собственных частот композитной пластины, образованной большим числом практически одинаковых наностержней, выращенных на подложке. Рассматриваются две возможные наноструктуры: несимметричная (подложка и массив нанообъектов) и симметричная (трехслойная пластина, внутренний слой которой представляет собой массив нанообъектов). Как показано выше, собственные частоты таких наноструктур являются некоторыми интегральными характеристиками, зависящими от свойств нанообъектов. Так, собственные частоты зависят от жесткости на поперечный сдвиг, которая в свою очередь выражается через количество нанообъектов и их жесткости. При этом представляется необходимым наряду со спектром композитных наноструктур определять спектр аналогичных однородных наноструктур, например пластин той же геометрии, но образованных из материала подложки. Сравнение спектра наноструктуры и спектра “контрольной” пластины позволит выделить собственные частоты, наиболее существенно зависящие от свойств нанообъектов.

Поскольку динамические характеристики рассмотренных наноструктур зависят от свойств нанообъектов, полученные результаты могут быть использованы при разработке сенсоров, в которых применяются наномассивы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Springer** handbook of nanotechnology / Ed. by B. Bhushan. Berlin etc.: Springer-Verlag, 2007.
2. **Huang M. H., Mao S., Feick H., et al.** Room-temperature ultraviolet nanowire nanolasers // *Science*. 2001. V. 292, N 5523. P. 1897–1899.
3. **Lee K. B., Kim E. Y., Mirkin C. A., Wolinsky S. M.** The use of nanoarrays for highly sensitive and selective detection of human immunodeficiency virus type 1 in plasma // *Nano Lett.* 2004. V. 4, N 10. P. 1869–1872.
4. **Mor G. K., Varghese O. K., Paulose M., et al.** A review on highly ordered, vertically oriented TiO<sub>2</sub> nanotube arrays: Fabrication, material properties, and solar energy applications // *Solar Energy Mater. Solar Cells*. 2006. V. 90, N 14. P. 2011–2075.
5. **Varadan V. K., Varadan V. V.** Microsensors, microelectromechanical systems (MEMS), and electronics for smart structures and systems // *Smart Mater. Struct.* 2000. V. 9, N 6. P. 953–972.
6. **Vayssieres L., Keis K., Hagfeldt A., Lindquist S. E.** Three-dimensional array of highly oriented crystalline ZnO microtubes // *Chem. Mater.* 2001. V. 13, N 12. P. 4395–4398.
7. **Гуткин М. Ю.** Дефекты и механизмы пластичности в наноструктурных и некристаллических материалах / М. Ю. Гуткин, И. А. Овидько. СПб.: “Янус”, 2003.
8. **Гуткин М. Ю.** Физическая механика деформируемых наноструктур: В 2 т. / М. Ю. Гуткин, И. А. Овидько. СПб.: “Янус”, 2003–2005. Т. 1, 2.
9. **Кривцов А. М., Морозов Н. Ф.** Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов // *Докл. АН*. 2001. Т. 381, № 3. С. 345–347.
10. **Handbook** of nanoscience, engineering, and technology / Ed. by W. A. Goddard, D. W. Brenner, S. E. Lyshevski, G. J. Iafrate. Boca Raton: CRC Press, 2003.
11. **Еремеев В. А., Иванова Е. А., Морозов Н. Ф., Соловьев А. Н.** Об определении собственных частот нанообъектов // *Докл. АН*. 2006. Т. 406, № 6. С. 756–759.

12. **Еремеев В. А., Иванова Е. А., Морозов Н. Ф., Соловьев А. Н.** Об одном методе определения собственных частот упорядоченной системы нанообъектов // Журн. техн. физики. 2007. Т. 77, вып. 1. С. 3–8.
13. **Lorenz M., Lenzner J., Kaidashev E. M., et al.** Cathodoluminescence of selected single ZnO nanowires on sapphire // Ann. Physik. 2004. Bd 13, N 1/2. S. 39–42.
14. **Kaidashev E. M., Lorenz M., Wenckstern H., et al.** High electron mobility of epitaxial ZnO thin films on c-plane sapphire grown by multi-step pulsed laser deposition // Appl. Phys. Lett. 2003. V. 82. P. 3901–3903.
15. **Lorenz M., Hochmuth H., Schmidt-Grund R., et al.** Advances of pulsed laser deposition of ZnO thin films // Ann. Physik. 2004. Bd 13, N 1/2. S. 59–61.
16. **Работнов Ю. Н.** Механика твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1988.
17. **Тимошенко С. П.** Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Физматгиз, 1963.
18. **Григолюк Э. И.** Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. М.: ВИНТИ, 1973. (Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемых твердых тел; Т. 5).
19. **Жилин П. А.** Основные уравнения неклассической теории оболочек // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29–46.
20. **Альтенбах Х., Жилин П. А.** Общая теория упругих простых оболочек // Успехи механики. 1988. № 4. С. 107–148.
21. **Жилин П. А.** Прикладная механика. Основы теории оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербур. политехн. ун-та, 2006.
22. **Altenbach H.** An alternative determination of transverse shear stiffnesses for sandwich and laminated plates // Intern. J. Solids Struct. 2000. V. 37, N 25. P. 3503–3520.
23. **Altenbach H.** On the determination of transverse shear stiffnesses of orthotropic plates // Z. angew. Math. Phys. 2000. Bd 51. S. 629–649.
24. **Reissner E.** On bending of elastic plates // Quart. Appl. Math. 1947. V. 5. P. 55–68.
25. **Altenbach H., Eremeyev V. A.** Eigen-vibrations of plates made of functionally graded material // Comput., Mater., Continua. 2009. V. 9, N 2. P. 153–177.

*Поступила в редакцию 9/XI 2009 г.*

---