

УДК: 532.526

Исследование слабонелинейного развития нестационарных вихрей Гёртлера

А.В. Бойко, А.В. Иванов, Ю.С. Качанов, Д.А. Мищенко

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: kachanov@itam.nsc.ru

В условиях полностью контролируемых возмущений проведено экспериментальное и теоретическое исследование слабонелинейных стадий развития нестационарной (в общем случае) неустойчивости Гёртлера пограничного слоя на вогнутой поверхности. Основное внимание уделено начальным проявлениям нелинейности в развитии нестационарных гёртлеровских вихрей, относящихся к первой, наиболее быстрорастущей, моде дискретного спектра задачи об устойчивости. Детально изучены проявления нелинейности в зависимости от частоты основной (первичной) гёртлеровской моды и начальной амплитуды возмущения. Обнаружено, что слабонелинейная стадия развития нестационарных гёртлеровских вихрей характеризуется: (а) нелинейным взаимодействием комбинационных мод частотно-волнового спектра, (b) искажением профилей амплитуд и фаз возмущений по нормали к стенке, (c) замедлением скоростей нарастания основной гёртлеровской моды и большинства комбинационных мод, а также (d) уменьшением фазовых скоростей нестационарных возмущений. Найдено, что возмущения вступают в область слабонелинейного развития после превышения амплитудой основной частотно-волновой моды порога в 4-6 %, что значительно выше, чем у волн Толлмина-Шлихтинга (1-2 %), но существенно ниже, чем у мод неустойчивости поперечного течения трёхмерного пограничного слоя (более 10 %).

Ключевые слова: переход к турбулентности, нестационарная неустойчивость Гёртлера, пороги нелинейности.

ВВЕДЕНИЕ

Неустойчивость Гёртлера может возникать в пограничных слоях на искривленных поверхностях, что приводит к образованию вихрей, ориентированных вдоль потока. Эти вихри могут усиливаться вниз по потоку, интенсифицировать тепло- и массоперенос, влиять на сопротивление трения, приводить к ламинарно-турбулентному переходу в пограничных слоях, а также влиять на множество других характеристик потока. Вследствие этого, характеристики гёртлеровской неустойчивости чрезвычайно важны для практической аэродинамики, например для течений в соплах двигателей, на лопатках турбомашин, на изогнутых поверхностях летательных аппаратов и т. д.

Исследование нелинейных стадий перехода, инициированных вихрями Гёртлера, имеет большое значение ввиду их определяющей роли в формировании различных сценариев перехода, а также из-за существенных искажений характеристик пограничного слоя в присутствии гёртлеровских вихрей больших амплитуд.

На практике особенно важно знать пределы амплитуд возмущений, до которых развитие вихрей Гёртлера происходит по законам линейной теории устойчивости, а также иметь оценки пороговых амплитуд вихрей, начиная с которых линейная теория либо становится совсем неприменимой, либо ее применение ограничено. Нелинейная область процесса перехода обычно начинается со слабонелинейной стадии, которая и является основным объектом настоящего исследования. На этой стадии характеристики вихрей Гёртлера впервые отклоняются от тех, что предсказывает линейная теория устойчивости.

На сегодняшний день слабонелинейные стадии перехода, инициируемого в двумерных пограничных слоях волнами Толлмина–Шлихтинга (ТШ), исследованы достаточно подробно, как экспериментально, так и теоретически. Наиболее детальные исследования были проведены в пограничном слое Блазиуса [1, 2], в автомодельных пограничных слоях при неблагоприятном градиенте давления [3–6] и в существенно неавтомодельных пограничных слоях на крыловом профиле [7–9]. В результате этих исследований было обнаружено, что особую важность представляют субгармонические резонансные взаимодействия. Найдено, что такой тип взаимодействий преобладает над всеми другими слабонелинейными механизмами. Тем не менее, в отличие от сценариев перехода, реализующихся в пограничных слоях на плоской пластине, сценарии слабонелинейных стадий перехода, инициируемых гёртлеровской неустойчивостью, до сих пор остаются слабо исследованными, главным образом из-за множества технических и методологических проблем. Так, например, только совсем недавно, за счет применения принципиально нового экспериментального подхода, впервые было получено согласование (и очень хорошее) между теоретическими и экспериментальными характеристиками линейной неустойчивости Гёртлера [10, 11]. В связи с этим, исследование слабонелинейных эффектов и порогов применимости линейной неустойчивости Гёртлера до сих пор трудно было осуществить на практике. Поэтому особое внимание исследователей было обращено на изучение других нелинейных эффектов, связанных, в первую очередь, с явлением вторичной неустойчивости.

В частности, общий характер нелинейного развития возмущений, возникающих в процессе перехода инициированного вихрями Гёртлера, подробно исследован в экспериментах [12–15]. В отличие от некоторых других неустойчивостей, вихри Гёртлера существенно модифицируют средний поток и, в частности, могут формировать в пограничном слое слои сильного сдвига, делая течение значительно более неустойчивым по отношению к различного рода вторичным возмущениям. Вторичные неустойчивости и связанные с ними соответствующие сценарии перехода исследовались в ряде работ. Например, в экспериментах [16] исследовано развитие невязкой вторичной неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца, которая, вероятно, отвечает за формирование подковообразных вихрей над первичными, основными вихрями Гёртлера. Большое количество экспериментальных и теоретических работ посвящено исследованию различных сценариев развития вторичных синусоидальных и варикозных неустойчивостей (см. также [17, 18]). В частности, показано, что в зависимости от состояния возмущений и среднего потока может доминировать либо тот, либо другой тип неустойчивости.

В последнее время большое внимание уделяется исследованию механизмов нелинейного взаимодействия вихрей Гёртлера и волн Толлмина–Шлихтинга. В расчетах работы [19] показано, что один из наиболее важных параметров в этом взаимодействии связан с относительной величиной амплитуд волн ТШ и вихрей Гёртлера. В то же время, эксперименты, проведенные при малых числах Гёртлера [20], показали, что стационарные вихри Гёртлера приводят к трансформации нарастающих квазидвумерных волн ТШ в быстро нарастающие трехмерные

волны. Наиболее сильное увеличение скоростей роста обнаружено локально в тех областях, где частицы жидкости движутся в направлении от стенки (что связано с вращением гёртлеровских вихрей), образуя, в результате, неустойчивые слои сильного сдвига.

Как указано выше, экспериментальные исследования слабонелинейных стадий развития перехода пограничного слоя, обусловленного неустойчивостью Гёртлера, практически отсутствуют, в особенности для случая доминирующих нестационарных вихрей Гёртлера. То же справедливо для исследований пороговых амплитуд применимости линейной теории устойчивости к описанию стационарной и нестационарной неустойчивости Гёртлера. Такая ситуация объясняется прежде всего отсутствием надежных экспериментальных данных для линейного нарастания возмущений, согласующихся с линейной теорией устойчивости. Основная цель настоящего исследования заключается в том, чтобы восполнить этот пробел, применив новый, нестационарный (включая квазистационарный случай) подход, основанный на успешных работах [10, 11] по исследованию линейной неустойчивости Гёртлера. Главной задачей авторов настоящей работы стало проведение исследования слабонелинейного развития нестационарных (в основном) вихрей Гёртлера, с тем, чтобы определить границу между линейным и нелинейным поведением возмущений, а также чтобы прояснить характер первых проявлений нелинейности, возникающих по мере нарастания амплитуды гёртлеровских возмущений.

1. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Измерения проводились при помощи термоанемометра в малотурбулентной аэродинамической трубе Т-324 ИТПМ СО РАН при скорости свободного потока $U_e = 9,18$ м/с. Во время эксперимента степень турбулентности в рабочей части трубы не превышала 0,02 % в частотном диапазоне выше 1 Гц.

Схема экспериментальной части работы приведена на рис. 1. Измерения выполнены на модели, которая ранее использовалась для изучения линейной неустойчивости Гёртлера [10, 11]. Эта модель была установлена в рабочей части аэродинамической трубы (1×1×4 м), как показано на рис. 1. Пограничный слой формировался на плоской несущей пластине 2, снабженной специальной, выполненной по высокоточной технологии, вставкой с вогнутой поверхностью 3 (радиус кривизны $R = 8,37$ м). Для дополнительного управления сходом потока с модели ее задняя часть 7 снабжена закрылком 6. Для того чтобы обеспечить над вогнутой частью модели нулевой продольный градиент давления, использовалась адаптивная ложная стенка 4, крепившаяся на потолке рабочей части трубы.

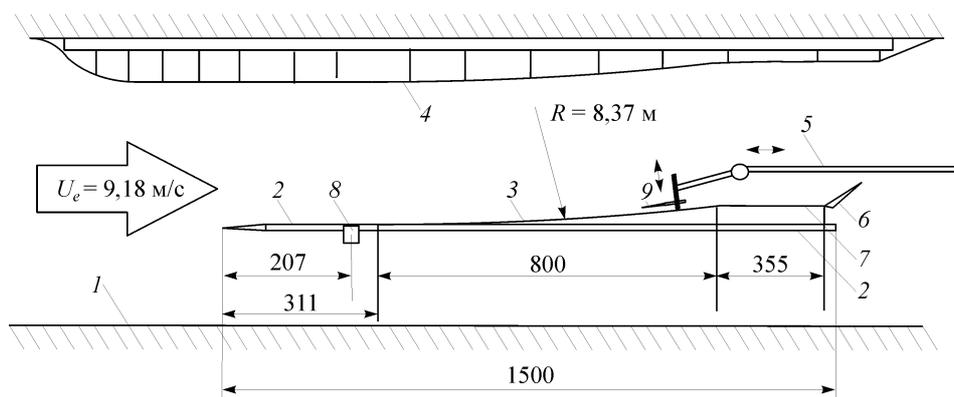


Рис. 1. Экспериментальная модель.

1 — стенка аэродинамической трубы, 2 — несущая пластина, 3 — вставка с вогнутой поверхностью, 4 — адаптивная ложная стенка, 5 — координатник, 6 — закрылок, 7 — задняя часть модели, 8 — источник возмущений, 9 — датчик термоанемометра.

Контролируемые нестационарные вихри Гёртлера вводились в пограничный слой универсальным источником возмущений ВС-II, разработанным в начале 90-х годов в ИТПМ СО РАН [21, 22] (8 на рис. 1) и модифицированным специальным восьмиканальным усилителем сигнала для введения возмущений больших амплитуд. Устройство источника подробно описано в [22]. Для генерации нестационарных вихрей Гёртлера источник впервые использовался в работах [10, 11]. Он представляет собой специальную вставку с поперечной потоку щелью. Непосредственно под щелью, вдоль нее располагаются выходы 82 трубок (с шагом 2 мм), которые и создают относительно слабые возмущения потока типа вдув/отсос. Каждая трубочка соединяется трехмиллиметровой пластиковой трубкой (пневмотрассой) с одним из восьми одинаковых динамиков, расположенных вне аэродинамической трубы и закрытых специальными крышками. Каждая крышка снабжена 12 патрубками для присоединения пневмотрасс. Фактически источник представляет собой расположенный поперечно потоку ряд точечных источников возмущений.

В настоящем эксперименте источник установлен (заподлицо с поверхностью) в центре модели по размаху на расстоянии 207 мм вниз по потоку от ее передней кромки. Локальное число Рейнольдса $Re = U_e \delta^* / \nu$ в месте расположения источника составляло 645 (δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя, а ν — кинематическая вязкость воздуха). Щель источника имела длину 164 мм, ширину 0,6 мм и глубину 1 мм. В этом эксперименте ширина щели увеличена в 3 раза по сравнению с экспериментами работ [10, 11] с тем, чтобы обеспечить генерацию возмущений больших амплитуд. Динамики источника работали на сравнительно малых частотах (в диапазоне от 2,5 до 6 Гц), и поэтому генерировали не акустические волны, а относительно слабые колебания воздуха внутри каждой трубочки, а соответственно, и внутри щели.

Подаваемый на каждый динамик гармонический сигнал (с определенной частотой, амплитудой и фазой) генерировался одним из восьми каналов электронной части источника возмущений ВС-II, снабженного специальным аналого-цифровым преобразователем (АЦП), совмещенным с усилителем мощности. Каждый канал способен генерировать свой собственный, независимый сигнал (практически любой желаемой формы), записанный из компьютера в цифровую память источника (ПЗУ), насчитывающий 2048 точек. В настоящем эксперименте сигналы были синусоидальными. Они генерировались специальной компьютерной программой и раз за разом проигрывались в процессе генерации с необходимой частотой, задаваемой внешним генератором.¹

Возмущения, вводимые в пограничный слой, представляли собой стоячие волны в направлении размаха модели, которые можно представить как суперпозицию двух гармонических волн одной амплитуды и частоты, бегущих в противоположных направлениях вдоль трансверсальной оси z . Как и в экспериментах [10, 11], в пограничном слое эти возмущения преобразовывались в дальнем поле источника в нестационарную (или квазистационарную) первую дискретную моду неустойчивости Гёртлера.

Основные измерения проводились вниз по потоку от источника возмущений, в диапазоне изменения криволинейной (параллельной вогнутой поверхности) продольной координаты $x \approx 350\div 900$ мм. Продольные компоненты средней скорости и возмущений скорости измерялись односточным датчиком термоанемометра (9 на рис. 1), установленным на трехкомпонентном координатнике, позволявшем позиционировать датчик в любой точке области измерений. Сигнал с выхода термоанемометра (как и сигналы платинового термометра сопротивления

¹ Электронный блок источника ВС-II, схема и программы управления им созданы В.И. Бородулиным.

и электронного манометра, измерявших характеристики потока) подавался на персональный компьютер синхронно с опорным сигналом источника возмущений через восьмиканальный BNC-2120 коннектор и 16-битный аналого-цифровой преобразователь PCI-6035E National Instruments.

Процесс получения экспериментальных данных и линейризация сигнала термоанемометра были выполнены с помощью программ, реализованных в среде MATLAB, с использованием констант закона Кинга. Эти константы получались в процессе калибровки датчика, которая проводилась в аэродинамической трубе непосредственно перед измерениями. Линейризованный сигнал подвергался осреднению по ансамблю реализаций, записанных синхронно с опорным сигналом источника возмущений. Число осредненных периодов возбуждаемых гармонических возмущений варьировалось от 10 до 200, в зависимости от режима измерений. Частота дискретизации выбиралась с тем расчетом, чтобы обеспечить от 284 до 682 (всегда целое число) точек на период генерируемого сигнала. В результате полученные сигналы были синхронизированы по времени и содержали как амплитудную, так и фазовую информацию. Осредненные по ансамблю сигналы подвергались фурье-преобразованию с тем, чтобы получить средние амплитуды и фазы возмущений как на частоте генерации f_1 , так и на частотах ее высших гармоник (для исследования нелинейных эффектов). При дальнейшей обработке распределения амплитуд и фаз возмущений по размаху модели подвергались пространственному фурье-анализу с целью получения амплитуд и фаз мод частотно-волнового спектра. Скорость среднего потока измерялась в течение 10÷15 секунд в каждой точке пространства.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДНЕГО ПОТОКА И РЕЖИМЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Как показали измерения, характеристики среднего потока над экспериментальной моделью практически не зависят от поперечной координаты z и скорости набегающего потока (по крайней мере, в диапазоне скоростей между 3 и 15 м/с).

Благодаря тщательно подобранной форме адаптивной ложной стенки в условиях эксперимента реализовано течение с практически нулевым продольным градиентом давления. Для достижения максимальной точности измерений градиента применена специальная процедура коррекции показаний датчика. Процедура включала в себя определение и учет даже очень малых изменений скорости, связанных как со слабой квазистационарной вариацией скорости набегающего потока трубы, так и со слабым изменением скорости набегающего потока вследствие измерения полного гидродинамического сопротивления рабочей части, связанного с перемещениями координатника. Коррекция показаний датчика производилась следующим образом. Скорость набегающего потока постоянно измерялась на входе рабочей части аэродинамической трубы электронным датчиком давления по перепаду статического давления в форкамере и рабочей части трубы. Полученная величина скорости использовалась затем для перенормировки средней скорости, измеренной в каждой пространственной точке датчиком термоанемометра. Эта коррекция позволяла фактически исключить влияние любой медленной модуляции скорости набегающего потока на измеренные распределения средней скорости. Уточненные измерения показали, что очень малый градиент давления в потенциальном потоке все-таки существует при $x \geq 400$ мм. Он приводит к нарастанию средней скорости потока U_e на границе пограничного слоя на величину, не превышающую 0,4 % на интервале между $x = 400 \div 900$ мм.

На рис. 2, а показаны три характерных профиля средней скорости потока U по нормали к стенке модели в сравнении с профилем Блазиуса. Они получены в начале,

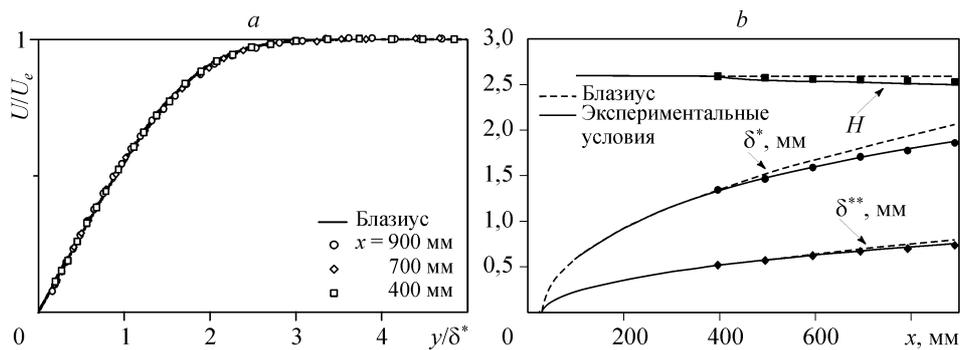


Рис. 2. Сравнение профилей средней скорости по нормали к стенке, измеренных в различных положениях вниз по потоку с профилем Блазиуса (а), и эволюция интегральных параметров пограничного слоя (б), измеренных в эксперименте (точки) и рассчитанных для пограничного слоя Блазиуса и для условий эксперимента.

в середине и в конце области основных измерений.² Точки, измеренные ближе 0,1 мм от стенки, при обработке отбрасывались, поскольку влияние стенки на теплообмен датчика вносило в этой области ошибку в измеренные величины скорости потока. Видно, что измеренные профили практически совпадают с расчетными для безградиентного течения.

Более точно отклонения пограничного слоя, реализованного в эксперименте, от течения Блазиуса показывают распределения интегральных параметров пограничного слоя. Эволюция вниз по потоку толщины вытеснения пограничного слоя δ^* , толщины потери импульса δ^{**} и формпараметра $H = \delta^*/\delta^{**}$, полученных экспериментально, показана на рис. 2, б. Видно, что упомянутый выше очень малый благоприятный градиент давления существует и приводит к замедлению роста пограничного слоя по отношению к безградиентному потоку (Блазиуса). Учет же указанного слабого градиента скорости потенциального потока (в области основных измерений: $x \approx 350 \div 900$ мм) в расчетах, основанных на уравнениях пограничного слоя, приводит к хорошему согласованию с измерениями не только профилей средней скорости по нормали к стенке (которые неотличимы от тех, что показаны на рис. 2, а для безградиентного течения), но и продольных распределений интегральных параметров (см. рис. 2, б).

Толщина вытеснения пограничного слоя δ^* нарастает в области измерений с 1,3 мм до 1,9 мм. Соответственно, число Гёртлера $G^* = (U_e \delta^*/\nu) \cdot (\delta^*/R)^{1/2}$ (главный параметр в задаче о неустойчивости Гёртлера) нарастает с 9,6 до 17,3 (здесь R — радиус кривизны поверхности, а δ^* — толщина вытеснения в отсутствие контролируемых возмущений). Такие умеренные значения числа Гёртлера были выбраны специально, для того чтобы избежать быстрого роста неконтролируемых стационарных вихрей Гёртлера, инициируемых “естественными” возмущениями. Как показали измерения, выполненные при выключенном источнике возмущений, такие неконтролируемые вихри в конце области измерений остаются очень малыми и не превышают 0,1 % от скорости свободного потока. Отметим, что параметры потока и естественных возмущений большей частью совпадают с соответствующими величинами работ [10, 11], в которых исследовалась линейная гёртлеровская неустойчивость.

² Здесь и далее скорости нормированы на скорость на границе пограничного слоя U_e , а нормальная стенке координата y нормирована на толщину вытеснения пограничного слоя δ^* .

Основные результаты измерений получены для вводимой контролируемым образом периодической по времени основной моды неустойчивости Гёртлера, которая соответствовала суперпозиции основных частотно-волновых гармоник $(f_1, +\beta_1)$ и $(f_1, -\beta_1)$. Эта мода вводилась источником возмущений, имела частоту $f_1 = 2,5, 4,0$ или $6,0$ Гц (в зависимости от режима измерений) и поперечную длину волны $\lambda_1 = 2\pi/\beta_1 = 16$ мм, соответствующую безразмерной длине волны $\Lambda = (U_e \lambda_1 / \nu) \cdot (\lambda_1 / R)^{1/2} = 422$, близкую к наиболее быстрорастущей первой гёртлеровской моде в исследованном частотном диапазоне [10, 11]. Три исследованных частоты основной моды соответствуют безразмерному частотному параметру $F_1 = 2\pi f_1 \nu / U_e^2 \cdot 10^6 = 2,84, 4,54$ и $6,81$ соответственно. Как показано в работах [10, 11], первая из этих частот достаточно низка, чтобы считать возбуждаемую гёртлеровскую моду частоты f_1 квазистационарной, соответствующей физически стационарному случаю. Другие же частоты можно отнести к случаю существенно нестационарных гёртлеровских вихрей. Для того чтобы зафиксировать и исследовать проявление нелинейных эффектов в развитии вихрей вниз по потоку, интенсивность вводимых возмущений менялась от малых, несомненно линейных, амплитуд (менее одного процента) до довольно больших значений, достигающих примерно 10 % от скорости свободного потока, при которых предполагалось возникновение нелинейных эффектов.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И РАСЧЕТ

Рассмотрим течение вязкой жидкости вдоль искривленной пластины и введем координаты: вдоль стенки — x , по нормали к ней — y , и перпендикулярно им — z . Пусть x_0 — характерная длина пластины вдоль потока. Введем число Рейнольдса $Re = \sqrt{U_0 x_0} / \nu$, где U_0 — характерная скорость потока вдоль стенки, вязкость и число Гёртлера $Gö = \sqrt{Re x_0} / R$, где R — радиус кривизны.³ Нормируем x на x_0 , y и z на x_0 / Re , давление на $\rho U_0^2 / Re^2$, время на x_0 / U_0 и предположим, что соответствующие компоненты скорости течения можно представить в виде

$$\mathbf{U} = \left\{ U(x, y) + u(x, y, z, t), \frac{V(x, y) + v(x, y, z, t)}{Re}, \frac{w(x, y, z, t)}{Re} \right\},$$

где строчные буквы соответствуют средним величинам, а прописные — возмущениям.

Можно показать [10, 11, 23, 24], что в этом случае, предполагая $Re \rightarrow \infty$ и конечность числа Гертлера $Gö$, систему уравнений Навье–Стокса и неразрывности для возмущений течения, можно свести, отбрасывая члены по порядку величины, меньшие $1/Re$, к следующей системе:

$$\begin{aligned} u_t + Uu_x + U_x u + Vu_y + U_y v &= u_{yy} + u_{zz} + Q_1, \\ v_t + Uv_x + V_x u + Vv_y + V_y v + 2Gö^2 Uu + p_y &= v_{yy} + v_{zz} + Q_2, \\ w_t + Uw_x + Uw_x + Vw_y + p_z &= w_{yy} + w_{zz} + Q_3, \\ u_x + v_y + w_z &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где p — возмущение давления, Q_1 , Q_2 и Q_3 — нелинейные члены:

³ Некоторые обозначения в теоретическом разделе 3 отличаются от обозначений, принятых в остальной части работы и используются только в данном разделе.

$$\begin{aligned}
Q_1 &= uu_x + vv_y + ww_z, \\
Q_2 &= uv_x + vv_y + ww_z + \text{Göu}^2, \\
Q_3 &= uw_x + vw_y + ww_z,
\end{aligned}
\tag{2}$$

а нижние индексы означают производные по соответствующим переменным. В качестве граничных условий предполагается равенство нулю возмущений скорости на стенке и во внешнем потоке. Если положить Q_1 , Q_2 и Q_3 равными нулю, то получатся линейные уравнения, обозначенные в работах [10, 11] как параболические непараллельные уравнения устойчивости Гёртлера.

Возмущения без потери общности можно центрировать относительно поперечной координаты z так, что они представимы в виде суммы “мод”, удобных для анализа экспериментальных данных:

$$\begin{aligned}
u &= u_{00}(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} u_{m0}(x, y) \cos(\omega_m t + \varphi_{m0}(x, y)) + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y) \cos(\beta_n z) \cos(\omega_m t + \varphi_{mn}(x, y)), \\
v &= v_{00}(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} v_{m0}(x, y) \cos(\omega_m t + \chi_{m0}(x, y)) + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}(x, y) \cos(\beta_n z) \cos(\omega_m t + \chi_{mn}(x, y)), \\
w &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(x, y) \sin(\beta_n z) \cos(\omega_m t + \psi_{mn}(x, y)),
\end{aligned}
\tag{3}$$

где $\beta_n = n\beta_0$, $\omega_m = 2\pi m f_0$, причем β_0 — основное поперечное волновое число и f_0 — основная частота, а $u_{mn}(x, y)$, $v_{mn}(x, y)$, $w_{mn}(x, y)$ и $\varphi_{mn}(x, y)$, $\chi_{mn}(x, y)$, $\psi_{mn}(x, y)$, — вещественнозначные амплитудные и фазовые распределения соответственно, и учтено также, что нелинейные возмущения не генерируют двумерного потока вдоль координаты z , но могут генерировать искажения двумерного течения вдоль координат x и y .

После подстановки выражений (3) в уравнения (1) и (2) и приведения их к стандартному виду с положительными и отрицательными волновыми числами и комплекснозначными амплитудами получается бесконечная система связанных нелинейных уравнений. В расчетах число мод по частоте и поперечному волновому числу ограничивалось первыми 32. Для решения полученной конечной системы уравнений использовался метод коллокаций на сетке Гаусса–Лобатто по y с числом узлов $N_y = 70$, а по x — неявный метод конечных разностей первого порядка точности на первом шаге и второго порядка на всех последующих шагах (см. детали, например, в [25]). По координате x сетка была равномерной с числом узлов $N_x = 200$.

В качестве базисных функций по y выбирались многочлены Чебышева [26]. Для приведения области определения многочленов Чебышева $\xi \in [-1; 1]$ к расчетной $[0; y_{\max}]$ использовалось преобразование координат

$$y = a \frac{1 + \xi}{b - \xi},$$

где a и b — подстроечные параметры. Координата $y_{\max} = 2a/(b - 1)$ выбиралась вдали от границы пограничного слоя во внешнем потоке (здесь будут представлены результаты, полученные при $y_{\max} = 44$ и $b = 2$).

Для расчета уравнений (1)–(3) по x они преобразовывались к консервативному виду, аналогично тому, как это делалось для линейных уравнений в работах [10, 11], после чего в матричном виде задача представима на первом шаге как

$$A_2 \mathbf{u}_2 - A_1 \mathbf{u}_1 = \Delta x [B_2 \mathbf{u}_2 - \mathbf{Q}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)],$$

и на последующих шагах как

$$\frac{3}{2} A_{i+1} \mathbf{u}_{i+1} - 2A_i \mathbf{u}_i + \frac{1}{2} A_{i-1} \mathbf{u}_{i-1} = \Delta x [B_{i+1} \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{Q}(\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{u}_{i+1})],$$

где

$$\mathbf{u}_k = (u_k, v_k, w_k, p_k)^T, \quad k = 1, 2, \dots, N_x,$$

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3, 0)^T,$$

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k, \quad \forall k = 1, 2, \dots, N_x - 1,$$

причем все векторные величины с индексами i и ниже на шаге i известны. Начальные данные \mathbf{u}_1 задавались из расчета линейных локально-непараллельных уравнений устойчивости Гертлера [10, 11].

Полученную систему алгебраических уравнений можно переписать в явном виде как нелинейную краевую задачу

$$M_{i+1} \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{v} - \Delta x \mathbf{Q}(\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{u}_{i+1}),$$

где

$$M_2 = A_2 - \Delta x B_2, \quad \mathbf{v} = A_1 u_1, \quad i = 1,$$

$$M_{i+1} = \frac{3}{2} A_{i+1} - \Delta x B_{i+1}, \quad \mathbf{v} = 2A_i u_i - \frac{1}{2} A_{i-1} u_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N_x - 1.$$

Для решения этой задачи использовался итерационный метод Ньютона–Рафсона с последовательной сверхрелаксацией. Параметр релаксации ω при расчетах выбирался равным 0,3. Величина допуска полагалась равной $\varepsilon = 10^{-5}$, т. е. учитывались лишь возмущения, возникающие в процессе итераций, большие ε . Кроме того, появление зеркальных спектральных компонент предотвращалось использованием правила 2/3 (принудительным занулением трети старших частотных и волновых гармоник) [27].

Расчеты проводились в рамках как нелинейной непараллельной теории устойчивости (ННТ), изложенной выше, так и линейной непараллельной теории устойчивости (ЛНТ), получаемой из ННТ при $\mathbf{Q} = 0$, как описано в [10, 11]. Все расчеты выполнялись для условий, максимально приближенных к экспериментальным. В нелинейных расчетах начальный спектр возмущений состоял из набора линейных мод частотно-волнового спектра, амплитуды и фазы которых соответствовали экспериментальным для каждого конкретного амплитудного и частотного режима возбуждения (см. раздел 6.1). При этом начальные значения амплитуд и фаз всех основных частотно-волновых гармоник в расчетах подобраны так, чтобы для каждого исследованного режима они соответствовали экспериментальным амплитудам и фазам в первой точке дальнего поля источника.

4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ СОСТАВ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

На рис. 3 показан один из характерных для высокоамплитудных режимов наборов распределений амплитуд (см. рис. 3, *a*) и фаз (см. рис. 3, *b*) возмущений основной (f_1) и второй ($2f_1$) частотной гармоник, а также стационарных вихрей ($f = 0$)⁴,

⁴ Здесь и далее приведены амплитудные (от нуля до максимума на осциллограммах), а не среднеквадратичные значения величин гармоник.

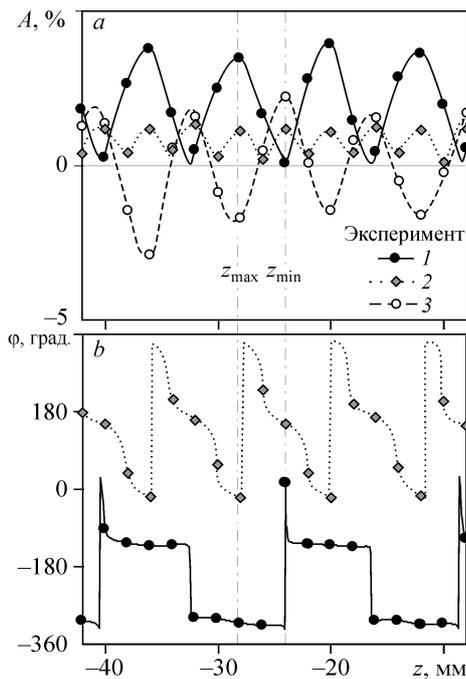


Рис. 3. Распределения по размаху модели амплитуд (а) и фаз (б) возмущений скорости пограничного слоя для основных частотных гармоник, измеренные в одном из исследованных режимов с большой амплитудой возмущений.

$f_1 = 4,0$ Hz, $x = 881,7$ мм, $U/U_e = 0,6$. Эксперимент: $f = f_1$ (1), $2f_2$ (2), 0 (3).

по размаху модели, измеренных в пограничном слое в дальнем поле источника ($x = 881,7$ мм) при частоте основной гармоники $f_1 = 4,0$ Гц. Измерения выполнены на фиксированном расстоянии от стенки ($y = \text{const}$) в районе $U/U_e \approx 0,6$, где в среднем находится амплитудный максимум в профилях стационарных и нестационарных вихрей Гёртлера по нормали к стенке (см. [10, 11], а также рис. 4 ниже).

Видно, что нестационарная гёртлеровская мода основной частоты f_1 ,

порождаемая источником, преобладает в пограничном слое в данном случае, как и во всех других исследованных режимах. Эта мода состоит преимущественно из системы гёртлеровских вихрей с поперечным волновым числом β_1 , соответствующих основной гёртлеровской моде. С волновой точки зрения она соответствует паре частотно-волновых гармоник ($f_1, \pm\beta_1$), сумма которых в распределениях по размаху выглядит, как стоячая волна длиной $\lambda_1 = 2\pi/\beta_1 = 16$ мм. В данном случае амплитуда этой моды не слишком велика (около 3,7 %).

На частоте второй частотной гармоники $f_2 = 2f_1$ наблюдаются возмущения, генерируемые нелинейностью (см. разделы 5.2, 6.1 и 6.2), которые соответствуют, в основном, паре мод ($f_2, \pm\beta_2$) частотно-волнового спектра с удвоенным поперечным волновым числом $\beta_2 = 2\beta_1 = 2\pi/(\lambda_1/2)$ (т. е. $\lambda_2 = \lambda_1/2 = 8$ мм). Возмущение на удвоенной частоте имеет в данном случае относительно невысокую амплитуду — 1,2 % и связано с нелинейными комбинационными взаимодействиями типа ($f_2, \pm\beta_2$) = ($f_1, \pm\beta_1$) + ($f_1, \pm\beta_1$), соответствующими квадратичным членам слабонелинейных амплитудных уравнений.

Взаимодействия такого же типа ($0, \pm\beta_2$) = ($f_1, \pm\beta_1$) - ($f_1, \pm\beta_1$) соответствуют возмущениям нулевой частоты с удвоенным поперечным волновым числом, т. е. стационарным гёртлеровским вихрям (см. разделы 6.1 и 6.2). Амплитуда этих вихрей сравнима с амплитудой вихрей основной моды ($f_1, \pm\beta_1$). Другие гармоники частотно-волнового спектра имеют существенно меньшие амплитуды (см. раздел 6.1). Отметим, что положения по размаху амплитудных максимумов нестационарных возмущений основной частоты всегда совпадают с положением максимумов второй частотной гармоники и минимумов стационарных вихрей, а максимумы стационарных вихрей всегда расположены в минимумах возмущений основной частоты f_1 и в максимумах второй частотной гармоники ($f_2 = 2f_1$). Такие же фазовые соотношения задавались и при проведении расчетов в рамках использованных теоретических подходов.

Помимо мод частотно-волнового спектра, характерных для квадратичного слабонелинейного взаимодействия, в пограничном слое зафиксированы и возмущения, характерные для нелинейных взаимодействий более высокого порядка: гармоники $(f_1, \pm 3\beta_1)$ и $(3f_1, \pm\beta_1)$. Амплитуда первой из соответствующих гёртлеровских мод (т.е. сумма амплитуд частотно-волновых гармоник $(f_1, +3\beta_1)$ и $(f_1, -3\beta_1)$) не превышала в исследованных режимах 2,5 %, а второй $(3f_1, \pm\beta_1)$ была ещё меньше — не более 1 % (даже в том случае, когда амплитуда основной гёртлеровской моды $(f_1, \pm\beta_1)$ достигала 10 %). Пространственный фурье-анализ экспериментальных данных показал, что максимумы амплитуд моды $(3f_1, \pm\beta_1)$ совпадают с максимумами основной гёртлеровской моды $(f_1, \pm\beta_1)$ в распределениях по размаху модели, как и каждый третий максимум моды $(f_1, \pm 3\beta_1)$.

Отдельно отметим, что возмущения, соответствующие частотно-волновым гармоникам $(2f_1, \pm 2\beta_1)$, $(0, \pm 2\beta_1)$, $(f_1, \pm 3\beta_1)$ и $(3f_1, \pm\beta_1)$, отсутствовали в электрических сигналах, питающих источник. Они порождались вследствие нелинейных взаимодействий либо в пограничном слое, либо непосредственно на источнике возмущений (вследствие нелинейности работы самого источника, либо нелинейности соответствующей задачи восприимчивости течения). Причины появления этих мод важны для данного исследования. Их анализ проводится в последующих разделах с использованием сравнения экспериментальных данных и расчетов по линейной и нелинейной теориям устойчивости.

Поскольку основные нестационарные моды с частотами f_1 и f_2 и с поперечными длинами волн $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ и λ_3 имеют максимумы амплитуд при значениях поперечной координаты $z = -28 \text{ мм} \pm n(\lambda_1/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), координата $z = -28 \text{ мм}$, отмеченная пунктирной линией на рис. 3, была выбрана для основных измерений распределений амплитуд и фаз частотных гармоник вниз по потоку. Для того чтобы получить аналогичные зависимости для частотно-волновых гармоник (включая стационарную моду $(0, \pm\beta_2)$), в пограничном слое в различных положениях по продольной координате были измерены семейства профилей по размаху модели (аналогичные тем, что показаны на рис. 3), которые затем были подвергнуты пространственному фурье-анализу.

5. СВОЙСТВА ЧАСТОТНЫХ ГАРМОНИК

5.1. Амплитудная зависимость профилей возмущений по нормали к стенке

Профили средней скорости, а также амплитуд и фаз частотных гармоник возмущений по нормали к стенке измерялись в начале, середине и в конце области исследований для всех амплитудных режимов для основной частоты возмущения $f_1 = 4,0$ Гц. При этом, для оценки формы профиля амплитуд стационарных вихрей $(0, \pm 2\beta_1)$, а также для контроля степени нелинейности и влияния искажения среднего потока на развитие мод $(2f_1, \pm 2\beta_1)$, эти измерения проводились в различных положениях по трансверсальной координате: в максимуме амплитуд основной частотной гармоники f_1 (точка $z = z_{\max} = -28 \text{ мм}$ на рис. 3) и в минимуме (точка $z = z_{\min} = -24 \text{ мм}$ на рис. 3), где амплитуда основной моды была практически нулевой. Профили возмущений на нулевой частоте оценивались как $|U_{\max}(y) - U_{\text{lam}}(y)|$ или $|U_{\min}(y) - U_{\text{lam}}(y)|$, где $U_{\max}(y) = U(y, z_{\max})$ и $U_{\min}(y) = U(y, z_{\min})$ — профили средней скорости, измеренные при возбуждении возмущений (источник включен) в точках z_{\max} и z_{\min} , а $U_{\text{lam}}(y)$ — профиль невозмущенного (ламинарного) пограничного слоя (источник выключен). Альтернативно профили возмущений на нулевой

частоте оценивались как $[U_{\max}(y) - U_{\min}(y)]/2$, что теоретически соответствует предыдущим оценкам в предположении, что $U_{\text{lam}}(y) = [U_{\max}(y) + U_{\min}(y)]/2$. На практике оказалось, что точность измерений в последнем случае существенно выше, что позволяло регистрировать появление стационарных вихрей при меньших амплитудах возмущений.

Исследования показали, что при малых локальных амплитудах A_1 основной частотной моды (до $A_1 < 3,7\%$) профили амплитуд и фаз возмущений в дальнем поле источника ($x \geq 694$ мм) соответствуют собственным функциям линейной теории устойчивости. Форма профилей практически не зависит от амплитуды и положения по координате z . Профили амплитуд имеют характерную колоколообразную форму с максимумом в критическом слое, а фазы практически линейно убывают с ростом расстояния от стенки, причем скорость этого убывания пропорциональна частоте.⁵ Соответствующие экспериментальные кривые, в дальнем поле источника, хорошо согласуются с результатами расчетов, выполненных по линейной непараллельной теории устойчивости для первой (основной, с частотой f_1) и второй ($2f_1$) частотных гармоник и для стационарных вихрей ($f = 0$).⁶ Формы профилей амплитуд и фаз возмущений, рассчитанные для указанных выше сравнительно малых амплитуд по нелинейной непараллельной теории (ННТ), фактически совпадают с собственными функциями соответствующих гёртлеровских мод, даваемыми линейной теорией устойчивости. Это согласование (а также результаты, описанные в п. 5.2 и 5.3) показывает, что до указанных амплитуд появление в потоке мод на частотах f_1 , $2f_1$ и $f = 0$ связано, в основном, с нелинейностью источника возмущений⁷, а не с нелинейными взаимодействиями, происходящими в пограничном слое.

С ростом амплитуды возбуждаемых возмущений ситуация меняется. Характер нелинейного искажения формы профилей различных частотных гармоник проиллюстрирован на рис. 4 на основе измерений и расчетов, полученных в конце области измерений ($x = 881,6$ мм, $G^* = 17,2$) для самой высокой из исследованных амплитуд возмущений, которая в точке максимума в профилях по y достигает при $x = 881,6$ мм величины $A_{1\text{max}} \approx 11\%$. На рис. 4, *a, b* показаны нелинейные искажения, наблюдаемые для доминирующих частотных гармоник на частотах f_1 и f_2 в точке максимума амплитуд основной моды по размаху модели ($z_{\text{max}} = -28$ мм); дополнительно приведены результаты расчетов для доминирующих частотно-волновых мод ($f_1, \pm\beta_1$) и ($2f_1, \pm 2\beta_1$) (см. раздел 6.1). Расчетные кривые (2, 3, 5, 6) представляют собой суперпозицию всех частотно-волновых гармоник на данной частоте, соответствующую экспериментальному частотно-волновому спектру. При этом в расчетах начальные амплитуды и фазы пяти пар основных частотно-волновых мод задавались по экспериментальным данным, а остальные частотно-волновые моды возникали в потоке сами вследствие нелинейности. На основании результатов измерений к основным модам относились: ($f_1, \pm\beta_1$), ($2f_1, \pm 2\beta_1$), ($f_1, \pm 3\beta_1$), ($3f_1, \pm\beta_1$) и ($0, \pm 2\beta_1$). На рис. 4, *c, d* показано сравнение искажений профилей на частотах f_2 и $f = 0$, наблюдаемое и рассчитанное в точках максимума (z_{max}) и минимума ($z_{\text{min}} = -24$ мм) амплитуды основной частотной моды по размаху (см. рис. 3).⁸ На этих рисунках все амплитудные профили нормированы на единицу

⁵ Более подробно свойства линейных собственных функций стационарных и нестационарных вихрей Гёртлера описаны в работах [10, 11].

⁶ Измерения на частоте $3f_1$ в указанном диапазоне амплитуд имеют плохую точность и не подходят для сравнения с результатами расчетов.

⁷ Нелинейность может возникать либо внутри источника, либо в процессе возбуждения им мод неустойчивости

⁸ Фазовый профиль на частоте $f = 0$ отсутствует, а в точке z_{max} для сравнения профиль приведен для частоты f_1 .

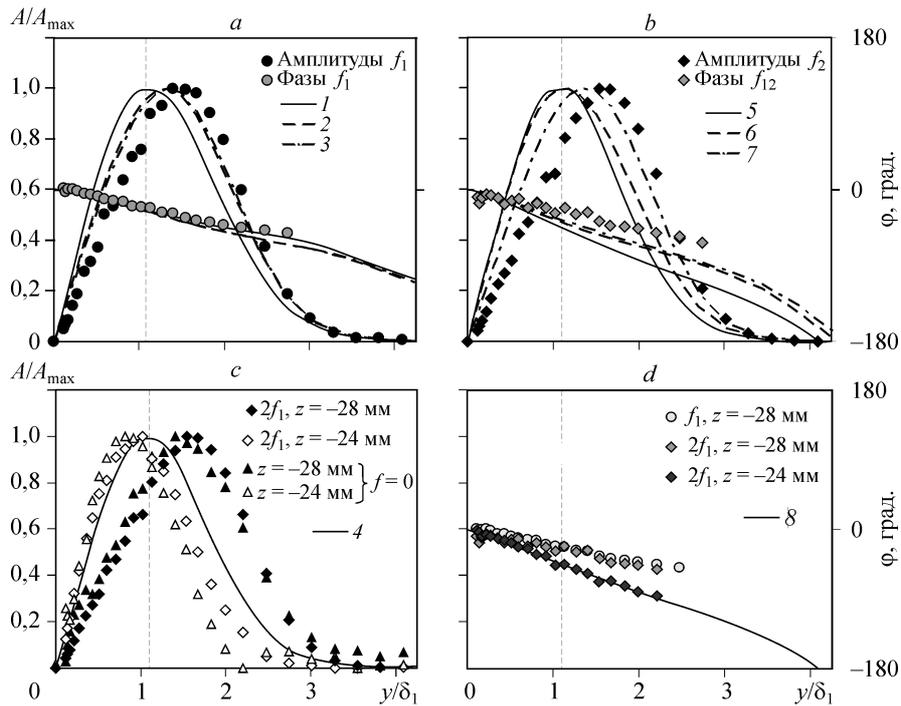


Рис. 4. Амплитуды и фазы возмущений первой (а) и второй (b) частотной гармоник, измеренные в конце исследуемой области ($x = 881,6$ мм, $G^* = 17,2$) в максимуме вихрей основной волны по размаху модели. Максимальная амплитуда вихрей на частоте $f_1 = 4,0$ Гц составляет 11 %, c — амплитуды возмущений второй частотной гармоники и на нулевой частоте, измеренные в z_{\max} и z_{\min} , d — фазы первой и второй частотной гармоник, измеренные в z_{\max} и z_{\min} .

1 — ЛНТ мода ($f_1, \pm\beta_1$), 2 — ННТ мода ($f_1, \pm\beta_1$), 3 — ННТ f_1 , 4 — ЛНТ мода ($2f_1, \pm 2\beta_1$), 5 — ННТ мода ($2f_1, \pm 2\beta_1$), 6 — ННТ мода f_2 .

(левая шкала); фазы приведены в градусах (правая шкала); нормальная к стенке координата y нормирована на толщину вытеснения δ^* невозмущенного пограничного слоя. Вертикальные пунктирные линии показывают положение, где в невозмущенном пограничном слое $U/U_e = 0,6$. Точками приведены результаты измерений, а сплошной и пунктирной линиями — результаты расчетов по линейной и нелинейной теориям соответственно.

С ростом начальной амплитуды возбуждаемых возмущений нелинейность приводит к появлению стационарных вихрей Гёртлера, вследствие чего возникает трехмерное искажение среднего течения, действующее на профили амплитуд и фаз нестационарных вихрей Гёртлера. Наиболее отчетливо эти искажения начинают проявляться в изменении формы профилей основной и второй частотных мод (f_1 и $f_2 = 2f_1$), возникающих после достижения основной частотной гармоникой локальной амплитуды $A_1 \approx 3,7$ % (см. раздел 6.1).

В результате в точке максимума амплитуды основной волны по размаху ($z_{\max} = -28$ мм) амплитудные профили указанных частотных мод начинают удаляться от стенки (см. рис. 4, a, b). При этом изменение фазового профиля наблюдается лишь у второй частотной гармоники (f_2) и проявляется в более медленном убывании фазы с координатой y по сравнению с ЛНТ (см. рис. 4, b, d). В то же время, фазовый профиль основной частотной моды (f_1) по-прежнему хорошо соответствует собственной функции линейной задачи нестационарной гёртлеровской неустойчивости (см. рис. 4, a).

В точке минимума ($z_{\min} = -24$ мм) основная частотная мода имеет практически нулевую амплитуду, а форма измеренного фазового профиля моды f_2 по-прежнему согласуется с расчетом по линейной теории во всем диапазоне исследованных амплитуд (см. рис. 4, *d*). Положение же амплитудного максимума этой моды приближается при $z = z_{\min}$ к стенке, т. е. в направлении, противоположном смещению в точке $z = z_{\max}$ (см. рис. 4, *c*). Интересно отметить, что осредненный для точек z_{\max} и z_{\min} амплитудный профиль частотной моды f_2 остается неизменным вплоть до амплитуд основной волны $A_1 = 6,8$ % и соответствует линейной теории устойчивости.

Та же картина смещения максимумов в точках $z = z_{\max}$ и $z = z_{\min}$ наблюдается и для амплитудных профилей возмущений, порождаемых на нулевой частоте (см. рис. 4, *c*), причем положения амплитудных максимумов этих мод почти совпадают в обеих точках по размаху. Как и для второй частотной моды, профили стационарных вихрей, полученные осреднением для обеих точек по размаху модели (z_{\max} и z_{\min}), по-прежнему мало отличаются от соответствующих собственных функций линейной задачи устойчивости. При наибольших исследованных локальных амплитудах основной гёртлеровской моды A_1 (вплоть до примерно 10 %), стационарные вихри достигают амплитуд $A_0 = 6,3$ % (см раздел 6.1), а существенное отклонение профилей амплитуд и фаз возмущений от собственных функций наблюдается уже на всех исследованных частотах.

Из рис. 4, *a, b* видно, что при наибольшей исследованной начальной амплитуде возбуждаемых возмущений профили амплитуд первой и второй частотных гармоник, измеренные в конце исследованной области ($x = 881,6$ мм, $G^* = 17,2$) в точке z_{\max} , почти одинаково удаляются от стенки (и практически повторяют друг друга). В результате максимумы амплитуд гармоник f_1 и f_2 оказываются в стороне от критического слоя невозмущенного пограничного слоя. Профили фаз, измеренные в точке z_{\max} (см. рис. 3), также оказываются одинаковыми для обеих мод (см. рис. 4, *d*), несмотря на то, что частота второй частотной моды в 2 раза больше частоты первой, а в работах [10, 11] показано, что скорость падения фазы для линейных гёртлеровских мод при удалении от стенки возрастает пропорционально частоте. Этот факт свидетельствует о существенно нелинейном характере второй частотной гармоники.

Результаты расчетов по нелинейной теории показывают, что профили амплитуд частотных мод f_1 и f_2 отклоняются при больших амплитудах от собственных функций, рассчитанных по линейной теории устойчивости для мод $(f_1, \pm\beta_1)$ и $(f_2, \pm\beta_2)$ соответственно (см. рис. 4, *a, b*). Отклонение происходит в том же направлении, что и в экспериментальных профилях. То же справедливо и для фазовых профилей, отклонение которых наблюдается лишь на частоте f_2 (см. рис. 4, *b*). Это говорит о том, что численный эксперимент, как и теоретическая модель, положенная в его основу, правильно улавливает основные нелинейные эффекты, наблюдаемые в эксперименте. В то же время, отклонения от линейной теории, полученные в расчетах (2, 3, 5, 6 линии), несколько меньше экспериментальных, что может быть обусловлено неточностью задания начальных условий в расчетах для мод с высокими волновыми числами ($\beta \geq 4\beta_1$), которые в эксперименте не измерялись⁹, и/или ограничениями теоретического подхода.

Профили, рассчитанные по нелинейной теории для частотной гармоники (f_1) и для частотно-волновой моды ($f_1, \pm\beta_1$), почти совпадают друг с другом (см. рис. 4, *a*), и оба отклоняются от линейного профиля, полученного для моды ($f_1, \pm\beta_1$), демонстрируя нелинейность основной моды и малую роль мод с другими волновыми чис-

⁹ Начальные амплитуды таких мод полагались в расчетах нулевыми.

лами на основной частоте. На частоте же f_2 ситуация совершенно другая (рис. 4, *b*). Здесь профили амплитуд, рассчитанные по ЛНТ для второй частотной моды (f_2) и для частотно-волновой моды ($f_2, \pm\beta_2$), существенно отличаются друг от друга, что обусловлено примесью мод с другими поперечными волновыми числами на данной частоте. Причем мода ($f_2, \pm\beta_2$) выглядит как почти “линейная добавка” к нелинейной в целом частотной моде f_2 . Аналогичная картина характерна и для расчетов, выполненных для профилей стационарных мод, а именно, для доминирующей частотно-волновой моды ($0, \pm\beta_2$) и для стационарных возмущений от суммы всех частотно-волновых гармоник (на рис. 4 не показано).

5.2. Развитие частотных мод вниз по потоку

На рис. 5 приведены наборы экспериментальных (точки) и расчетных (линии) кривых нарастания амплитуд (в логарифмическом масштабе) и фаз возмущений, полученные для одного из частотных режимов ($f_1 = 4,0$ Гц) для основной (см. рис. 5, *a, c, e*) и для второй частотной гармоник (см. рис. 5, *b, d, f*). Измерения выполнялись при фиксированном значении координаты по размаху, соответствующей точке z_{\max} на рис. 3. Амплитуды представлены в процентах от скорости свободного потока (*a, b*), а также в виде значений, нормированных на “начальные”

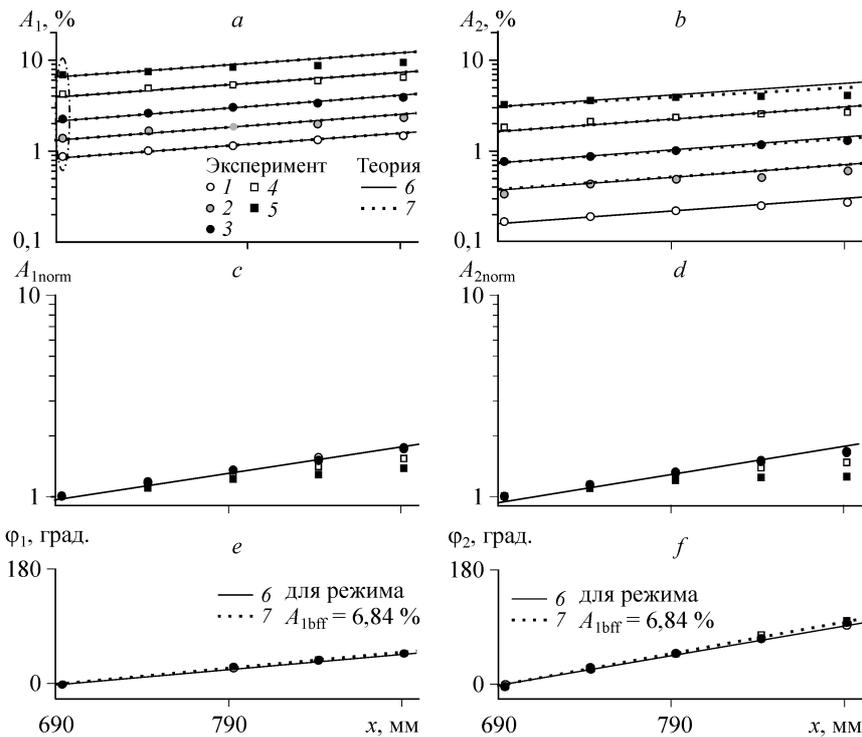


Рис. 5. Кривые нарастания амплитуд (*a–d*) и фаз (*e, f*) возмущений в дальнем поле источника, измеренные (1–5) и рассчитанные (6, 7) для различных “начальных” амплитуд на основной частоте $f_1 = 4,0$ Гц (*a, c, e*) и на частоте второй гармоники $f_2 = 8,0$ Гц (*b, d, f*). Амплитуды даны в процентах от скорости свободного потока (*a, c*) и с нормировкой на “начальные” амплитуды дальнего поля источника (*b, d*). Сплошные кривые — расчет по ЛНТ. Штриховые линии — расчет по ННТ. Для *e, f* расчет приведен для условий с наибольшей начальной амплитудой ($A_{1\text{bff}} = 6,84\%$).

Эксперимент: $A_{1\text{bff}} = 0,85$ (1), 1,39 (2), 2,24 (3), 4,22 (4), 6,84 (5) %; теория: ЛНТ (6), ННТ (7).

величины, взятые в первой точке дальнего поля источника (c, d).¹⁰ Эти точки обведены на рис. 5, a пунктирной линией, а соответствующие значения амплитуд основной частотной моды указаны в процентах от скорости свободного потока в легенде этого рисунка. Сплошными и пунктирной линиями показаны результаты расчетов по линейной и нелинейной теориям соответственно. Расчеты приведены для пропорций “начальных” амплитуд основных мод частотно-волнового спектра, соответствующих приведенным экспериментальным режимам (с различными начальными амплитудами возмущений). Как было отмечено выше, на основании результатов измерений к основным модам частотно-волнового спектра относились: $(f_1, \pm\beta_1)$, $(2f_1, \pm2\beta_1)$, $(f_1, \pm3\beta_1)$, $(3f_1, \pm\beta_1)$ и $(0, \pm2\beta_1)$. На рис 5, c, d приведен расчет, выполненный по ЛНТ, который был сшит в дальнем поле источника по методу наименьших квадратов с экспериментальными кривыми для амплитудного режима с наименьшей “начальной” амплитудой A_{bfff} , измеренной в первой точке дальнего поля источника. Расчеты по ННТ на рис. 5, e, f соответствуют экспериментальному режиму с максимальной ($A_{\text{bfff}} = 6,84\%$) “начальной” амплитудой возмущений.

Амплитуды и фазы возмущений в расчетах по ННТ были подобраны так, чтобы в “начальной” точке дальнего поля источника, для каждого из амплитудных режимов, они примерно совпадали с экспериментальными величинами соответствующих основных частотно-волновых гармоник (см. раздел 6.1). Для удобства сравнения результатов расчета по ЛНТ и ННТ на рис. 5 амплитуды, рассчитанные по линейной теории, нормированы в первой точке дальнего поля источника на величины, полученные в ННТ расчете. Как измеренные, так и расчетные распределения получены для расстояния от стенки, соответствующего безразмерной скорости невозмущенного потока $U/U_e = 0,6$ (при выключенном источнике). Примерно на этом расстоянии от стенки находятся максимумы амплитуд собственных функций вихрей первой дискретной гертлеровской моды в линейной нестационарной задаче неустойчивости Гертлера (см. [10, 11]).

Приведенные зависимости показывают, что в эксперименте амплитуды A_1 возмущений, измеренные на основной частоте $f_1 = 4,0$ Гц (в точке $U/U_e = 0,6$), находятся в диапазоне от 0,85 до примерно 10 % (см. рис. 5, a), в то же время амплитуды второй частотной гармоники A_2 заметно меньше — примерно между 0,15 и 4 % (см. рис. 5, b).

Влияние нелинейности на нарастание амплитуд экспериментальных мод частотного спектра наиболее наглядно видно на рис. 5, c, d , где экспериментальные кривые нормированы на амплитуду в начале дальнего поля источника. Видно, что в эксперименте, при малых амплитудах, развитие возмущений от начальной амплитуды не зависит, как и должно быть в линейной задаче устойчивости. В дальнем поле источника экспериментальные кривые нарастания обеих частотных гармоник хорошо согласуются с рассчитанными по линейной теории устойчивости. Однако после того как амплитуда основной частотной моды (f_1) начинает превышать некоторый порог (около 6 %), характер развития частотных гармоник f_1 и f_2 , наблюдаемый в эксперименте, меняется. Нарастание амплитуд замедляется и почти прекращается, а для второй частотной гармоники даже сменяется (на больших амплитудах) слабым затуханием. Для второй частотной гармоники f_2 уменьшение

¹⁰ Оценка протяженности ближнего поля вниз по потоку основана на предварительных измерениях, результатах экспериментов работ [10, 11], а также расчетов по линейной теории устойчивости.

скорости нарастания для больших амплитуд наблюдается и в расчетах (см. рис. 5, *b*). Однако это уменьшение по теории не столь значительно, как наблюдаемое в эксперименте, а для основной частотной моды f_1 прохождение определенного в эксперименте порога нелинейности практически совсем не сказывается на кривых нарастания (см. рис. 5, *a*).

Отметим, что в эксперименте упомянутое выше отклонение кривой нарастания второй частотной гармоники от линейного закона, наблюдается при сравнительно малых ее амплитудах — около 2,5 % (см. рис. 5, *b*). Это означает, что развитие частотной моды f_2 (состоящей, главным образом, из второй частотно-волновой моды $(f_2, \pm\beta_2)$), как это, в частности, видно на рис. 3) определяется в значительной степени не следствием собственной эволюции этой моды, порожденной источником, а результатом нелинейного самовоздействия основной волны $(f_1, \pm\beta_1)$ в потоке.

В отличие от амплитудных кривых нарастания, соответствующие распределения фаз ведут себя более консервативно (на рис. 5, *e, f* фазы приведены в дальнем поле источника). При малых начальных амплитудах экспериментальные фазовые распределения совпадают друг с другом и согласуются с результатами расчетов по линейной теории (ЛНТ). При превышении амплитудой основной моды указанного выше порога нелинейности наблюдается слабое увеличение скорости нарастания фаз частотных гармоник по сравнению с их линейным развитием. Очень похожее слабое увеличение дают и нелинейные расчеты (по ННТ — пунктирная линия).

Увеличение скорости нарастания фаз нестационарных гёртлеровских возмущений под действием нелинейности является несколько неожиданным. Например, для волн Толлмина–Шлихтинга нелинейность обычно приводит к замедлению нарастания фаз (см. [28]). Как показывает расчет, этот эффект связан с искажением среднего течения в пограничном слое, усиливающимся стационарными вихрями Гёртлера, и отчасти вызван искажением фазовых профилей возмущений по нормали к стенке под действием нелинейных эффектов.

Качественно схожие результаты, с близким порогом нелинейности, получены и для кривых нарастания в двух других группах режимов, исследованных для частот $f_1 = 2,5$ и $6,0$ Гц. При этом с ростом частоты проявление нелинейных эффектов усиливается. Для группы режимов с основной частотой возмущения $f_1 = 6,0$ Гц соответствующие кривые нарастания частотных мод приведены на рис. 6 (в обозначениях рис. 5). Видно, в частности, что замедление скорости нарастания амплитуд как основной, так и второй частотных гармоник при превышении амплитудного порога нелинейности выражено на этой частоте сильнее (см. рис. 6, *a–d*) по сравнению с частотой $4,0$ Гц (см. рис. 5). Так, амплитуды первой частотной гармоники с прохождением порога нелинейности выходят на насыщение, а возмущения второй частотной гармоники в эксперименте даже начинают затухать. В расчетах по ННТ нарастание амплитуд второй частотной гармоники тоже сильно подавляется, однако этот эффект выражен несколько слабее, чем в эксперименте. Основная частотная гармоника в ННТ расчете развивается в исследованном диапазоне амплитуд по линейным законам, как и в других частотных режимах.

Скорости нарастания фаз и первой и второй частотной гармоник увеличиваются при $f_1 = 6,0$ Гц с ростом амплитуд (см. рис. 6, *e, f*), как и при $f_1 = 4,0$ Гц (см. рис. 5, *e, f*). Причем экспериментальные кривые довольно хорошо согласуются с расчетом по нелинейной теории.

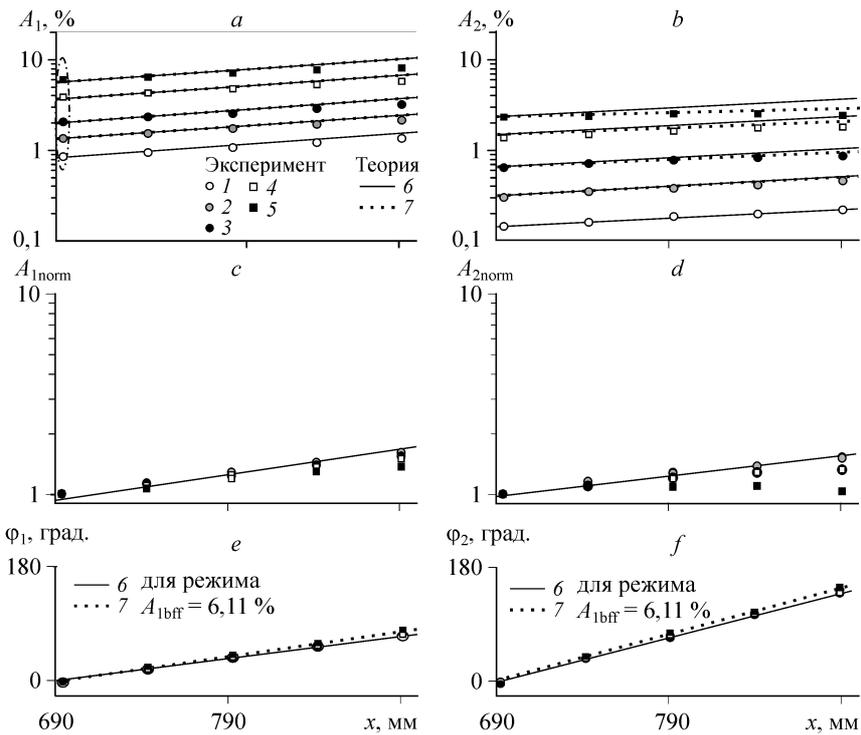


Рис. 6. Кривые нарастания амплитуд (*a-d*) и фаз (*e, f*) возмущений в дальнем поле источника, измеренные (1-5) и рассчитанные (6, 7) для различных “начальных” амплитуд на основной частоте $f_1 = 6,0$ Гц (*a, c, e*) и на частоте второй гармоники $f_2 = 12,0$ Гц (*b, d, f*). Амплитуды даны в процентах от скорости свободного потока (*a, c*) и с нормировкой на “начальные” амплитуды дальнего поля источника (*b, d*). Расчет по ЛНТ (6), по ННТ (7). На (*e, f*) расчет приведен для условий с наибольшей начальной амплитудой ($A_{1\text{bff}} = 6,11$ %). Эксперимент: $A_{1\text{bff}} = 0,86$ (1), 1,37 (2), 2,11 (3), 3,95 (4), 6,11 (5) %.

5.3. Скорости нарастания и распространения частотных гармоник

Описанные в предыдущем параграфе нелинейные эффекты хорошо прослеживаются на поведении определенных в дальнем поле источника пространственных инкрементов ($-\alpha_i$) и фазовых скоростей (C_x/U_e) распространения возмущений вниз по потоку, представленных на рис. 7, *a, b* соответственно, в зависимости от локальной амплитуды A_1 основной гёртлеровской моды (первой частотной гармоники)

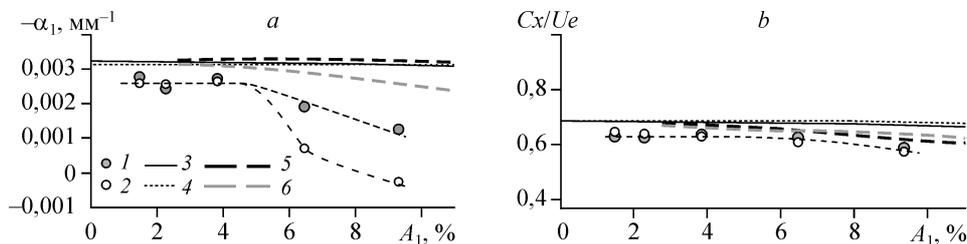


Рис. 7. Инкременты (*a*) и фазовые скорости (*b*), оцененные в конце области измерений $G \approx 17,3$ ($x = 891,6$ мм) для первой (основной) и второй частотной гармоник в зависимости от локальной амплитуды основной моды.

1, 2 — эксперимент для $U/U_e = 0,6$ и $z = z_{\text{max}}$, 3, 4 — расчет для частотных мод f_1 и f_2 по ЛНТ, 5, 6 — то же для расчета по ННТ; $f = f_1 = 4$ Гц (1), $f = 2f_1 = 8$ Гц (2), ЛНТ f_1 (3), ЛНТ $2f_1$ (4), ННТ f_1 (5), ННТ $2f_1$ (6).

в конце области измерений. Результаты представлены для режима $f_1 = 4,0$ Hz для первой и второй частотных гармоник возмущений в дальнем поле источника. Они получены как производные от полиномов первой и второй степени в точке $x = 891,6$ мм (т. е. в конце области измерений), которыми были аппроксимированы экспериментальные и теоретические кривые нарастания фаз и логарифмов амплитуд (см. раздел 5.2). Точками показаны экспериментальные результаты; кривыми 3, 4 — теоретические значения, соответствующие линейному развитию частотных гармоник f_1 и $2f_1$, линии 5, 6 — те же величины, полученные для нелинейного расчета.

Из рис. 7, а видно, что при малых амплитудах возмущений инкременты обеих гармоник в эксперименте фактически не зависят от A_1 и близки к предсказываемым, как линейной, так и нелинейной теориями. Небольшое отличие расчетных и экспериментальных инкрементов в этой области объясняется, скорее всего, неточностью их нахождения при дифференцировании экспериментальных распределений, имеющих заметный разброс. С ростом амплитуды инкременты как первой, так и второй частотных гармоник начинают заметно уменьшаться, когда амплитуда A_1 начинает превышать некоторое пороговое значение, достигаемое на интервале 4 ± 6 %. Похожие значения порога наблюдаются и для двух других исследованных частот возбуждаемых гёртлеровских вихрей. Хотя для частоты $f_1 = 2,5$ Гц верхний предел порога возрастает до 7 %, а для частоты $f_1 = 6,0$ Гц его нижний предел уменьшается до 3 %.

Отметим, что искажения профилей частотных гармоник по нормали к стенке отчетливо проявляются, начиная примерно с этих же амплитуд (см. раздел 5.1). Как было отмечено в предыдущем параграфе, несмотря на то, что амплитуда второй частотной гармоники в два с лишним раза меньше, чем амплитуда возмущений на основной частоте, нелинейные эффекты в эволюции возмущений на частоте $2f_1$ проявляются одновременно с их появлением на основной частотной гармонике. Это свидетельствует о сильной нелинейной связи между возмущениями этих частот в пограничном слое.

Результаты расчетов инкрементов для основной частотной моды не показывают сколько-нибудь существенного изменения ее инкрементов с амплитудой во всем исследованном диапазоне (до $A_{1\max} = 11$ %). В то же время, инкременты второй частотной гармоники $2f_1$ отчетливо убывают с ростом амплитуды, как и в эксперименте. Причем это убывание также начинается в диапазоне амплитуд $A_1 \approx 4 \pm 6$ %. Однако этот эффект выражен в расчетах слабее, чем в эксперименте.

В работах [10, 11] показано, что в отличие от волн ТШ фазовые скорости частотных гармоник нестационарных гёртлеровских мод очень слабо зависят в области линейного развития от параметров задачи (в том числе от частоты и поперечного волнового числа). С ростом амплитуды возмущения A_1 , фазовые скорости основной (f_1) и второй (f_2) частотных мод сначала по-прежнему не зависят от амплитуды, практически совпадают между собой и соответствуют линейным законам эволюции (рис. 7, б). Небольшое отличие измеренных фазовых скоростей от рассчитанных (как по линейной, так и по нелинейной теориям) связано, скорее всего, с неточностью дифференцирования экспериментальных данных. Переход к слабонелинейной области развития возмущений снова наблюдается при превышении порога на интервале $A_1 \approx 4 \pm 6$ % и проявляется в уменьшении фазовых скоростей обеих частотных гармоник, как в расчетах по нелинейной теории, так и в эксперименте. При этом наблюдается очень похожее поведение и очень близкие величины фазовых скоростей основной и второй частотных мод. Отметим, что, в отличие от нестационарных гёртлеровских мод, фазовые скорости волн ТШ обычно возрастают на нелинейных стадиях развития (см., например, [28]).

В заключение этого раздела отметим, что порог перехода к слабонелинейной стадии развития вихрей Гёртлера, определенный экспериментально по критерию нелинейного искажения скоростей нарастания частотных мод возмущений, оказался более низким, чем соответствующий порог для других, существенно трехмерных вихрей — мод неустойчивости поперечного течения (в районе 10 % и выше, см. [29]). С другой стороны, найденное в данных экспериментах значение $A_1 = 4 \pm 6\%$ гораздо выше аналогичного порога нелинейности, наблюдаемого для квазидвумерных волн Толлмина–Шлихтинга, составляющего $1 \pm 2\%$ [30].

6. ПОВЕДЕНИЕ МОД ЧАСТОТНО-ВОЛНОВОГО СПЕКТРА

6.1. Нарастание нормальных гёртлеровских мод

Как отмечалось выше, в различных положениях по продольной координате во всех режимах возбуждения возмущений были измерены наборы распределений амплитуд и фаз нестационарных вихрей Гёртлера по размаху модели (один из них приведен рис. 3). Они получены на расстоянии от стенки, соответствующем $U/U_e = 0,6$ в невозмущенном пограничном слое. Пространственное преобразование Фурье таких распределений позволило получить амплитуды и фазы мод $(nf_1, \pm n\beta_1)$ частотно-волнового спектра и кривые их нарастания вниз по потоку. Некоторые важные результаты такой обработки проиллюстрированы на рис. 8 для режимов с основной частотой $f_1 = 4,0$ Гц. Аналогичные результаты получены и для частот $f_1 = 2,5$ и $6,0$ Гц.

На рис. 8, *a, b, d, f, h* показаны кривые нарастания сумм амплитуд, симметричных относительно оси x в физическом пространстве (и относительно точки $\beta = 0$ в фурье-пространстве) пар доминирующих гармоник частотно-волнового спектра: $(0, \pm\beta_1)$, $(f_1, \pm\beta_1)$, $(f_1, \pm 3\beta_1)$, $(2f_1, \pm 2\beta_1)$ и $(3f_1, \pm\beta_1)$, соответствующих пяти модам гёртлеровских вихрей. Каждая такая пара симметричных гармоник соответствует в физическом пространстве стоячей волне в направлении оси z , а указанная сумма их амплитуд — амплитуде колебаний скорости в точке максимума по размаху модели. В случае отсутствия других мод в потоке она соответствует также амплитуде, непосредственно измеренной в потоке в одной точке пространства. Точками на рис. 8 показаны экспериментальные данные: линия 1 — расчет по ЛНТ, линия 2 — расчет по ННТ. Начальная точка дальнего поля источника обведена линией 3 (как и для частотных гармоник, показанных на рис. 5). Величины суммы амплитуд A_{11bff} основной частотно-волновой пары гармоник $(f_1, \pm\beta_1)$, достигаемые в эксперименте в этой точке в каждом из исследованных амплитудных режимов, указаны в легенде рисунка (см. рис. 8, *b*). На рис. 8, *c, e, g, i* приведены кривые нарастания фаз сумм частотно-волновых мод, симметричных относительно оси x , доминирующих в спектре. Фазы нормированы на осредненные значения фаз частотно-волновых мод вблизи первой точки дальнего поля источника для режимов с малой амплитудой возбуждения. Эти рисунки соответствуют тем же парам мод, суммарные амплитуды которых показаны на рис. 8, *b, d, f, h* соответственно.

Стационарные возмущения состоят практически только из одной пары частотно-волновых гармоник $(0, \pm 2\beta_1)$, поведение амплитуды A_{02} которой показано на рис. 8, *a*. Видно, что начальные амплитуды этой моды быстро нарастают от режима к режиму по мере увеличения амплитуды возбуждаемой основной гёртлеровской моды A_{11bff} . При наибольших начальных амплитудах возбуждения ($A_{11bff} = 5,05\%$) амплитуды стационарных гёртлеровских вихрей достигают величин,

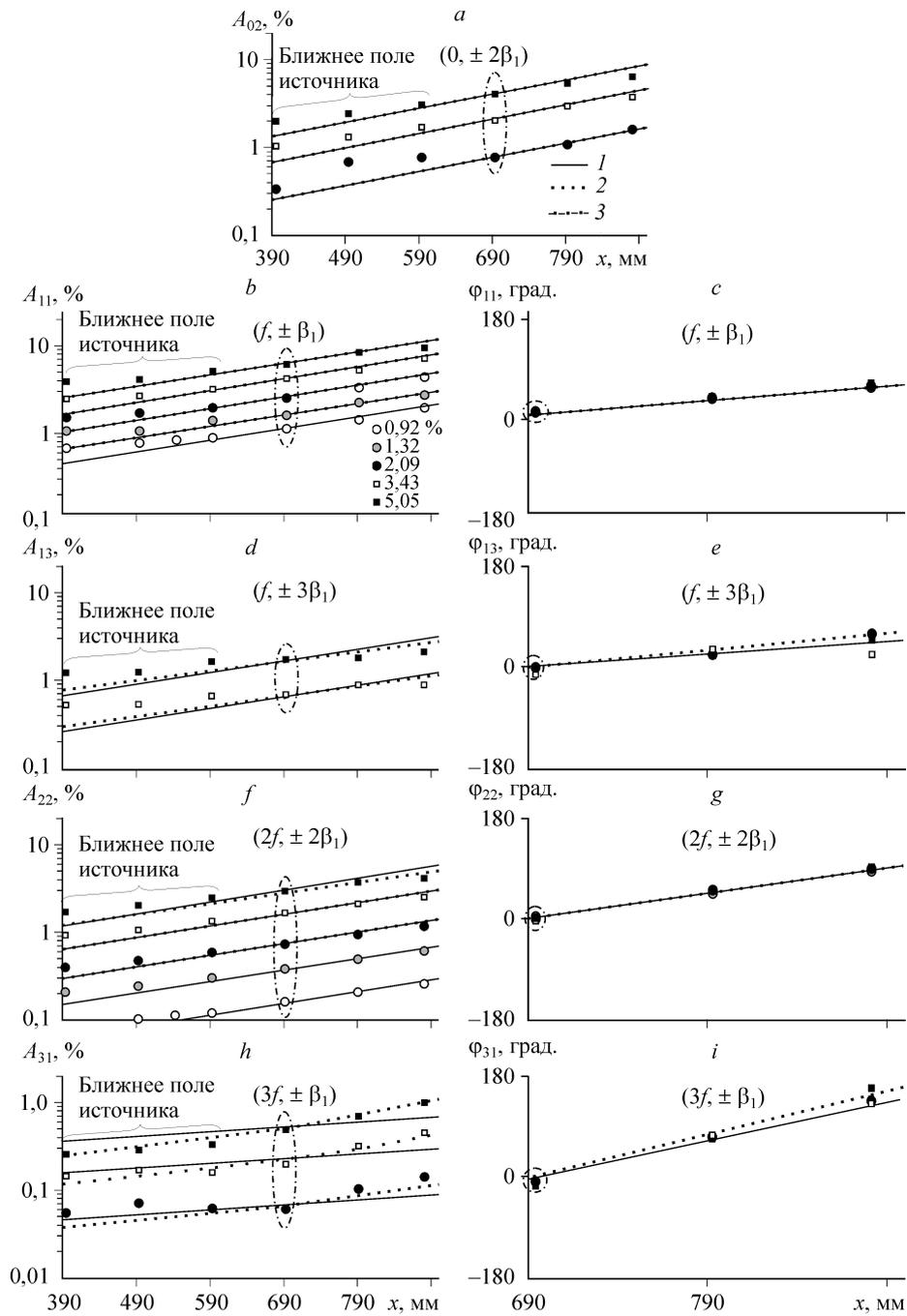


Рис. 8. Кривые нарастания амплитуд (*a, b, d, f, h*) и фаз (*c, e, g, i*) частотно-волновых гармоник, измеренные (точки) и рассчитанные (линии 1, 2) для различных “начальных” амплитуд основной моды частоты $f_1 = 4,0$ Гц. Расчет по ЛНТ (1), расчет по ННТ (2), начальные точки дальнего поля (3). Амплитуды $A_{1\text{bff}}$ основной частотно-волновой моды в начале дальнего поля источника указаны на рис. *a*.

сравнимых с амплитудами основной (нестационарной) гёртлеровской моды ($f_1, \pm\beta_1$) (см. рис. 8, *a* и *b*). И наоборот, в малоамплитудных режимах с $A_{11\text{bff}} = 0,92$ и $1,32\%$ стационарные моды настолько слабы, что их трудно измерить, и поэтому они не показаны на рис. 8, *a*. При этом в эксперименте амплитуда стационарных возмущений A_{02} нарастает вниз по потоку в дальнем поле источника в хорошем соответствии с линейной теорией устойчивости вплоть до $A_{02} = 3,5\div 4,0\%$. При превышении этого порога нарастание замедляется. Эти наблюдения свидетельствуют, что во всех режимах стационарная мода порождается локально на источнике за счет его нелинейности, но ее развитие вниз по потоку соответствует сначала (при малых амплитудах) механизму линейной гёртлеровской неустойчивости. И только на больших амплитудах (при $A_{02} > 3,5\div 4,0\%$, $A_{11} > 4\div 6\%$, примерно) нелинейные взаимодействия в пограничном слое начинают влиять на экспериментально наблюдаемое развитие стационарной моды.

При больших амплитудах возбуждения возмущения на основной частоте f_1 состоят в основном из двух пар частотно-волновых гармоник: пары основной моды ($f_1, \pm\beta_1$) (см. рис. 8, *b*, *c*) и пары дополнительной моды ($f_1, \pm 3\beta_1$), амплитуда которой относительно невелика (см. рис. 8, *d*, *e*). В режимах с $f_1 = 2,5$ и $4,0$ Гц мода ($f_1, \pm 3\beta_1$) появляется в частотно-волновом спектре с момента, когда амплитуда A_{11} суммы основных гармоник ($f_1, \pm\beta_1$) достигает примерно $3,5\%$. Однако в режиме с $f_1 = 6,0$ Гц она возникает в потоке гораздо раньше — при амплитуде A_{11} около $1,5\%$.

Вторая частотная гармоника f_2 состоит во всех изученных случаях только из одной пары гармоник частотно-волнового спектра — ($2f_1, \pm 2\beta_1$), показанной на рис. 8, *f*, *g*. Сумма амплитуд этой пары A_{22} примерно вдвое меньше суммы амплитуд A_{11} гармоник частотно-волнового спектра ($f_1, \pm\beta_1$), т. е. основной моды.

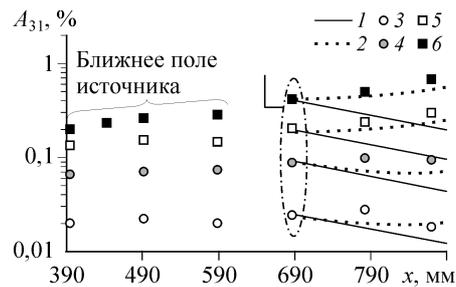
Кроме того, в частотно-волновом спектре присутствуют довольно заметная мода возмущений на утроенной основной частоте $f_3 = 3f_1$ с модулем поперечного волнового числа β_1 , т. е. пара гармоник ($3f_1, \pm\beta_1$) (см. рис. 8, *h*, *i*). Эти возмущения имеют сравнительно небольшую амплитуду и не превышают 1% .

В целом, результаты, показанные на рис. 8, подтверждают наблюдения, описанные в разделах 5.2 и 5.3. При малых начальных амплитудах возмущений экспериментальные кривые нарастания амплитуд и фаз согласуются в дальнем поле источника с расчетом по ЛНТ. Однако когда амплитуда A_{11} суммы основных гармоник ($f_1, \pm\beta_1$) превышает примерно $5,5\%$, в эксперименте начинают проявляться нелинейные эффекты. Скорость роста амплитуд частотно-волновых мод ($0, \pm 2\beta_1$), ($f_1, \pm 3\beta_1$) и ($2f_1, \pm 2\beta_1$) (см. рис. 8, *a*, *d*, *f*) начинает замедляться, и соответствующие кривые нарастания отходят от кривых, вычисленных по линейной теории. В то же время, эволюция основной моды ($f_1, \pm\beta_1$) (см. рис. 8, *b*) при этих амплитудах все еще остается в соответствии с линейной теорией. Первые проявления нелинейности для нее становятся заметными лишь при самой высокой из исследованных амплитуд — $7,7\%$.

Схожее поведение наблюдается и для кривых нарастания, полученных по нелинейной теории, хотя сами величины отклонения от линейных кривых меньше, чем в эксперименте. Согласно этому расчету первые проявления влияния нелинейности на нарастание амплитуд частотно-волновых мод можно заметить, когда амплитуда основной моды ($f_1, \pm\beta_1$) достигает примерно $6\div 8\%$ (для $f_1 = 6,0$ Гц первые отклонения можно увидеть уже при 4%). Скорости нарастания амплитуд мод ($f_1, \pm 3\beta_1$) и ($2f_1, \pm 2\beta_1$) уменьшаются, и соответствующие кривые отходят от кривых, рассчитанных по линейной теории. Однако в отличие от эксперимента, нелинейность не влияет на форму кривых нарастания амплитуд основной ($f_1, \pm\beta_1$) и стационарной ($0, \pm 2\beta_1$) мод до самого конца исследованной области.

Рис. 9. Кривые нарастания амплитуд частотно-волновой гармоники $(3f_1, \pm\beta_1)$, измеренные (точки) и рассчитанные (линии) для различных “начальных” амплитуд основной моды частоты $f_1 = 6,0$ Гц.

1 — расчет по ЛНТ, 2 — расчет по ННТ. Амплитуды $A_{1\text{bff}}$ основной частотно-волновой моды в начале дальнего поля источника указаны в легенде; 1,33 (3), 1,87 (4), 3,10 (5), 4,29 (6).



Появление в пограничном слое гармоник $(f_1, \pm 3\beta_1)$ и $(3f_1, \pm\beta_1)$ несколько неожиданно, поскольку такого рода возмущения соответствуют членам более высокого (третьего) порядка в слабонелинейной теории устойчивости. Понять причину появления этих мод помогает сравнение экспериментальных данных с результатами расчетов по линейной и нелинейной теориям, обсуждаемое ниже.

Остановимся сначала на возмущениях на утроенной основной частоте. Развитие доминирующей на этой частоте частотно-волновой моды $(3f_1, \pm\beta_1)$ проходит несколько необычно. Эти возмущения становятся хорошо измеримыми в потоке при превышении амплитудой основной моды $(f_1, \pm\beta_1)$ величины около $1,5 \pm 2\%$ и даже для малых амплитуд развиваются в дальнем поле источника по законам, отличающимся от тех, что предсказывает линейная теория устойчивости (см. рис. 8, *h, i*). Нелинейная же теория, наоборот, показывает довольно хорошее согласование с экспериментом. Для частоты основной моды равной 6,0 Гц (рис. 9) течение оказывается линейно устойчивым к возмущениям моды $(3f_1, \pm\beta_1)$ во всей исследованной области дальнего поля источника. Тенденцию к затуханию в дальнем поле обнаруживает и экспериментально измеренная мода $(3f_1, \pm\beta_1)$, когда начальная амплитуда основной моды мала (режим с $A_{1\text{bff}} = 1,33\%$). Однако при более высоких амплитудах основной моды ($A_{1\text{bff}} = 1,87$ и, особенно, 3,10 и 4,29 %) возмущение $(3f_1, \pm\beta_1)$ начинает нарастать из-за нелинейности по закону, близкому к предсказываемому нелинейными расчетами. Максимальная амплитуда этих возмущений остается, однако, небольшой и не превышает 0,7 %. Таким образом, можно сделать вывод, что возмущения частотно-волновой моды $(3f_1, \pm\beta_1)$ порождаются, главным образом, в потоке за счет нелинейных эффектов, а не генерируются источником возмущений.

Характер развития амплитуды второй из обсуждаемых “кубических” мод — $(f_1, \pm 3\beta_1)$ (см. рис. 8, *d*) также позволяет сделать некоторые заключения относительно источников ее порождения. Она возникает в пограничном слое в различных частотных режимах при амплитудах основной моды от 1,5 до 3,5 %. Причем, в отличие от моды $(3f_1, \pm\beta_1)$, ее развитие проходит при этих (относительно малых) амплитудах по линейным законам (экспериментальные точки согласуются с ЛНТ). Нелинейные эффекты начинают проявляться для этой моды только тогда, когда они становятся заметны и для других основных мод частотно-волнового спектра. В разделе 3 отмечалось, что расчеты по ЛНТ сделаны в предположении, что все возмущения существенных начальных амплитуд зарождаются на источнике, но таким образом, что расчетные кривые нарастания амплитуд и фаз соответствуют эксперименту в первой точке дальнего поля источника (на рис. 8 обведены пунктиром). Согласование экспериментальных и ЛНТ кривых нарастания в области малых амплитуд можно трактовать как подтверждение правильности этого

предположения. В частности, мода $(3f_1, \pm\beta_1)$ возникает в эксперименте в пограничном слое не в результате нелинейности, а зарождается на источнике возмущений¹¹ с последующим линейным (или нелинейным, после прохождения порога) развитием вниз по потоку.

Аналогичные свойства обнаруживают и стационарные вихри моды $(0, \pm 2\beta_1)$. В области малых амплитуд кривые их нарастания соответствуют линейной задаче устойчивости (см. рис. 8, *a*). Это говорит о том, что такие возмущения возникают, скорее всего, на источнике. Тем не менее, развитие этих вихрей после превышения амплитудного порога нелинейности существенно замедляется по сравнению с линейной теорией, что, вероятно, происходит вследствие межмодовых комбинационных взаимодействий в потоке типа $(0, +2\beta_1) = (f_1, +\beta_1) - (f_1, -\beta_1)$ и $(0, -2\beta_1) = (f_1, -\beta_1) - (f_1, +\beta_1)$. Таким образом, можно сделать вывод, что стационарные вихри в эксперименте могут порождаться нелинейностью, как на источнике возмущений, так и в пограничном слое.

Практически все описанные выше нелинейные эффекты характерны для всех исследованных частот основной гёртлеровской моды, однако, как и в случае развития частотных гармоник (см. раздел 5.2), степень проявления этих эффектов зависит от частоты основной моды. В эксперименте увеличение основной частоты приводит к более сильному замедлению роста амплитуд частотно-волновых гармоник в слабонелинейной области. Так, например, при частоте $f_1 = 6,0$ Гц и амплитуде основной моды $(f_1, \pm\beta_1)$ $A_{11} = 5,9$ % ее нарастание почти выходит на насыщение, а мода $(2f_1, \pm 2\beta_1)$ даже начинает затухать (ср. с рис 8, *f*, для $f_1 = 4,0$ Гц). Увеличение частоты f_1 приводит к интенсификации нелинейных эффектов и в нелинейных расчетах, однако она не так ярко выражена, как в эксперименте.

Кривые нарастания фаз частотно-волновых мод вниз по потоку, проиллюстрированные в дальнем поле источника на рис. 8, *c, e, g, i*, слабо зависят от начальной амплитуды возмущений. Расчеты по нелинейной теории для мод $(f_1, \pm\beta_1)$ и $(2f_1, \pm 2\beta_1)$ дают практически ту же скорость нарастания фаз, что и в линейной теории, но для мод $(f_1, \pm 3\beta_1)$ и $(3f_1, \pm\beta_1)$ нелинейные расчеты показывают некоторое убыстрение нарастания фаз с ростом амплитуды¹². В эксперименте нелинейные эффекты проявляются тоже довольно слабо. Для режимов с частотой основной моды 4 Гц (показаны на рис. 8) они находятся на грани точности измерений для частотно-волновых мод, полученных двойным преобразованием Фурье от измеренных распределений. Однако при более высокой частоте основной волны ($f_1 = 6,0$ Гц) эти эффекты наблюдаются более отчетливо. Переход к нелинейности сопровождается увеличением скорости нарастания фаз для мод $(f_1, \pm\beta_1)$, $(f_1, \pm 3\beta_1)$ и $(3f_1, \pm\beta_1)$ и почти не влияет (в исследованном диапазоне амплитуд) на фазовые распределения, полученные для моды $(2f_1, \pm 2\beta_1)$. Более отчетливо рассмотренные здесь эффекты видны в поведении фазовых скоростей нестационарных вихрей Гёртлера в направлении потока, обсуждаемых в следующем разделе.

Отметим в заключение этого раздела, что понятие порога нелинейности является, конечно, условным и довольно приблизительным. Результат зависит не только от критериев момента начала нелинейности, но и от параметров задачи. Так, например, численное моделирование в рамках ННТ показало, что даже при использовании одного фиксированного критерия первые проявления нелинейных эффектов могут зависеть не только от амплитуд развивающихся в потоке мод

¹¹ Причиной возбуждения этой гармоники могут быть сложные процессы, связанные с устройством источника, которые возникают в результате генерации возмущений относительно больших амплитуд.

¹² Расчет по нелинейной теории показан на всех рисунках только для режима с самой высокой начальной амплитудой $A_{1\text{вг}} = 5,05$ %.

частотно-волнового спектра, но и от фазовых сдвигов между ними. Кроме того, обнаружено, что различные нелинейные эффекты могут сильно зависеть от искажений, соответствующих стационарным вихрям конечной амплитуды среднего по времени потока в пограничном слое. Наиболее важным представляется определение порога нелинейности по критерию отклонения экспериментальных законов нарастания основных доминирующих частотных мод f_1 , $2f_1$ и $f = 0$, либо частотно-волновых мод $(f_1, \pm\beta_1)$, $(0, \pm 2\beta_1)$, $(f_1, \pm 3\beta_1)$ и $(2f_1, \pm 2\beta_1)$ от законов, даваемых линейной теорией устойчивости. Соответствующие отклонения впервые обнаруживаются, как правило, при амплитудах основной частотно-волновой моды между 4 и 6 %.

6.2. Инкременты и фазовые скорости частотно-волновых гармоник

На рис. 10 представлены инкременты частотно-волновых мод $(f_1, \pm\beta_1)$, $(2f_1, \pm 2\beta_1)$ и $(0, \pm 2\beta_1)$ (а) и фазовые скорости первых двух из этих мод (b) в зависимости от локальных амплитуд основной гёртлеровской частотно-волновой моды $(f_1, \pm\beta_1)$, достигаемых в конце области измерений (A_{11}). Как и в разделе 5.3, эти величины были получены как производные от полиномов первой и второй степени в точке $x = 891,6$ мм (т. е. в конце области измерений), которыми были аппроксимированы экспериментальные и теоретические кривые нарастания фаз и логарифмов амплитуд возмущений в дальнем поле источника (см. раздел 6.1). Результаты приведены на примере режима с основной частотой $f_1 = 4,0$ Гц. Здесь, как обычно, точками показаны результаты обработки экспериментальных данных, линиями 4–6 и 7–9 отмечены расчеты по ЛНТ и ННТ соответственно: линиями 4–7 обозначается мода $(f_1, \pm\beta_1)$, линиями 5–8 — мода $(2f_1, \pm 2\beta_1)$ и линиями 6–9 — стационарные вихри $(0, \pm 2\beta_1)$. Сверху приведена вторая шкала, на которой примерно показаны значения амплитуд основной частотной гармоники (A_1) в конце области измерений, в зависимости от которых на рис. 7 приведены значения инкрементов и фазовых скоростей частотных гармоник.

Рис. 10 соответствует, в целом, результатам, описанным в разделе 6.1. При малых амплитудах возмущений в эксперименте как инкременты, так и фазовые скорости не зависят от локальной амплитуды A_{11} основной частотно-волновой гёртлеровской моды $(f_1, \pm\beta_1)$. При этом в пределах точности дифференцирования экспериментальных данных, измеренные фазовые скорости в основном согласуются с фазовыми скоростями, рассчитанными по линейной теории (см. рис. 10, b). Экспериментальные инкременты стационарных вихрей $(0, \pm 2\beta_1)$ и основной нестационарной частотно-волновой моды $(f_1, \pm\beta_1)$ также согласуются, в целом, с линейной теорией (рис. 10, a). Однако линейные расчетные инкременты второй частотно-волновой

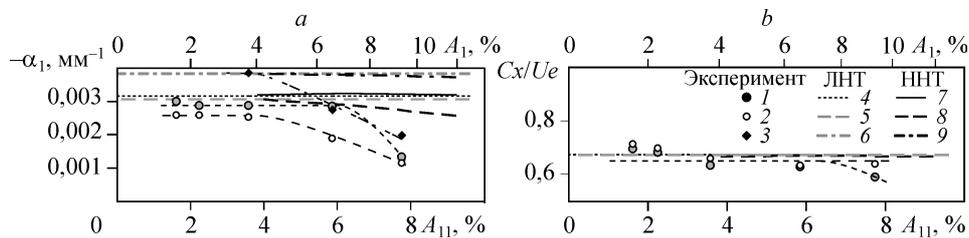


Рис. 10. Инкременты (a) и фазовые скорости (b), оцененные в конце области измерений $G \approx 17,2$ ($x = 891,6$ мм) для частотно-волновых мод $(f_1, \pm\beta_1)$, $(2f_1, \pm 2\beta_1)$ и $(0, \pm 2\beta_1)$ в зависимости от локальной амплитуды A_{11} основной гёртлеровской моды $(f_1, \pm\beta_1)$.

1–3 — величины, построенные по экспериментальным данным, расчет по ЛНТ (4–6) и по ННТ (7–9) теориям; 1, 4, 7 — $(f_1, \pm\beta_1)$, 2, 5, 8 — $(2f_1, \pm 2\beta_1)$, 3, 6, 9 — $(0, \pm 2\beta_1)$.

моды $(2f_1, \pm 2\beta_1)$ заметно превышают измеренные. Этот результат говорит в пользу того, что вихри данной моды не просто порождаются источником возмущений с последующим линейным развитием вниз по потоку, а нелинейно взаимодействуют с вихрями основной частотно-волновой моды даже при малых начальных амплитудах. Из рис. 10, *a, b* также видно, что результаты расчетов по линейной и нелинейной теориям совпадают друг с другом при амплитудах A_{11} не превышающих примерно 4 % для всех частотно-волновых мод, включая моду $(2f_1, \pm 2\beta_1)$.

В диапазоне амплитуд $A_{11} = 4\div 6$ % от скорости среднего потока нелинейность начинает влиять на величины инкрементов частотно-волновых мод $(0, \pm 2\beta_1)$ и $(2f_1, \pm 2\beta_1)$ как в расчетах, так и в эксперименте, приводя к их уменьшению (см. рис. 10, *a*). Уменьшение инкрементов этих гармоник наблюдается и в нелинейной теории, хотя оно выражено гораздо слабее. Фазовые скорости исследованных возмущений остаются в этом диапазоне амплитуд A_{11} без изменений (см. рис. 10, *b*).

С дальнейшим увеличением амплитуды A_{11} основной частотно-волновой моды падение инкрементов частотно-волновых гармоник усиливается. Нелинейное подавление роста стационарных вихрей в эксперименте происходит гораздо быстрее, чем в теории (см. рис. 10, *a*). То же самое характерно и для гармоники $(2f_1, \pm 2\beta_1)$. Кроме того, нелинейность начинает подавлять и нарастание основной частотно-волновой моды $(f_1, \pm \beta_1)$. Ее инкременты сближаются с инкрементами моды $(2f_1, \pm 2\beta_1)$. Тем не менее, в нелинейной теории инкременты моды $(f_1, \pm \beta_1)$ практически не меняются во всем исследованном диапазоне амплитуд. В диапазоне амплитуд $A_{11} = 6\div 8$ % нелинейность уже влияет и на фазовые скорости возмущений, приводя к некоторому уменьшению C_x основной частотно-волновой моды в эксперименте. Несмотря на то, что этот эффект выглядит довольно слабым и мог быть, в принципе, связан с погрешностью определения этих величин, он проявляется и в режиме с более высокой основной частотой ($f_1 = 6,0$ Гц). В нелинейной теории фазовые скорости остаются практически постоянными, хотя увеличение основной частоты сопровождается слабой тенденцией к отклонению от линейной теории.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В условиях контролируемых возмущений проведено экспериментальное и теоретическое исследование начала нелинейных стадий развития нестационарной (в общем случае) неустойчивости Гёртлера пограничного слоя на вогнутой поверхности.

1. Обнаружено, что слабонелинейная стадия развития нестационарных гёртлеровских вихрей характеризуется:

a — нелинейным комбинационным взаимодействием мод частотно-волнового спектра,

b — искажением профилей амплитуд и фаз возмущений по нормали к стенке, связанным с усилением стационарных вихрей на удвоенном поперечном волновом числе,

в — замедлением скоростей нарастания основной гёртлеровской моды и большинства комбинационных мод,

г — уменьшением фазовых скоростей нестационарных возмущений.

2. Анализ экспериментальных данных и их сопоставление с расчетами позволили определить, что часть комбинационных мод генерируется на источнике (за счет его нелинейности), а часть порождается в потоке. Наиболее интенсивные комбинационные моды наблюдаются на удвоенном поперечном волновом числе

при нулевой и удвоенной частоте возмущений. При малых амплитудах возмущений моды, порожденные на источнике, развиваются в его дальнем поле по законам, даваемым линейной теорией устойчивости для наиболее усиливаемых гёртлеровских мод дискретного спектра, а при превышении некоторых порогов амплитуд начинают развиваться по нелинейным законам.

3. Найдено, что при больших амплитудах нестационарных гёртлеровских вихрей отклонения почти всех исследованных характеристик устойчивости от линейных качественно правильно описываются нелинейной теорией устойчивости (включая пороговые значения амплитуд начала нелинейности), хотя величины отклонений в расчетах обычно меньше тех, что наблюдаются в эксперименте.

4. Исследование зависимости начала нелинейного развития вихрей Гёртлера от частоты показало, что и в эксперименте и в расчете ННТ увеличение частоты основной моды приводит к усилению нелинейных эффектов.

5. Обнаружено, что по критерию отклонения скоростей нарастания наиболее интенсивных мод неустойчивости от законов линейной теории, возмущения вступают в область слабонелинейного развития после превышения амплитудой основной моды порога в $4\div 6\%$. Этот порог значительно выше, чем у волн Толлмина–Шлихтинга ($1\div 2\%$), но в то же время он существенно ниже порога для мод неустойчивости поперечного течения трехмерного пограничного слоя (более 10%).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kachanov Y.S., Levchenko V.Y.** The resonant interaction of disturbances at laminar-turbulent transition in a boundary layer // *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 138. P. 209–247.
2. **Corke T.C. and Mangano R.A.** Resonant growth of three-dimensional modes in transitioning Blasius boundary layers // *J. Fluid Mech.* 1989. Vol. 209. P. 93–150
3. **Corke T. and Gruber S.** Resonant growth of three-dimensional modes in Falkner–Skan boundary layers with adverse pressure gradients // *J. Fluid Mech.* 1996. Vol. 320. P. 211–33.
4. **Borodulin V.I., Kachanov Y.S., Koptsev D.B.** Experimental study of resonant interactions of instability waves in self-similar boundary layer with an adverse pressure gradient: I. Tuned resonances // *J. of Turbulence.* 2002. Vol. 3, No. 62. P. 1–38.
5. **Borodulin V.I., Kachanov Y.S., Koptsev D.B., Roschektayev A.P.** Experimental study of resonant interactions of instability waves in self-similar boundary layer with an adverse pressure gradient: II. Detuned resonances // *J. of Turbulence.* 2002. Vol. 3, No. 63. P. 1–22.
6. **Borodulin V.I., Kachanov Y.S., Koptsev D.B.** Experimental study of resonant interactions of instability waves in self-similar boundary layer with an adverse pressure gradient: III. Broadband disturbances // *J. of Turbulence.* 2002. Vol. 3, No. 64. P. 1–19.
7. **Würz W., Sartorius D., Wagner S., Borodulin V.I., Kachanov Y.S.** Experimental study of weakly non-linear interactions of instability waves in a non self-similar boundary layer on an airfoil. Part I. Base flow and initially tuned resonances // *Inter. Conf. on Methods of Aerophysical Research: Proc. Part II.* Novosibirsk: Inst. Theor. Appl. Mech., 2004. P. 201–206.
8. **Sartorius D., Wuerz W., Wagner S., Borodulin V.I., Kachanov Y.S.** Experimental study of weakly non-linear interactions of instability waves in a non self-similar boundary layer on an airfoil Part II: Influence of frequency and spanwise-wavenumber detunings // *Inter. Conf. on Methods of Aerophysical Research: Proc. Part II.* Novosibirsk: Inst. Theor. Appl. Mech., 2004. P. 207–212.
9. **de Paula I.B., Wuerz W., Kraemer E., Borodulin V.I., Kachanov Y.S.** Experimental study of resonant interactions of modulated waves in a non self-similar boundary layer // *Proc. Seventh IUTAM Symp. on Laminar-Turbulent Transition, Stockholm, Sweden, 2009.* Series: IUTAM Bookseries, Vol. 18 / P. Schlatter and D.S. Henningson (Eds.). Berlin: Springer, 2010. P. 274–279.
10. **Boiko A.V., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Mischenko D.A.** A new approach to investigation of Goertler instability. Verification of theory // *Inter. Conf. on Methods of Aerophysical Research: Proc. Pt III.* Novosibirsk: Inst. Theor. Appl. Mech., 2007. P. 33–38.
11. **Boiko A.V., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Mischenko D.A.** Steady and unsteady Goertler boundary-layer instability on concave wall // *Eur. J. Mech., B/Fluids.* 2010. Vol. 29. P. 61–83.
12. **Ito A.** The generation and breakdown of longitudinal vortices along a concave wall // *J. Japan Soc. Aero. Space Sci.* 1980. Vol. 28. P. 327–333.
13. **Ito A.** Breakdown structure of longitudinal vortices along a concave wall // *J. Japan Soc. Aero. Space Sci.* 1985. Vol. 33. P. 166–173.
14. **Ito A.** Visualization of boundary layer transition along a concave wall // *Proc. 4th Int. Symp. Flow Visualization, Paris, 1986.* Washington, 1987. P. 339–344.

15. **Ito A.** Breakdown structure of longitudinal vortices along a concave wall; on the relation of horseshoe-type vortices and fluctuating flows // J. Japan Soc. Aero. Space Sci. 1988. Vol. 36. P. 274–279.
16. **Aihara Y., Koyama H.** Secondary instability of Görtler vortices: Formation of periodic three-dimensional coherent structure // Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 1981. Vol. 24. P. 78–94.
17. **Bippes H. and Gortler H.** Dreidimensionale Störungen in der Grenzschicht an einer konkaven Wand // Acta Mechanica. 1972. Vol. 14. P. 251–267.
18. **Swearingen J. D., Blackwelder R. F.** The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of a wall // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 182. P. 255–290.
19. **Mendonc M. T., Morris P. J., Pauley L. L.** Interaction between Görtler vortices and two-dimensional Tollmien–Schlichting waves // Phys. Fluids. 2000. Vol. 12, No. 6. P. 1461–1471
20. **Tani I., Aihara Y.** Görtler vortices and boundary layer transition // ZAMP. 1969. Vol. 20. P. 609–618.
21. **Gaponenko V. R., Y.S. Kachanov.** New methods of generation of controlled spectrum instability waves in boundary layer // Inter. Conf. on Methods of Aerophysical Research: Proc. Part I, Novosibirsk: Inst. Theor. Appl. Mech., 1994. P. 125–130.
22. **Borodulin V.I. Kachanov Y.S., Koptsev D.B.** Study of resonant instability wave interaction in self-similar boundary layer with adverse pressure gradient // Inter. Conf. on Methods of Aerophysical Research: Proc. Part I, Novosibirsk: Inst. Theor. Appl. Mech., 2000. P. 47–52.
23. **Hall P.** On the nonlinear evolution of Görtler vortices in growing boundary layers // J. Inst. Math. Appl. 1982. Vol. 29, No. 2. P. 173–196.
24. **Hall P.** The nonlinear development of Görtler vortices in growing boundary layer // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 193. P. 243–266.
25. **Andersson P., Berggren M., Henningson D.S.** Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11, No. 1. P. 134–150.
26. **Weideman J.A.C., Reddy S.C.** A MATLAB differentiation matrix suite // ACM Trans. Math. Software. 2000. Vol. 26, No. 4. P. 465–519.
27. **Canuto C., Quarteroni A., Hussaini M.Y., Zang T.A.** Spectral methods. Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics. Berlin: Springer, 2007, 596 p.
28. **Kachanov Y.S. Kozlov V.V., Levchenko V.Y., Ramazanov M.P.** On nature of K-breakdown of a laminar boundary layer. New experimental data // Laminar-Turbulent Transition. Berlin: Springer, 1985. P. 61–73.
29. **Качанов Ю.С., Тарарыкин О.И., Федоров А.В.** Исследование устойчивости пограничного слоя к стационарным возмущениям на модели скользящего крыла // Изв. СО АН СССР, Сер. техн. наук. 1990. Вып. 5. С. 11–21.
30. **Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я.** Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982.

Статья поступила в редакцию 4 мая 2010 г.