Таким образом, рассмотрение существующих представлений о горении конденсированных систем показывает, что критерий погасания для конденсированных систем с аномальной температурной зависимостью стационарной скорости горения может быть представлен в трех видах: 1) $\varphi = \varphi_i$ (или $\varphi_1{}^*$), 2) $\varphi = \varphi_2{}^* = \varphi_{\min}$, 3) $\varphi = \varphi_j$ (или $\varphi_2{}^*$). Выбор конкретной формы условия погасания определяется условиями эксперимента. Результаты опытов по погасанию пороха Н вблизи контакта с металлом можно объяснить, предположив, например, существование правой крайней точки на кривой $\varphi(u)$. Для конденсированных систем с аномальной зависимостью $\varphi(u)$ в различных условиях эксперимента возможно как увеличение, так и уменьшение скорости горения перед погасанием. Существование правой крайней точки на кривой $\varphi(u)$ влечет за собой возможность погасания при резком подъеме и уменьшении давления. Физическим следствием существования минимального градиента температуры является погасание при встречном распространении волны горения и температурной волны, а также двух волн горения.

Поступила 3 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков С. С., Похил П. Ф., Рязанцев Ю. С., Суханов Л. А. Исследование условий погасания пороха методом «замораживания» зоны горения. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 6.
2. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. К теории теплового взаимодействия зоны горения с контактом порох — металл. ПМТФ, 1968, № 4.
3. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. ЖЭТФ, 1942, т. 12, № 11, 12, стр. 498.
4. Зельдович Я. Б. О скорости горения пороха при переменном давлении. ПМТФ, 1964, № 3.
5. Коротков А. И., Лейпунский О. И. Зависимость температурного коэффициента скорости горения пороха при атмосферном давлении от температуры пороха. В сб.: «Физика взрыва», Изд. АН СССР, 1953, № 2.
6. Похил П. Ф., Нефедова О. И., Марголин А. Д. Об аномальной зависимости скорости горения пороха от начальной температуры. Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 4.
7. Зенин А. А., Лейпунский О. И., Марголин А. Д., Нефедова О. И., Похил П. Ф. Поле температур у поверхности горящего пороха и устойчивость горения. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 3.
8. Александров В. В., Конев Э. В., Михеев В. В., Хлевной С. С. К вопросу о температуре поверхности горящего нитроглицеринового пороха. Физика горения и взрыва, 1966, № 1, стр. 68.
9. Новожилов Б. В. Нестационарное горение порохов, имеющих переменную температуру поверхности. ПМТФ, 1967, № 1, стр. 54.
10. Новожилов Б. В. Критерий устойчивости стационарного режима горения пороха. ПМТФ, 1965, № 4.
11. Гостинцев Ю. А., Марголин А. Д. О нестационарном горении тонких пластин пороха. ПМТФ, 1964, № 5.
12. Марголин А. Д., Фогельзанг А. Е. О горении тетрила. Физика горения и взрыва, 1966, № 2, стр. 10.
13. Максимов Э. И., Григорьев Ю. М., Мержанов А. Г. О закономерностях в механизме горения перхлората аммония. Изв. АН СССР, Сер. хим., 1966, № 3, стр. 422.

О СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ РАБОТЫ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКТОРОВ

Э. А. Чернова (Москва)

Исследуется существование, а также число возможных стационарных режимов работы проточных реакторов конечной длины с неподвижным мелкозернистым слоем катализатора. Предполагается, что эффективная скорость химической реакции выражается однозначной функцией весьма общего вида от температуры и концентрации определяющей компоненты в потоке. В п.1 показывается, что в адиабатическом реакторе решение прямой и обратной задач по нахождению стационарных режимов всегда существует, причем для обратной оно единственно. В п.2 устанавливаются некоторые достаточные условия единственности прямой задачи для случая равенства эффективных коэффициентов теплопроводности и диффузии. В п.3 рассматривается простейшая диффузионная модель реактора с теплоотводом. Делается попытка определить области изменения параметров (характеризующих температуру подаваемой смеси, скорость ее подачи, теплоотвод и длину реактора), в которых существуют различные стационарные режимы, в частности, низко- и высокотемпературный, а также оба этих режима.

1. Стационарные режимы рассматриваемых адиабатических реакторов обычно [1-3] описываются следующими уравнениями (ниже в целях дальнейшего исследования в них введен неизвестный параметр γ, характеризующий температуру на выходе из слоя)

$$a\frac{d^2u}{d\xi^2}-\frac{du}{d\xi}+f\frac{(u\gamma,\ v\gamma)}{\gamma}=0,\quad b\frac{d^2v}{d\xi^2}-\frac{dv}{d\xi}-f\frac{(u\gamma,\ v\gamma)}{\gamma}=0 \tag{1.1}$$

$$\xi=-l\quad u-a\frac{du}{d\xi}=0,\quad v-b\frac{dv}{d\xi}=\frac{u_m}{\gamma} \tag{1.2}$$

$$\xi=0,\quad u=u_m,\quad \frac{du}{d\xi}=0,\quad \frac{dv}{d\xi}=0 \tag{1.3}$$

$$\left(u=\frac{T-T_-}{T^0\gamma},\quad v=\frac{Ch}{\gamma},\quad \xi=\frac{x-L}{\omega\tau},\quad f(u\gamma,\ v\gamma)=\tau F(T,\ C)h,\quad \gamma=\frac{T_+-T_-}{u_mT^0}\right)$$

$$\left(a=\frac{\varkappa}{w^2\tau},\quad b=\frac{D}{w^2\tau},\quad \frac{1}{\tau}=F(T_-,\ C_-),\quad u_m=C_-h,\quad h=\frac{H}{\rho cT^0},\quad l=\frac{L}{w\tau}\right)$$

Здесь T — температура; T^0 — некоторая характерная температура (например, T_-); C — концентрация определяющей компоненты в реагирующей смеси; T_-, C_- — температура и концентрация вдали перед слоем катализатора; w — скорость фильтрации; $F\geqslant 0$, H — эффективная скорость и тепловой эффект химической реакции; $\rho c=\mathrm{const}$ — теплоемкость единицы объема; $\varkappa$, D — эффективные коэффициенты продольной температуропроводности и диффузии; L — длина слоя катализатора; T_+ — температура на выходе из этого слоя (величина неизвестная).

Из уравнений (1.1) и условия (1.2) следует:

$$a\frac{du}{d\xi}+b\frac{dv}{d\xi}-u-v+\frac{u_m}{\gamma}=0 \tag{1.4}$$

Из (1.4) на основании (1.3) получаем, что $v=u_m(1-\gamma)/\gamma$ при $\xi=0$. Поскольку $v\geqslant 0$, то $0\leqslant\gamma\leqslant 1$. Если принять u за независимую переменную, $p=du/d\xi$, v и ξ — за искомые функции, а вместо второго уравнения в (1.1) взять (1.4), то задачу (1.1) — (1.3) можно представить в виде

$$\frac{dp}{du}=\frac{p\gamma-f(u\gamma,\ v\gamma)}{ap\gamma},\quad \frac{dv}{du}=\frac{(u+v-ap)\gamma-u_m}{bp\gamma},\quad \frac{d\xi}{du}=\frac{1}{p} \tag{1.5}$$

$$u=u_m,\ p=0,\ v=u_m(1-\gamma)/\gamma,\ \xi=0 \tag{1.6}$$

$$u=ap,\ \xi=-l \tag{1.7}$$

Последнее условие в (1.2) автоматически выполняется, так как оно учтено в (1.6).)

Покажем, что для любой гладкой, однозначной функции $f(u\gamma,\ v\gamma)$, удовлетворяющей условиям

$$f=\partial f/\partial u=0,\ \partial f/\partial v>0\ \text{при}\ v\gamma=0;\ 0<f<\infty\ \text{при}\ 0<v\gamma<\infty\ \ (0\leqslant u\gamma\leqslant u_m) \tag{1.8}$$

(предполагается сначала, что $H>0$)

а) обратная задача (γ задается, l определяется) для системы (1.5) — (1.7) всегда имеет единственное решение

б) прямая задача (l задается, γ определяется) всегда имеет решение, причем для полубесконечного реактора ($l=\infty$) оно единственно.

При заданном γ задача (1.5), (1.6), представляет собой задачу Коши. В точке

$$u=u_m,\ p=0,\ v=v_m=u_m(1-\gamma)/\gamma,\ \xi=0$$

имеется особенность (числитель и знаменатель во втором уравнении (1.5), а при $\gamma=1$ и в первом обращаются в нуль). Если $\gamma=1$, то эта точка особая. Из нее выходят по три интегральных кривых для p, v и ξ, две из которых дают $\xi>0$, что противоречит условию (1.7). Остается одна пара кривых с наклонами $0<k_1<\infty$ и $0<k_2<\infty$ (на основании (1.8)), дающая вблизи $u=u_m$

$$p=k_1(u_m-u),\ v=k_2(u_m-u),\ \xi=-\infty \tag{1.9}$$

Если $0\leqslant\gamma<1$, то записываем первые два уравнения (1.5) относительно производных du/dp и dv/dp. Правые части в полученных уравнениях при $u=u_m$, $v=v_m$, $p=0$ обращаются в нуль и не имеют особенностей. Если искать решение этих уравнений в окрестности u_m в виде рядов по p, то в результате, переходя к прежним переменным и аналогично предыдущему отбрасывая решения с $\xi>0$, получим следующие выражения для $p\,(u,\,\gamma)$, $v\,(u,\,\gamma)$ и $\xi\,(u,\,\gamma)$ вблизи $u = u_m$ (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка)

$$p = \sqrt{2f_m / a\gamma}\,(u_m - u)^{1/2}, \qquad v = v_m + a / b\,(u_m - u) \tag{1.10}$$

$$\xi = -\sqrt{2a\gamma / f_m}\,(u_m - u)^{1/2} \quad (f_m = f\,(u_m\gamma,\ v_m\gamma), \quad v_m = u_m(1-\gamma)/\gamma)$$

Кривые p и v, будучи согласно (1.9), (1.10) положительными вблизи $u = u_m$, сохраняют этот знак при $0 \leqslant u < u_m$, так как иначе нашлась бы точка, где либо $p = 0$, $dp\,/\,du \geqslant 0$, $v > 0$, либо $v = 0$, $dv\,/\,du \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, что противоречит (1.5). Поскольку $p > 0$, $0 < f < \infty$, то кривая $p\,(u,\ \gamma)$ обязательно дойдет до прямой $p = u\,/\,a$ (повернуть или иметь вертикальную асимптоту, согласно (1.5), она не может) и пересечет ее только один раз, так как $-\infty < dp\,/\,du < 1/a$ согласно (1.5).

Таким образом, при любом заданном $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ решение задачи (1.5), (1.6) существует и дает единственные значения

$$u_0(\gamma) = ap\,(u_0,\gamma) \geqslant 0, \quad l\,(\gamma) = -\xi\,[u_0(\gamma),\ \gamma] = \int_{u_0}^{u_m} \frac{du}{p} \geqslant 0 \tag{1.11}$$

т. е. обратная задача (1.5) — (1.7) имеет единственное решение (u_0 будет значением u на входе в слой).

Отметим, что при проектировании реакторов решение обратной задачи имеет смысл, так как она дает значение длины реактора, при которой существуют режимы с заданной максимальной температурой или требуемым количеством получаемого продукта.

При $\gamma = 1$ согласно (1.9) $l = \infty$. При $\gamma \to 0$ согласно (1.10) $p \to \infty$ вблизи u_m, откуда $u_0 \to u_m$, $l = -\xi\,(u_0) \to 0$. Решение задачи (1.5), (1.6) непрерывно зависит от параметра γ. Поэтому при изменении γ от 0 до 1 величина l сплошь заполняет интервал $[0,\ \infty]$, т. е. для любого $l \geqslant 0$ всегда найдется хотя бы одно значение $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, при котором задача (1.5) — (1.7) имеет решение. Для $l = \infty$ это значение ($\gamma = 1$) будет единственно, так как если $\gamma \neq 1$, то $l < \infty$ согласно (1.10), (1.11).

Таким образом, в адиабатическом реакторе произвольной длины l всегда существует хотя бы один, а при $l = \infty$ только один стационарный режим.

В случае $H < 0$ приведенный анализ полностью сохраняется с той разницей, что

$$-\infty < f \leqslant 0, \ u_m < 0, \ u_m \leqslant u \leqslant 0, \ v \leqslant 0, \ p \leqslant 0 \ (H < 0)$$

2. Как известно [4, 5], прямая задача может быть неединственной. Установим для случая $a = b$ некоторые достаточные условия ее единственности. (Другие достаточные условия, эффективные при малых a или l, были получены в [6] с помощью задачи о собственных значениях.)

Проинтегрировав (1.4) относительно $u + v$ с использованием условия (1.3), получим $v = u_m\,/\,\gamma - u$. Тогда система (1.5) — (1.7) примет вид

$$\frac{dp}{du} = \frac{p\gamma - \varphi\,(u\gamma)}{ap\gamma}, \qquad \frac{d\xi}{du} = \frac{1}{p} \tag{2.1}$$

$$u = u_m,\ p = 0,\ \xi = 0; \quad u = ap,\ \xi = -l \tag{2.2}$$

Дифференцируя (1.11) и (2.1) по γ, получаем

$$l_\gamma = \frac{dl}{d\gamma} = -\left(\frac{\partial \xi}{\partial \gamma}\right)_{u=u_0} - \left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=u_0} \frac{du_0}{d\gamma} = -\xi_\gamma\,(u_0) - \frac{ap_\gamma\,(u_0)\gamma}{\varphi\,(u_0\gamma)} \tag{2.3}$$

$$\frac{dp_\gamma}{du} = -\frac{\chi\,(u\gamma)}{ap\gamma^2} + \frac{\varphi\,(u\gamma)}{ap^2\gamma}\,p_\gamma, \qquad \frac{d\xi_\gamma}{du} = -\frac{p_\gamma}{p^2} \qquad \left(p_\gamma = \frac{\partial p}{\partial \gamma}\right) \tag{2.4}$$

$$\chi\,(\vartheta) = \vartheta\varphi'\,(\vartheta) - \varphi\,(\vartheta) \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant u_m\gamma,\ \vartheta = u\gamma) \tag{2.5}$$

В окрестности $u = u_m$ согласно (1.10) при $0 \leqslant \gamma < 1$

$$p_\gamma = \left(\frac{u_m - u}{2a\varphi_m\gamma^3}\right)^{1/2} \chi\,(u_m\gamma), \quad \xi_\gamma = \left(\frac{a\,(u_m - a)}{2\varphi_m{}^3\gamma}\right)^{1/2} \chi\,(u_m\gamma)\,(\varphi_m = \varphi\ (u_m\gamma)) \tag{2.6}$$

Если $\chi\,(\vartheta) \leqslant 0$ при $0 \leqslant \vartheta \leqslant u_m\gamma$, то согласно (2.6) $p_\gamma \leqslant 0$, $\xi_\gamma \leqslant 0$ вблизи $u = u_m$ и если бы в дальнейшем эти неравенства нарушались, то нашлась бы точка u^0, где $p_\gamma\,(u^0) > 0$, $dp_\gamma\,(u^0)\,/\,du \leqslant 0$ или $p_\gamma\,(u^0) \leqslant 0$, $d\xi_\gamma(u^0)\,/\,du < 0$, что противоречит

(2.4). Следовательно, если $\chi(\vartheta) \leqslant 0$ при $0 \leqslant \vartheta \leqslant u_m \gamma$, то $p_\gamma \leqslant 0$, $\xi_\gamma \leqslant 0$ при $0 \leqslant u \leqslant \leqslant u_m \gamma$, откуда, согласно (2.3), $l_\gamma(\gamma) \geqslant 0$. Если $\chi(\vartheta) \leqslant 0$ при $0 \leqslant \vartheta \leqslant u_m$, то $l_\gamma \geqslant 0$ при всех $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, т. е. $l(\gamma)$ — функция монотонная и, следовательно, найдется единственное значение $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, обеспечивающее заданное $l \geqslant 0$.

Таким образом, если $\chi(\vartheta) \leqslant 0$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant u_m)$, т. е.

$$\sup\,[\varphi'(\vartheta) - \varphi(\vartheta) / \vartheta] \leqslant 0, \qquad \vartheta \in [0,\ u_m] \tag{2.7}$$

то решение прямой задачи (2.1), (2.2) всегда единственно, т. е. в реакторе произвольной длины l при любом a существует единственный стационарный режим.

При малых ϑ функция $\chi(\vartheta) < 0$, поэтому условие (2.7) равносильно отсутствию у $\chi(\vartheta)$ корней (действительных) нечетной кратности.

Так, например, в классическом случае, когда

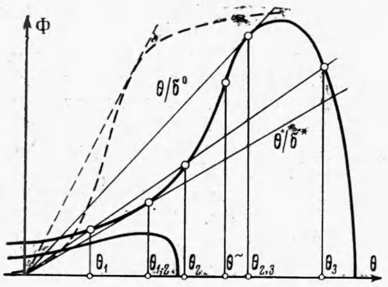
$$\varphi(\vartheta) = h(u_m - \vartheta)\exp[\vartheta / (1 + b_0\vartheta)] \quad (b_0 = RT_- / E,\ \ T^0 = RT_-^2 / E) \tag{2.8}$$

корнями функции $\chi(\vartheta)$ будут

$$\vartheta = [u_m - 2b_0 \pm (u_m - 4b_0u_m - 4)^{1/2}][2(b_0^2u_m - 1)]^{-1} \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует, что если $u_m \leqslant 4 / (1 - 4b_0)$, то $\chi(\vartheta)$ не имеет корней нечетной кратности, т. е. решение прямой задачи будет в данном случае единственным.

Уравнение $\chi(\vartheta) = 0$ эквивалентно относительно ϑ системе $\varphi(\vartheta) = A\vartheta$, $d\varphi / d\vartheta = A$, определяющей касательные к кривой $\varphi(\vartheta)$, проходящие через начало координат, причем касание в точке перегиба отвечает корням четной кратности. Поэтому для единственности стационарных режимов достаточно отсутствие лучей из начала координат, пересекающих кривую $\varphi(\vartheta)$ более чем в одной точке. (Так для случая (2.8) имеем фиг. 1.) Последнее можно интерпретировать так: тепловыделение в каждом сечении реактора определяется функцией $\varphi(\vartheta)$, а теплоотвод (в подаваемую смесь) грубо можно считать пропорциональным ϑ. Поэтому число возможных стационарных состояний реактора будет тогда не более максимального числа точек пересечения, которое может иметь кривая $\varphi(\vartheta)$ с лучом из начала координат.



Фиг. 1

В случае $\varphi(\vartheta) \leqslant 0$ условие постоянства знака у функции $\chi(\vartheta)$ при $\vartheta \in [u_m, 0]$, эквивалентное условию (2.7), и все вытекающие из него условия также будут достаточными для единственности прямой задачи (2.1), (2.2). Проведенный анализ при этом полностью сохраняется, только $u_m < 0$, $u_m \leqslant \leqslant u \leqslant 0$, $p \leqslant 0$.

3. Рассмотрим теперь случай, когда функция $\varphi(u\gamma)$ в (2.1) может менять знак. Это имеет место, например, для реакторов с теплоотводом. К задаче (2.1), (2.2) приводит здесь отыскание стационарных режимов в случае реакции нулевого порядка (когда, например, не учитывается убывание активных веществ по длине реактора, что помогает оценить условия, при которых заведомо не будет происходить воспламенения), а также в случае подобия полей C и T (что предполагает непрерывный подвод реагентов и частичный отвод продуктов реакции через стенки). При этом используется одномерная модель, т. е. предполагается, что либо имеется идеальное поперечное перемешивание, либо теплоотвод производится непосредственно от зоны реакции [1, 2], либо производится осреднение уравнений по поперечной координате [1, 7]. Подобная задача для полубесконечной камеры ($l = \infty$) рассматривалась в [7]. В данном случае ее можно записать в виде

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{p - \psi(\theta)}{ap}, \qquad \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{1}{p}, \qquad \psi(\theta) = \Phi(\theta) - \frac{\theta}{\delta} \tag{3.1}$$

$$\theta = \theta_+,\ p = 0,\ \xi = 0; \qquad \theta = ap + \theta_-,\ \xi = -l, \tag{3.2}$$

$$(\theta = (T - T_0) / T^0,\ \Phi(\theta) = \tau F(T) / \rho C T^0,\ 1 / \delta = \alpha S \tau / \rho c$$

$$\theta_+ = (T_+ - T_0) / T^0,\ \theta_- = (T_- - T_0) / T^0,\ T^0 = RT_0^2 / E,\ 1 / \tau = F(T_0) / \rho c T^0)$$

Здесь T_0 — температура на теплоотводящей поверхности, S — площадь последней в единице объема слоя, α — эффективный коэффициент теплоотдачи, $F(T) \geqslant 0$ — скорость тепловыделения, R — универсальная постоянная, E — энергия активации.

Обычно, например, в случае аррениусовой зависимости скорости химической реакции от T, функция $\Phi(\theta)$ имеет вид, показанный на фиг. 1 (вид $\Phi(\theta)$ для реакции нулевого порядка нанесен пунктирной линией в сильно уменьшенном масштабе). Поэтому предположим для простоты, что

$$\Phi''(\theta) > 0 \text{ при } \theta < \theta^{\sim}, \quad \Phi''(\theta) < 0 \text{ при } \theta > \theta^{\sim}$$
$$|\Phi'(\theta)| < \infty; \quad \lim \theta^{-1}\Phi(\theta) = 0 \text{ при } \theta \to \infty$$

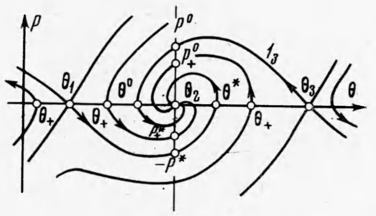
(в случае подобия T и C будет $\Phi(\theta_m) = 0$, $\theta < \theta_m$).

Тогда при $\delta^0 < \delta < \delta^*$ функция $\psi(\theta)$ имеет три корня $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ (фиг. 1), причем корни θ_1, θ_3 уменьшаются вместе с δ, а θ_2 увеличивается, и наоборот. При $\delta < \delta^0$ будет один корень θ_1, а при $\delta > \delta^*$ — корень θ_3. Критические значения δ^0 и δ^* и соответствующие им точки $\theta_{2,3}$ и $\theta_{1,2}$ слияния корней θ_2, θ_3 и θ_1, θ_2 определяются из уравнений

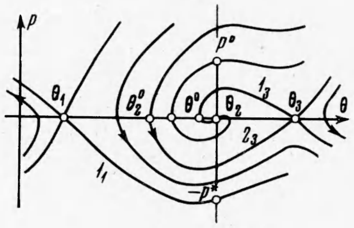
$$\psi(\theta, \delta) = 0, \quad d\psi / d\theta = 0 \tag{3.3}$$

Если (3.3) не имеет положительных корней, то у $\psi(\theta)$ при любых δ будет только один корень.

Положим, что в плоскости θp кривые идут в сторону уменьшения ξ ($d\xi = d\theta/p < 0$). Тогда всякая кривая, выходящая из точки $\theta = \theta_+$, $p = 0$ (будем обозначать ее просто θ_+) и пересекающая прямую $\theta = \theta_- + ap$ при некотором $\theta = \theta_0$, обеспечит, очевидно, решение обратной (θ_+ задано, l неизвестно) задачи (3.1), (3.2), и обратно. (θ_0 будет значением θ на входе в слой).



Фиг. 2



Фиг. 3

В верхней полуплоскости движение по кривым происходит справа налево ($p > 0$, откуда $d\theta < 0$), а в нижней — наоборот. Точки θ_1, θ_2, θ_3 ($p = 0$) особые. Исследование поведения кривых в окрестности этих точек показывает [7], что θ_1 и θ_2 — седла, а θ_2 — либо узел (при $4a\psi'(\theta_2) \leqslant 1$), либо фокус (при $4a\psi'(\theta_2) > 1$). При этом в точку θ_2 кривые входят, и, следовательно, решений с $\theta_+ = \theta_2$ не существует (за исключением неустойчивого тривиального решения $\theta \equiv \theta_2$ при $\theta_- = \theta_2$). Из точек θ_1 и θ_3 выходит по две ветви, а из точек $\theta_+ \neq \theta_n$ ($n = 1, 2, 3$) — по одной ветви кривой, дающих в окрестности этих точек

$$p = \operatorname{sign}\psi_+ \sqrt{\psi_+/a}\, |\theta_+ - \theta|^{1/2}, \quad \xi = -\sqrt{2a/\psi_+}\, |\theta_+ - \theta|^{1/2}, \quad \psi_+ = \psi(\theta_+), \quad \theta_+ \neq \theta_n$$
$$p = k(\theta_+ - \theta), \quad \xi = -\infty \quad (0 < k < \infty), \quad \theta_+ = \theta_1, \theta_3 \tag{3.4}$$

Пусть $\delta^0 < \delta < \delta^*$, т. е. $\psi(\theta)$ имеет три корня. Тогда, как показано в [7], выходящие из θ_1 и θ_3 кривые l_1 и l_3 (фиг. 2—4) пересекают ось θ в точках θ^* и θ^0 соответственно. Возможны три случая расположения этих точек, определяющие вид поля интегральных кривых:

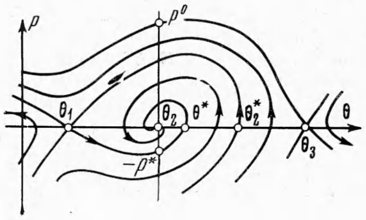
1. $\theta_2 \leqslant \theta^* \leqslant \theta_3$, $\theta_1 \leqslant \theta^0 \leqslant \theta_2$ (фиг. 2)
2. $\theta^* = \infty$, $\theta^0 > \theta_1$ (фиг. 3)
3. $\theta^* < \theta_3$, $\theta^0 = -\infty$ (фиг. 4)

В [7] получены приближенные оценки для значений θ^* и θ^0, из которых следует, что случай 1 имеет место при любых a, если $Q = 0$ (что равносильно $\delta = \delta_0$), и при $a < a^*(\delta)$, если $Q \neq 0$ (a^* уменьшается с ростом Q). Если $a > a^*$, то при $Q < 0$ ($\delta < \delta_0$) будет случай 2, а при $Q > 0$ ($\delta > \delta_0$) — случай 3. Здесь

$$Q = \int_{\theta_1}^{\theta_3} \psi(\theta)\, d\theta, \quad \delta_0 = \frac{1}{2}(\theta_3^2 - \theta_1^2)\left[\int_{\theta_1}^{\theta_3} \Phi(\theta)\, d\theta\right]^{-1} \tag{3.5}$$

Кривая, выходящая из точки $\theta_+ < \theta_1$, аналогично левой ветви кривой, выходящей из θ_1 [7], идет все время влево в верхней полуплоскости. Поэтому, если $\theta_- \leqslant \theta_+$, то она всегда пересечет прямую $\theta = \theta_- + ap$ при некотором $\theta = \theta_0 < \theta_+$ (причем один раз, так как $-\infty < dp \mathbin{/} d\theta < 1/a$, при $\theta \leqslant \theta_1$, $p > 0$, согласно (3.1)). Значение $\xi(\theta)$ монотонно уменьшается вдоль кривой, начиная от $\xi = 0$ при $\theta = \theta_+$. Поэтому

1) всегда найдется единственное значение длины реактора $l = -\xi(\theta_0, \theta_+) \geqslant \geqslant 0$, при котором будет существовать режим с любыми заданными $\theta_+ \leqslant \theta_1$ и $\theta_- \leqslant \theta_+$, т.е. обратная задача (3.1), (3.2) имеет в области $\theta_+ \leqslant \theta_1$ единственное решение при $\theta_- \leqslant \theta_+$;



Фиг. 4

2) при произвольном заданном $l \leqslant l_+^0$ всегда найдется единственное $\theta_- \leqslant \theta_+$, при котором существует режим с любым заданным $\theta_+ \leqslant \theta_1$ (l_+^0 — длина, соответствующая здесь заданному θ_+ и $\theta_- = -E \mathbin{/} RT_0$). Как будет видо из дальнейшего, с увеличением θ_+ величина l_+^0 увеличивается, стремясь при приближении θ_+ к θ_1 к бесконечности.

Согласно (3.4) $l = \infty$ при $\theta_+ = \theta_1$ и $l = 0$ при $\theta_+ = \theta_-$. Поскольку решение задачи будет, очевидно, непрерывно зависеть от θ_+, то значения $l(\theta_+, \theta_-)$, соответствующие заданному $\theta_- \leqslant \theta_1$ при различных $\theta_+ \in [\theta_-, \theta_1]$ сплошь заполняют отрезок $[0, \infty]$. Следовательно, для произвольно заданных $l \geqslant 0$ и $\theta_- \leqslant \theta_1$ всегда будет существовать режим с $\theta_+ \in [\theta_-, \theta_1]$. Покажем, что такой режим может быть только один. Для этого сделаем в (3.1), (3.2) следующую замену переменных:

$$u = (\theta - \theta_-) \mathbin{/} \gamma, \quad p = p \mathbin{/} \gamma, \quad \gamma = (\theta_+ - \theta_-) \mathbin{/} (\theta_1 - \theta_-) \quad (0 \leqslant \gamma \leqslant 1, \ \theta_- \leqslant \theta \leqslant \theta_1) \tag{3.6}$$

Тогда задача (3.1), (3.2) сведется к виду (2.1), (2.2). При этом

$$\varphi(u\gamma) = \psi(u\gamma + \theta_-) > 0, \quad u_m = \theta_1 - \theta_- \quad (0 < u < u_m) \tag{3.7}$$

$$\chi(\vartheta) = \vartheta\psi'(\vartheta + \theta_-) + \psi(\vartheta + \theta_-) = \chi_0(\theta) = (\theta - \theta_-)\psi'(\theta) - \psi(\theta) \quad (\vartheta = u\gamma)$$

Отсюда $\chi_0(\theta_-) \leqslant 0$, $\chi_0(\theta_1) \leqslant 0$ и $\chi_0'(\theta) = (\theta - \theta_-)\,\Phi''(\theta) \geqslant 0$ при $\theta_- \leqslant \theta \leqslant \theta_1$, поскольку $\theta_1 < \tilde{\theta}$.

Следовательно, $\chi_0(\theta) \leqslant 0$ на всем отрезке $\theta_- \leqslant \theta \leqslant \theta_1$, т. е. $\chi(\vartheta) \leqslant 0$ ($0 \leqslant \vartheta \leqslant u_m$), и согласно п.2 решение прямой задачи в области $\theta_+ \leqslant \theta_1$ при $\theta_- \leqslant \theta_1$ единственно.

Аналогично получаем, что как обратная, так и прямая задачи (3.1), (3.2) имеют в области $\theta_+ \in [\theta_3, \theta_-]$ единственное решение при $\theta_- \geqslant \theta_3$.

Кривая $p(\theta, \theta_+)$, выходящая из точки $\theta_+ \in (\theta_1, \theta_2)$ аналогично правой ветви кривой, выходящей из θ_1 [7], идет вправо в нижнюю полуплоскость, пересекает прямую $\theta = \theta_2$ в точке $p = -p_+^*$, и так как $dp \mathbin{/} d\theta > 1 \mathbin{/} a$ при $\theta_2 < \theta < \theta_3$, $p < 0$, то в случаях 1, 3 (фиг. 2, 4) она обеспечивает решение только для $\theta_- \in [\theta_+, \theta_2 + ap_+^*]$. При этом, как следует из фиг. 2, 4, если $p_+^* \neq 0$, то при $\theta_- > \theta_2 - ap_+^{**}$ пересечение прямой $\theta = \theta_- + ap$ происходит несколько раз (p_+^{**} — второе пересечение с прямой $\theta = \theta_2$). Иными словами, для $\theta_+ \in [\theta_1, \theta_2]$, $\theta_- \in [\theta_1, \theta_2 + ap_+^*]$ обратная задача всегда существует, причем для $\theta_- \in [\theta_2 - ap_+^{**}, \theta_2 + ap_+^*]$ единственность ее нарушается за счет решений, проходящих один или несколько раз через значение $\theta = \theta_2$. Величины θ (при θ_-, достаточно близких к θ_2) или p в них теряют монотонность, поэтому такие решения будем называть колеблющимися. Можно показать из качественных соображений, что они будут, по-видимому, неустойчивы. Решения, не проходящие через θ_2, условимся называть монотонными.

Случай 2 (фиг. 3) отличается в этой области тем, что для $\theta_+ \in [\theta_1, \theta_2^0]$ и при $\theta_- > > \theta_2 + ap_+^*$ существует одно решение, проходящее через $\theta = \theta_2$ и $\theta = \theta_3$ (колеблющееся).

Так же как и раньше, в рассматриваемой области при любом заданном $l \leqslant l_+^0$ всегда найдется единственное значение θ_-, при котором существует единственный монотонный режим с любым заданным значением $\theta_+ \in [\theta_1, \theta_2]$ (l_+^0 отвечает здесь заданному θ_+ и $\theta_- = \theta_2 + ap_+^*$, т. е. $l_+^0 = -\xi(\theta_2, \theta_+)$).

Аналогично предыдущему получаем, что монотонные решения прямой задачи в области $\theta_+ \in [\theta_1, \theta_2]$ существуют при $\theta_- \in [\theta_1, \theta_2]$ для произвольного l и при $\theta_- \in [\theta_2, \theta_2 + ap^*]$ только для $l > l_-^0$ (l_-^0 — наименьшее значение $l(\theta_+, \theta_-)$ для кривых с θ_+ из рассматриваемого интервала, пересекающих прямую $\theta = \theta_- + ap$, т. е. в данном случае, у которых $p_+^* > (\theta_2 - \theta_-) \mathbin{/} a$).

Сделав в (3.1), (3.2) замену (3.6), придем к задаче (2.1), (2.2).

При $\theta_- \in [\theta_1, \theta_2]$ имеем

$$\chi_0(\theta_1) \geqslant 0,\ \chi_0(\theta_-) \geqslant 0;\ \chi_0' \leqslant 0 \text{ при } \theta_1 < \theta < \theta_-, \text{ если } \theta_- \leqslant \theta^{\sim};$$

$$\chi_0' \leqslant 0 \text{ при } \theta_1 < \theta < \theta^{\sim},\ \chi_0' \geqslant 0 \text{ при } \theta^{\sim} < \theta < \theta_2, \text{ если } \theta_- > \theta^{\sim}$$

Поэтому если $\theta_- \leqslant \theta^{\sim}$ или $\theta_- > \theta^{\sim}$, но $\chi_0(\theta^{\sim}) \geqslant 0$, т. е. согласно (3.7) $\theta_- \leqslant \theta_-^0$ ($\theta_-^0 > \theta^{\sim}$), где

$$\theta^0_- = \theta^{\sim} - \psi(\theta^{\sim}) / \psi'(\theta^{\sim}), \tag{3.8}$$

то $\chi_0(\theta) \geqslant 0$ ($\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_-$). Если же $\theta_- > \theta_-^0$, то $\chi_0(\theta)$ имеет два корня.

При $\theta_- \in [\theta_2, \theta_2 + ap^*]$ функция $\chi_0(\theta)$ (3.7) изменяется в интервале $[\theta_1, \theta_2]$, так как здесь всегда $\theta_0 \leqslant \theta_2$. При этом $\chi_0(\theta_1) > 0$, $\chi_0(\theta_2) \leqslant 0$, т. е. $\chi(\theta)$ при $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ имеет один корень.

Следовательно, согласно п. 2, если $\theta^{\sim} \geqslant \theta_2$ или $\theta_-^0 \geqslant \theta_2$, то при $\theta_- \in [\theta_1, \theta_2]$, а в противном случае при $\theta_- \in [\theta_1, \theta_-^0]$ прямая задача имеет в области $\theta_+ \in [\theta_1, \theta_2]$ единственное монотонное решение.

При $\theta_- \in [\theta_-^0, \theta_2]$, если $\theta^{\sim} < \theta_-^0 < \theta_2$, а также при $\theta_- \in [\theta_2, \theta_2 + ap]$, $l > l_-^0$ она имеет одно или несколько таких решений, причем из качественных соображений п.2 следует, что в первом случае их будет не более трех, а во втором — не более двух.

Аналогичные результаты получаются для области $\theta_+ \in [\theta_2, \theta_3]$.

За неимением места здесь не приводятся приближенные оценки для p^* и p_+^*, а также для соответствующих им значений p^0 и p_+^0 в области $\theta_+ \in [\theta_2, \theta_3]$ (фиг. 2—4), которые получаются аналогично оценкам для θ^0 и θ^* [7]. Отметим только, что эти значения растут с увеличением a, размера соответствующего интервала и величины $|\psi(\theta)|$ на нем.

Если функцию $\psi(\theta)$ можно представить на рассматриваемых интервалах в виде степенных рядов, то значения p^* и p^0 получаются в виде рядов по целым степеням $(\theta_2 - \theta_1)$ и $(\theta_3 - \theta_2)$ соответственно (надлежащим выбором T^0 можно добиться, чтобы последние были меньше единицы), а p_+^* и p_+^0 в виде рядов по степеням $|\theta_2 - \theta_+|^{1/2}$.

Таким образом, окончательно для $\delta^0 < \delta < \delta^*$ имеем следующее:

При $\theta_- < (\theta_1, \theta_2 - ap^0)$, т. е. при $\theta_- < \theta_1$, если $\theta_1 < \theta_2 - ap^0$ и при $\theta_- < \theta_2 - ap^0$, если $\theta_2 - ap^0 < \theta_1$, а также при $\theta_- > (\theta_3, \theta_2 + ap^*)$ в реакторе произвольной длины l всегда существует единственный монотонный режим, причем $\theta_+ \in [\theta_-, \theta_1]$ и $\theta_+ \in [\theta_3, \theta_-]$ соответственно.

При $\theta_- \in [\theta_1, \theta_2 - ap^0]$ если $\theta_1 < \theta_2 - ap^0$, а также при $\theta_- \in [\theta_2 - ap^0, \theta_2]$, если $l < l^0_-$ существуют монотонные режимы только с $\theta_+ \in [\theta_1, \theta_-]$. Аналогично при $\theta_- \in [\theta_2 + ap^*, \theta_3]$, если $\theta_3 > \theta_2 + ap^*$ и при $\theta_- \in [\theta_2, \theta_2 + ap^*]$, если $l < l^0_-$, — режимы только с $\theta_+ \in [\theta_-, \theta_3]$. При этом, если θ^0_- попадает в интервал между $\theta^{\sim}$ и θ_2, то при $\theta_- \in [\theta^0_-, \theta_2]$ не исключена возможность существования нескольких (не более трех) таких режимов. В остальных случаях указанные режимы единственны.

В случае $a > a^*(\delta)$ в реакторах достаточно большой длины при $\theta_- < \theta_2 - ap^0$, если $\delta_0 < \delta < \delta^*$ (фиг. 4), и при $\theta_- > \theta_2 + ap^*$, если $\delta^0 < \delta < \delta_0$ (фиг. 3), имеются еще и колеблющиеся решения с $\theta_+ \in [\theta^*_2, \theta_3]$ и $\theta_+ \in [\theta_1, \theta^0_2]$ соответственно (δ_0 из (3.5)). В остальных упомянутых выше случаях существуют только монотонные режимы.

При $\theta_- \in [\theta_2 - ap^0, \theta_2 + ap^*]$ для $l \geqslant l^0_-$ (l^0_- уменьшается при приближении θ_- к θ_2, так что $l^0_- = 0$ при $\theta_- = \theta_2$) возможны одновременно монотонные режимы с $\theta_+ < (\theta_2, \theta_-)$ и с $\theta_+ > [\theta_2, \theta_-]$, а при $\theta_- = \theta_2$ еще и неустойчивый тривиальный режим $\theta \equiv \theta_2$. Причем при $\theta_- \in [\theta_2 - ap^0, \theta_2]$ режимов с $\theta_+ > \theta_2$, а при $\theta_- \in [\theta_2, \theta_2 + ap^*]$ режимов с $\theta_+ < \theta_2$ будет один или несколько (из качественных соображений не более двух). Режим же с $\theta_+ < \theta_-$ при $\theta_- \in [\theta_2 - ap^0, \theta_2]$ и с $\theta_+ > \theta_-$ при $\theta_- \in [\theta_2, \theta_2 + ap^*]$ единствен, за исключением случая, когда θ^0_- попадает в интервал между $\theta^{\sim}$ и θ_2, а θ_- — между θ^0_- и θ_2, при котором можно ожидать нескольких (из качественных соображений не более трех) указанных режимов.

Значение $\theta_- = \theta_2 + ap^*$ можно назвать здесь температурой зажигания, поскольку это максимальная температура подаваемой смеси, при которой может еще осуществляться режим с $\theta_+ < \theta_2$. При возрастании θ_- станет возможным уже только режим с $\theta_+ > \theta_- > \theta_2 + ap^*$. Аналогично $\theta_- = \theta_2 - ap^0$ можно назвать температурой гашения.

Наряду с монотонными решениями в рассматриваемом интервале θ при достаточно большом l могут быть еще и колеблющиеся решения с $\theta_+ \in [\theta_1, \theta_3]$, проходящие один или несколько раз через значение θ_2. Возможность их увеличивается при приближении θ_- к θ_2 и возрастании a. Из качественных соображений следует, что эти решения будут неустойчивы и приведут к одному из монотонных режимов [7].

Пусть теперь $\delta < \delta^0$, либо $\delta > \delta^*$, либо система (3.3) не имеет решений. Тогда $\psi(\theta)$ имеет только один положительный корень θ_1 (или θ_3), и аналогично предыдущему получаем, что в реакторах произвольной длины l при любых a и θ_- существуют стационарные режимы только с θ_+, расположенными в интервале между θ_- и θ_1 (θ_- и θ_3).

Причем при $\delta^{\sim} < \delta < \delta^0$, $\theta_- > \theta^0_-$ ($\delta^{\sim} = 1/\Phi'(\theta^{\sim}) < \delta^0$, а $\theta^0_- > \theta^{\sim}$ из (3.8)), при $\delta > \delta^*$, $\theta_- < \theta^0_-$ (где $\theta^0_- < \theta^{\sim}$), а когда (3.3) не имеет корней, при $\delta > \delta^{\sim}$, $\theta_- < \theta^0_-$ (где $\theta_-^0 < (0, \theta^{\sim})$) возможен один или несколько (из качественных соображений до трех) указанных режимов. В остальных случаях они единственны.

Таким образом, наиболее часто используемый в химической технологии низкотемпературный режим, при котором максимальная температура θ_+, достигаемая на выходе из слоя, не превышает θ_1, существует в реакторах произвольной длины при $\delta \leqslant \delta^*$, $\theta_- \leqslant \theta_1$, причем $\theta_+ \in [\theta_-, \theta_1]$. Если $\delta^0 < \delta < \delta^*$ и $\theta_2 - ap^0 < \theta_1$, то при $\theta_- \in [\theta_2 - ap^0, \theta_1]$ в реакторах длины $l \geqslant l^0$ наряду с одним низкотемпературным режимом существуют еще и высокотемпературные (из качественных соображений не более двух) режимы с $\theta_+ \in [\theta_2, \theta_3]$. В остальных случаях низкотемпературный режим единствен, если не считать колеблющихся решений с $\theta_+ \in [\theta^*_2, \theta_3]$, возможных в реакторах достаточно большой длины при $a > a^*(\delta)$, $\delta_0 < \delta < \delta^*$, где $\delta_0 > \delta^0$ из (3.5). Если система (3.3) не имеет корней, то для любого δ при $\theta_- \leqslant \theta_1$ существует только режим с $\theta_+ \leqslant \theta_1$. С ростом δ величина θ_1 монотонно увеличивается.

С уменьшением a, а также при достаточно малых l или δ область неединственности решений сокращается. Так, распространяя результаты, полученные в [6], на рассматриваемую задачу, можно утверждать, что, если

$$\Phi'(\theta^{\sim}) < 1/\delta + 1/4 \cdot 1/a \quad \text{или} \quad \Phi'(\theta^{\sim}) < 1/\delta + 1/l$$

то при любой исходной температуре θ_- подаваемой смеси в реакторе существует единственный стационарный режим.

Поступила 20 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе И. И., Письмен Л. М. Инженерная химия гетерогенного катализа. М., «Химия», 1965.
2. Арис Р. Анализ процессов в химических реакторах. М., «Химия», 1967.
3. Бесков Е. С., Кузин В. А., Слинько М. Г. Моделирование химических процессов в неподвижном слое катализатора. Хим. пром., 1965, № 1.
4. Зеленяк Т. И. О стационарных решениях смешанных задач, возникающих при изучении некоторых химических процессов. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 2.
5. Raymond L. R., Amundson N. R. Some observation on tubular reactor stability. Can J. Chem. Egng., 1964, vol. 42, No. 4.
6. Luss D., Amundson N. R. Uniqueness of the steady state solutions for chemical reaction occuring in a catalyst particle or in a tubular reactor with axial diffussion. Chem. Engng. Sci., 1967, vol. 22, No. 3.
7. Чернова Э. А. О стационарных режимах горения с учетом теплоотвода. ПМТФ, 1967, № 4.

О ПРИБЛИЖЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЯ УДАРНОЙ АДИАБАТЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ В АТМОСФЕРЕ КРУПНЫХ МЕТЕОРНЫХ ТЕЛ

А. К. Станюкович

(Москва)

В данной работе описывается приближенный метод определения параметров ударной волны, образующейся при движении метеорного тела в атмосфере с большой сверхзвуковой скоростью, при помощи обычных формул газовой динамики с предварительным определением эффективного показателя адиабаты, учитывающего энергетические потери на диссоциацию и ионизацию воздуха.

Основное уравнение [1] для прямого скачка уплотнения, в предположении, что энергетические потери имеют только тепловой характер, в системе, где летящее тело покоится, имеет вид

$$E_1 - E_2 = {}^1/_2\,(p_2 + p_1)\,(V_1 - V_2) + Q \qquad (1)$$

Здесь E_1, V_1, p_1 — соответственно внутренняя энергия, удельный объем и давление перед фронтом ударной волны; E_2, V_2, p_2 — то же за фронтом ударной волны; Q — энергетические потери на диссоциацию и ионизацию воздуха.

При больших сверхзвуковых скоростях движения можно пренебречь величинами E_1 и p_1. Учитывая, что $E_2 = C_v T_2 = P_2 V_2 / (k - 1)$, получим уравнение вида

$$\frac{p_2 V_2}{k - 1} = \frac{p_2}{2}(V_1 - V_2) + Q \qquad (2)$$

где $K = 1.41$ — показатель адиабаты для воздуха до ударной волны.