

СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

Мишель И. Жаффрен, Рональд Ф. Пробстейн

(Кембридж, США)

Исследуется структура ударной волны в полностью ионизованной плазме; рассматривается характер взаимодействия возникающего электрического поля с потоком. Ударную волну такого типа, в которой газодинамические явления сочетаются с электрическими, будем называть электро-газодинамической ударной волной. Правильное представление о поведении таких ударных волн имеет значение при изучении взаимодействия заряженного тела с ионосферой, электростатических колебаний в тлеющих разрядах высокой плотности, взаимодействий околосолнечного плазменного ветра с магнетосферой, а также при изучении электростатических датчиков для сверхзвуковых потоков высокой плотности.

Плазма предполагается ниже полностью ионизованной, состоящей из электронов и однократно заряженных ионов; рассматривается случай стационарной одномерной ударной волны в отсутствие каких-либо внешних электрических или магнитных полей.

Анализ структуры ударной волны проводится на основе дваждыкостного варианта теории сплошной среды, когда в качестве «модели» берутся уравнения Навье — Стокса с добавочными членами за счет влияния электрического поля, и эти уравнения записываются отдельно для электронной и ионной жидкостей. При обычном анализе структуры ударной волны в нейтральном газе такая задача, по определению, относится к области динамики разреженного газа, так как толщина волны имеет порядок нескольких длин среднего свободного пробега. Поэтому очевидно, что для ее решения лучше всего использовать методы кинетической теории. Однако хорошо известно, что уравнения Навье — Стокса дают прекрасную модель кинетических уравнений и приводят к достаточно правильным оценкам средних величин, характеризующих поток. В данном случае общая ширина области ударного перехода оказывается значительно больше характерной длины среднего свободного пробега. На этом основании можно ожидать, что любые изменения параметров потока, описываемые моделью Навье — Стокса в рассматриваемом увеличенном масштабе длин, будут еще ближе к истине, чем в случае нейтрального газа. Впрочем, внутри этой широкой области перехода существуют ударные волны, в которых переход совершается на расстояниях, сравнимых с местной длиной среднего свободного пробега. В таких областях также используется модель Навье — Стокса для описания средних значений не только параметров потока, но и электрических параметров.

Одно из наиболее ранних исследований, тесно примыкающее к данной работе, было проведено Джуксом [1], который при помощи численного интегрирования уравнений Навье — Стокса поперек ударной волны для дваждыкостной модели рассчитал распределения скорости и температуры. Он пренебрегал разделением заряда и наличием электрического поля, так что его решение справедливо в предельном случае, когда отношение дебаевского радиуса λ_D к соответствующему столкновительному среднему свободному пробегу l стремится к нулю. Кроме того, он пренебрегал электронной вязкостью и ионной теплопроводностью, которые могут играть важную роль в некоторых областях. Примерно в то же время и пользуясь аналогичной моделью, Шафранов [2] показал, что если ударная волна не является слабой, то решение может быть приближенно охарактеризовано ионной ударной волной, заключенной внутри области постоянной электронной температуры, которой предшествует сравнительно широкая область термической ударной волны, где электронная температура поднимается до предельного значения вниз по потоку от разрыва. Он не исследовал, однако, ни структуры внутренней ударной волны, ни электрических эффектов.

Влияние разделения зарядов и самоиндукционного электрического поля исследовалось Гринбергом и его сотрудниками [3,4]. Однако эти авторы считали ионную и электронную температуры одинаковыми и пренебрегали влиянием вязкости и теплопроводности, сохраняя в качестве единственного механизма диссипации обмен количеством движения между ионами и электронами. Как будет показано ниже,

такой подход является некорректным, так как обмен количеством движения и электронная теплопроводность играют важную роль в одной и той же области. Вследствие пренебрежения вязкостью эти авторы получают разрывные решения, если не считать случая слабых ударных волн. В последнем случае для скорости, температуры, напряженности электрического поля и степени разделения заряда были получены решения колебательного типа. Было установлено, что толщина ударной волны имеет порядок дебаевского радиуса λ_D при условии $\lambda_D \gg l$ (неправдоподобная ситуация) и пропорциональна столкновительному среднему свободному пробегу во всех остальных случаях, тогда как длина волны вышеупомянутых колебаний приблизительно равна $10\lambda_D$. Ли и Мэтью [8] отказались от условия равенства ионной и электронной температур, но пользовались в основном той же моделью, что Гринберг и др., получив аналогичные результаты.

В исследований Джука и Ли и Мэтью рассматриваются два противоположных предельных случаев. Первый из этих авторов принимает во внимание только механизмы вязкости и теплопроводности в плазме, тогда как два других автора пренебрегают этими факторами, учитывая только эффекты диффузии и электрического поля. Настоящая работа ставит своей целью заполнить просвет между этими существенно различными решениями путем учета вязкости, теплопроводности и электрических эффектов во всем неограниченном диапазоне изменения чисел Маха и отношений среднего свободного пробега к дебаевскому радиусу.

1. Основные уравнения и параметры. В рамках предложенной здесь модели для каждого типа частиц, т. е. для ионов и электронов, имеются три обычных уравнения сохранения массы, количества движения и энергии. Напряженность электрического поля, единственной компонентой которой, отличной от нуля, является E_x , подчиняется уравнению Пуассона

$$dE_x / dx = 4\pi e(n_i - n_e) \quad (1.1)$$

Здесь e — величина заряда электрона, x — осевое расстояние, n — числовая плотность, а индексы i и e обозначают ионы и электроны соответственно.

Плотность тока j_x обращается в нуль, так что, в соответствии с равенством $j_x = (n_i u_i - n_e u_e)e$, имеем $n_i u_i = n_e u_e$. Поэтому, интегрируя уравнения сохранения массы для одномерного установившегося движения электронов и ионов, получим одинаковые постоянные интегрирования C , приходя к соотношениям

$$n_e u_e = C, \quad n_i u_i = C \quad (1.2)$$

Уравнение количества движения для электронов может быть записано в форме (см., например, работу Бюргерса [6])

$$m_e n_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{dp_e}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\mu_e'' \frac{du_e}{dx} \right) + n_e e E_x = P_{ei} \quad (1.3)$$

Здесь величина P_{ei} характеризует перенос продольной компоненты количества движения от ионов к электронам, μ'' — коэффициент продольной вязкости, а u , m и p — скорость, масса частицы и давление соответственно. Можно было бы написать аналогичное уравнение для ионов, заменив индекс e на индекс i , а величину P_{ei} на P_{ie} — характеристику продольного переноса количества движения от электронов к ионам.

Уравнение энергии для электронов имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \frac{d}{dx} (P_e u_e) - \frac{d}{dx} \left(\kappa_e \frac{dT_e}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left(\bar{u}_e \bar{\mu}_e'' \frac{du_e}{dx} \right) + n_e u_e e E_x + \\ + \frac{m_e}{2} n_e u_e \frac{du_e^2}{dx} = \xi_{ei} + u_e P_{ei} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь символом ξ_{ei} обозначается перенос кинетической энергии от ионов к электронам, T — абсолютная температура и κ — коэффициент теплопроводности. Соответствующее уравнение для ионов можно снова получить отсюда путем простой перестановки индексов. Основная система урав-

нений замыкается уравнениями состояния для обеих жидкостей; для электронов это уравнение записывается как

$$p_e = n_e k T_e \quad (1.5)$$

Если считать коэффициенты диссипации и параметры переноса известными функциями искомых переменных, то уравнения (1.1)–(1.5) и аналогичные уравнения для ионов составят систему из девяти уравнений с девятью неизвестными u_a , n_a , T_a , p_a и E_a , где $a = i$ или e . Однако уравнения неразрывности и состояния будут алгебраическими и их число равно четырем, так что задача может быть сведена к решению системы пяти дифференциальных уравнений с соответствующими пятью неизвестными.

При оценке коэффициентов диссипации будем предполагать, что связь между обычным коэффициентом вязкости μ и классическим вторым коэффициентом вязкости определяется соотношением Стокса. Коэффициенты вязкости μ и теплопроводности κ для частиц ионизованного газа были рассчитаны в первом приближении Чепменом и Каулингом [7]. Используя результат Спитцера [8] о том, что дебаевский радиус — надлежащий параметр обрезания при столкновении, получим

$$\mu'' = \frac{4}{3} \mu = \frac{5}{6} \left(\frac{m}{\pi} \right)^{1/2} \frac{(kT)^{5/2}}{e^4 \ln \Lambda}, \quad \Lambda = \frac{3}{2e^3} \left(\frac{k^3 T^3}{\pi n} \right)^{1/2} \quad (1.6)$$

Коэффициент теплопроводности дается формулой

$$\kappa = \frac{5}{2} \mu c_v = \frac{45k}{16m} \mu'' \quad (1.7)$$

Здесь k — постоянная Больцмана, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Параметр Спитцера $\ln \Lambda$ имеет величину порядка 10 и при выводе приведенного выше соотношения считался большим в сравнении с единицей. Кроме того, эта величина весьма медленно изменяется в зависимости от температуры T , так что величины μ'' и κ оказываются приблизенно пропорциональными $T^{5/2}$. Приведенные здесь результаты справедливы только для газа, состоящего из частиц одного рода. Как видно из простого правила для смесей, коэффициент вязкости бинарной плазмы остается тем же, а в выражение для коэффициента теплопроводности входит числовой коэффициент, несколько отличающийся от приведенного выше.

Отметим, что при одинаковых температуре и плотности отношение электронного коэффициента вязкости к ионному равно корню квадратному из отношения массы электрона к массе иона

$$\frac{\mu_e''}{\mu_i''} = \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} = \varepsilon \quad (1.8)$$

Эта формула будет использована в процессе проводимого здесь анализа.

Величина ε — очень малое число, равное $1/43$ для водорода и еще меньшее — для всех других газов. Соответствующее отношение электронной теплопроводности к ионной теплопроводности равно ε^{-1} . Поэтому когда градиенты ионной и электронной скоростей имеют одинаковый порядок величины, то преобладающую роль играет ионная вязкость, а если градиенты ионной и электронной температур оказываются величинами одного порядка, то преобладающее влияние получает электронная теплопроводность. Отсюда следует, что плазменное число Прандтля примерно пропорционально $c_{pi} \mu_i'' / \kappa_e$ и имеет порядок ε .

Бюргерс (см. [6], стр. 156) рассчитал значения параметров переноса количества движения и энергии за счет столкновений между ионами и электронами в случае произвольно отличающихся температур и скоростей. Параметр переноса количества движения и кинетической энергии от частицы s к частице t представляет собой

функцию отношения скорости диффузии $u_s - u_t$ к характерной скорости распространения возмущений $a = (2kT_s/m_s + 2kT_t/m_t)^{1/2}$, а это отношение, как можно показать, имеет порядок ϵ .

Пользуясь условием $\epsilon \ll 1$, можно получить упрощенное выражение параметра переноса продольной составляющей количества движения вдоль оси x в виде

$$P_{st} = \frac{4A(u_s - u_t)}{3\pi^{1/2}\alpha^3}, \quad A = -\frac{4\pi n_s n_t (m_s + m_t) e^4 \ln \Lambda}{m_s m_t} \quad (1.9)$$

при наличии соотношения

$$\xi_{st} + u_{st} P_{st} = \frac{4A}{3\pi^{1/2}\alpha^3 (m_s + m_t)} [3k(T_s - T_t) + (u_s - u_t)(u_t m_s + u_s m_t)] \quad (1.10)$$

Если заменить индексы s и t последовательно на i , e и e , i , становится ясно, что

$$P_{ie} + P_{ei} = 0, \quad \xi_{ie} + u_i P_{ie} + \xi_{ei} + u_e P_{ei} = 0 \quad (1.11)$$

Поэтому после сложения уравнений количества движения для ионов и электронов правые части взаимно уничтожаются и при помощи уравнения Пуассона (1.1) получаемое уравнение может быть один раз проинтегрировано по x , давая уравнение количества движения для плазмы

$$C(m_i u_i + m_e u_e) + n_i k T_i + n_e k T_e - \mu_i'' \frac{du_i}{dx} - \mu_e'' \frac{du_e}{dx} - \frac{E_x^2}{8\pi} = P \quad (1.12)$$

Поступая таким же образом с двумя уравнениями энергии, получим

$$C \left(m_i \frac{u_i^2}{2} + m_e \frac{u_e^2}{2} \right) + \frac{5}{2} C k (T_i + T_e) - \mu_i'' u_i \frac{du_i}{dx} - \mu_e'' u_e \frac{du_e}{dx} - \kappa_i \frac{dT_i}{dx} - \kappa_e \frac{dT_e}{dx} = H \quad (1.13)$$

Постоянные интегрирования P и H определяются по условиям в невозмущенном потоке.

Здесь уместно отметить, что ионно-ионный средний свободный пробег между столкновениями связан с коэффициентом продольной вязкости для ионов соотношением [1]

$$l = \frac{\mu_i''}{(2\gamma k T_i m_i)^{1/2} n_i} = \left(\frac{5}{24\pi} \right)^{1/2} \frac{(k T_i)^2}{e^4 n_i \ln \Lambda} \quad (1.14)$$

Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей, равное $5/3$ для однодатомного газа, а μ_i'' определено формулой (1.6).

В данной работе считается, что характерным свободным пробегом является именно ионно-ионный средний свободный пробег. В отличие от среднего свободного пробега обычных нейтральных частиц пробег l подвержен очень сильному влиянию температуры. Учитывая, что перепад температур при переходе через сильную ударную волну возрастает пропорционально квадрату числа Маха, отношение ионно-ионных свободных пробегов при переходе через эту волну будет возрастать пропорционально четвертой степени числа Маха невозмущенного потока. Следовательно, средний свободный пробег в плазме за сильной ударной волной значительно больше среднего свободного пробега в невозмущенной плазме.

Другая длина, имеющая значение для задачи, это дебаевский радиус λ_D , который характеризует электрические эффекты и представляет собой то расстояние, на котором имеет место ощутимое разделение заряда

$$\lambda_D = \left(\frac{kT}{4\pi n e^2} \right)^{1/2} \quad (1.15)$$

Здесь n выражается в см^{-3} , e — в электрических единицах, а λ_D — в см .

Перепад дебаевских радиусов в ударной волне возрастает пропорционально первой степени числа Маха, так что отношение λ_D / l , определяющее отношение электрических эффектов к столкновительным, при переходе через ударную волну уменьшается пропорционально кубу числа Маха. Кроме того, для большинства видов плазмы это отношение всегда остается малым по сравнению с единицей.

Плазменное число Маха M , которое характеризует интенсивность ударной волны, определяется выражением

$$M^2 = \frac{m_i u_i^2 + m_e u_e^2}{\gamma_i k T_i + \gamma_e k T_e} \approx \frac{m_i u_i^2}{2 \gamma k T_i} \quad (1.16)$$

где приближенное равенство справедливо в случае $T_i = T_e$ и $\gamma_i = \gamma_e = \gamma$. Ударная волна будет существовать только тогда, когда плазменное число Маха больше единицы. Ионная и электронная скорости звука равны соответственно $\sqrt{k T_i / m_i}$ и $\sqrt{k T_e / m_e}$. Следовательно, при $T_i = T_e$ плазменное число Маха M связано с ионным числом Маха M_i и электронным числом Маха M_e соотношениями

$$M = \frac{M_i}{2^{1/2}} = \frac{M_e}{2^{1/2}} \quad (1.17)$$

В тех случаях, когда плазменное число Маха больше единицы, ионный поток является сверхзвуковым, тогда как электронный поток остается дозвуковым вплоть до плазменных чисел Маха порядка тридцати.

2. Безразмерные уравнения и граничные условия. Система уравнений, с которой нам предстоит иметь дело, состоит из уравнения Пуассона (1.1), двух уравнений неразрывности (1.2), уравнений количества движения и энергии для электронов, получаемых из (1.3) и (1.4) с приведенными впоследствии выражениями параметров переноса, и, наконец, уравнений количества движения и энергии для плазмы (1.12) и (1.13).

На бесконечном удалении вверх по потоку ($x \rightarrow -\infty$) и вниз по потоку ($x \rightarrow +\infty$) все градиенты обращаются в нуль, и система уравнений сводится к условиям Гюгонио. Отметим, что по обе стороны от ударной волны ионы и электроны имеют одинаковую скорость, числовую плотность и температуру, а электрическое поле исчезает.

Толщина ударной волны есть в общем случае некоторая функция средневзвешенной величины средних свободных пробегов вверх и вниз по потоку (в дальнейшем все величины, относящиеся к состоянию вверх по потоку, будут обозначаться индексом 1, а к состоянию вниз по потоку — индексом 2). В случае сильных ударных волн средний свободный пробег вниз по потоку намного больше среднего свободного пробега вверх по потоку, поэтому существенно характерной длиной для толщины ударной волны и для осевого расстояния будет l_2 .

Термодинамическое состояние вниз по потоку от сильной ударной волны не зависит от состояния вверх по потоку, поэтому нормализацию искомых переменных предпочтительнее проводить по отношению к их значениям за волной (индекс 2). На этом основании положим

$$\omega = \frac{u_i}{u_2}, \quad v = \frac{n_i}{n_2}, \quad \tau = \frac{T_i}{T_2}, \quad \omega_e = \frac{u_e}{u_2}, \quad v_e = \frac{n_e}{n_2}, \quad \sigma = \frac{T_e}{T_2} \quad (2.1)$$

Необходимые безразмерные электрические переменные

$$E = \frac{e E_x \lambda_{D_2}}{k T_2}, \quad \delta = \frac{n_i - n_e}{n_2} = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_e}, \quad \Phi^\circ = \frac{e \Phi}{k T_2} \quad (2.2)$$

Здесь δ — безразмерная степень разделения заряда, а Φ — истинный электрический потенциал в v .

Наконец, независимая переменная приводится к безразмерной форме путем отнесения к толщине ударной волны, так что

$$\xi_s = x / \Delta_s \quad (2.3)$$

Как отмечалось, логарифм Спирцера $\ln \Lambda$ медленно изменяется при изменениях температуры и плотности, так что с хорошей степенью приближения его можно считать постоянным по толщине ударной волны. Так, в выражениях для коэффициентов переноса можно положить $\ln \Lambda \approx \ln \Lambda_2$. При этом допущении коэффициенты вязкости и теплопроводности можно выразить в безразмерных переменных (2.1) при помощи формул (1.6) — (1.8) соответственно. Так,

$$\mu_i'' = \mu_{i_2}'' \tau^{5/2}, \quad \mu_e'' = \mu_{e_2}'' \sigma^{5/2} = \varepsilon \mu_{i_2}'' \sigma^{5/2}, \quad \mu_{i_2}'' = n_2 l_2 (10/3 k T_2 m_i)^{1/2} \quad (2.4)$$

$$\kappa_i = \kappa_{i_2} \tau^{5/2}, \quad \kappa_e = \kappa_{e_2} \sigma^{5/2} = \kappa_{i_2} \sigma^{5/2} / \varepsilon \quad (\kappa_{i_2} = 45/16 k m_i^{-1} \mu_{i_2}'') \quad (2.5)$$

Отметим, что величина характерно ионно-ионного свободного пробега вниз по потоку от ударной волны определяется из (1.14) путем замены n_i на n_2 и T_i на T_2 , тогда как соответствующая величина дебаевского радиуса определяется из (1.15) путем такой же замены. Плазменное число Маха вниз по потоку от ударной волны выражается формулой (1.16) при $2\gamma = 10/3$, $T_i = T_2$ и $u_i = u_2$.

Используя безразмерные обозначения согласно формулам (2.1) — (2.3), выражения коэффициентов переноса — по (2.4) и (2.5), а также описанные выше характерные длины и пренебрегая затем такими членами порядка ε^2 , как кинетическая энергия электронов, но сохраняя такие члены порядка ε , как члены, связанные с электронной вязкостью, найдем, что основные безразмерные уравнения могут быть представлены в следующем виде.

Уравнение Пуассона [из (1.1)]

$$\frac{dE}{d\xi_s} = \frac{\Lambda_s}{\lambda_{D_2}} \delta \quad (2.6)$$

Уравнения неразрывности [из (1.2)]

$$\omega v = \omega_e v_e = 1 \quad (2.7)$$

Уравнение количества движения для плазмы [из (1.12)]

$$\begin{aligned} & \frac{5l_2}{3\Delta_s} M_2 \left(\tau^{5/2} \frac{d\omega}{d\xi_s} + \varepsilon \sigma^{5/2} \frac{d\omega_e}{d\xi_s} \right) = \\ & = \frac{5}{3} M_2^2 (\omega - 1) + \frac{\sigma + \tau}{2\omega} - 1 - \frac{\delta\sigma}{2} - \frac{E^2}{4} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнение энергии для плазмы [из (1.13)]

$$\begin{aligned} & \frac{9l_2}{16M_2\varepsilon\Delta_s} \left(\sigma^{5/2} \frac{d\sigma}{d\xi_s} + \varepsilon \tau^{5/2} \frac{d\tau}{d\xi_s} \right) = \\ & = \frac{M_2^2}{3} (\omega^2 - 1) + \frac{\sigma + \tau}{2} - 1 + \frac{2l_2 M_2}{3\Delta_s} \left(\omega \tau^{5/2} \frac{d\omega}{d\xi_s} + \varepsilon \omega_e \sigma^{5/2} \frac{d\omega_e}{d\xi_s} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнение количества движения для электронов [из (1.3)]

$$\frac{d}{d\xi_s} \frac{\sigma}{\omega_e} - \frac{10M_2\varepsilon l_2}{3\Delta_s} \frac{d}{d\xi_s} \left(\sigma^{5/2} \frac{d\omega_e}{d\xi_s} + \frac{\Delta_s E}{\lambda_{D_2} \omega_e} + 2^{1/2} \frac{10M_2\varepsilon\Delta_s\delta}{9l_2\sigma^{5/2}} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Уравнение энергии для электронов [из (1.4)]

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \frac{d\sigma}{d\xi_s} - \frac{45l_2}{16M_2\varepsilon\Delta_s} \frac{d}{d\xi_s} \left(\sigma^{5/2} \frac{d\sigma}{d\xi_s} \right) - \frac{10M_2l_2\varepsilon}{3\Delta_s} \frac{d}{d\xi_s} \left(\omega_e \sigma^{5/2} \frac{d\omega_e}{d\xi_s} \right) + \\ + \frac{\Delta_s}{\lambda_{D_2}} E + 2^{1/2} \frac{\varepsilon\Delta_s}{M_2l_2\sigma^{5/2}} \left(\frac{\sigma - \tau}{\omega\omega_e} + \frac{10}{9} M_2^2 \omega \delta \right) = 0 \end{aligned}$$

Последнее при помощи уравнений (2.6) — (2.10) может быть представлено в более удобной форме

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{d\tau}{d\xi_s} - 2 \frac{d\omega}{d\xi_s} \left(-\frac{5}{3} M_2 \frac{l_2}{\Delta_s} \tau^{5/2} \frac{d\omega}{d\xi_s} + \frac{\tau}{2\omega} \right) + \\ + \frac{45l_2}{16M_2\Delta_s} \frac{d}{d\xi_s} \left(\tau^{5/2} \frac{d\tau}{d\xi_s} \right) + 2^{1/2} \frac{\varepsilon\Delta_s(\sigma - \tau)}{M_2l_2\omega\omega_e\sigma^{5/2}} \quad (2.11) \end{aligned}$$

Если вспомнить равенство $\delta = \omega^{-1} - \omega_e^{-1}$, то ясно, что уравнения (2.6) — (2.11) представляют систему из семи безразмерных уравнений [уравнения (2.7) — это два алгебраических уравнения] с семью неизвестными переменными величинами ω , ω_e , v , v_e , σ , τ и E в качестве функций независимой переменной $\xi_s = x\Delta_s$. Считая постоянную ε известной, а величину Δ_s — единицей масштаба длины, увидим, что эти уравнения содержат три параметра M_2 , l_2 и λ_{D_2} , характеризующие соответственно эффекты невязких возмущений, эффекты переноса и электрические эффекты. Если бы нормализовать переменные, относя к их значениям в точке 1, расположенной вверх по потоку от волн, то получится аналогичная система уравнений, у которой индекс 1 у параметров будет изменен на индекс 2.

Любое состояние плазмы будет характеризоваться некоторой точкой в семимерном фазовом пространстве, определяемом совокупностью искомых переменных. Состояния 1 и 2 вверх и вниз по потоку от ударной волны соответственно представляют собой особые точки системы (2.6) — (2.11), так как производные в этих точках обращаются в нуль. Координаты этих особых точек определяются условиями Гюгонио, получаемыми путем приведения нулю производных в основных уравнениях или в приведенных выше соотношениях. В частности, точка 1 имеет координаты

$$\begin{aligned} E_1 = 0, \quad \omega_1 = \omega_{e_1} = \frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_{e_1}} = \frac{3 + M_2^2}{4M_2^2} = \frac{4M_1^2}{3 + M_1^2}, \\ \sigma_1 = \tau_1 = \frac{(M_2^2 + 3)(5M_2^2 - 1)}{16M_2^2} = \frac{16M_1^2}{(M_1^2 + 3)(5M_1^2 - 1)} \quad (2.12) \end{aligned}$$

тогда как координаты точки 2 выражаются формулами

$$E_2 = 0, \quad \omega_2 = \omega_{e_2} = v_2 = v_{e_2} = 1, \quad \sigma_2 = \tau_2 = 1 \quad (2.13)$$

Здесь число Маха за ударной волной M_2 связано с числом Маха невозмущенного потока M_1 соотношением

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + 3}{5M_1^2 - 1} \quad (2.14)$$

Таким образом, при увеличении M_1 от единицы до бесконечности число M_2 уменьшается от единицы до $1/\sqrt{5}$ и, следовательно, всегда имеет порядок единицы.

Теперь, определяя порядок величины соответствующих членов безразмерных уравнений, можно оценить толщину тех ударных слоев Δ_s , в которых играют важную роль различные столкновительные эффекты. Нетрудно

видеть, что члены, определяющие перенос количества движения и энергии, имеют порядок $\varepsilon \Delta_s / l_2$, а члены, определяющие электронную теплопроводность,— порядок $l_2 / \varepsilon \Delta_s$. Поэтому если толщина ударной волны Δ_s имеет порядок l_2 / ε все указанные члены будут иметь порядок единицы. Как показывает такое рассуждение, эти формы диссипации могут расширить ударную волну до толщины порядка l_2 / ε . Аналогично этому члены, определяющие ионную вязкость и теплопроводность и имеющие коэффициенты $O(l_2 / \Delta_s)$, приводят к толщине ударной волны порядка l_2 , тогда как электронная вязкость играет важную роль в слое толщиной εl_2 . Так как ε — очень малая величина, отсюда следует, что совокупность перечисленных выше диссипативных явлений может привести к появлению трех существенно различных ударных слоев. При этом обнаруживаются только два столкновительных ударных слоя толщиной l_2 / ε и l_2 , но один из этих столкновительных слоев содержит электрический ударный слой, толщина которого имеет порядок εl_2 .

Уравнение Пуассона (2.6) и уравнение количества движения для электронов (2.10) позволяют выяснить порядок величины безразмерной напряженности электрического поля E и степени разделения заряда δ

$$E = O(\lambda_{D_2} / \Delta_s), \quad \delta = O(\lambda_{D_2}^2 / \Delta_s^2) \quad (2.15)$$

Теперь вся задача может быть сведена к интегрированию системы пяти дифференциальных уравнений в пятимерном фазовом пространстве, причем три уравнения имеют первый порядок и два — второй порядок.

Для упрощения задачи воспользуемся фактом малости отношения λ_{D_2} / l_2 (в дальнейшем рассматривается возможность снятия этого ограничения). В этом случае безразмерная напряженность электрического поля E и степень разделения заряда δ оказываются сравнительно малыми в ударных слоях толщиной l_2 / ε и l_2 , а электронная скорость ω_e будет равна ионной скорости ω с точностью до величины порядка $(\lambda_{D_2} / l_2)^2$. Поэтому предполагаем наличие квазинейтральности, полагаем $\omega_e = \omega$, а в уравнении (2.8) опускаем члены, содержащие E и δ . Тогда уравнения (2.8), (2.9) и (2.11) становятся независимыми от уравнений (2.6) и (2.10) и могут быть разрешены относительно электронной и ионной температур и ионной скорости. В свою очередь, напряженность электрического поля и степень разделения заряда вычисляются из уравнений (2.10) и (2.6).

3. Слабые ударные волны ($M_1 < 1.12$). Рассмотрим случай, когда дебаевский радиус λ_{D_2} мал в сравнении со средним свободным пробегом l_2 . Рассмотрим сначала более широкий слой толщиной l_2 / ε . Если внутри этого слоя будет иметь место разрывное решение, то на месте разрыва введем ударный слой, толщина которого на порядок меньше исходной величины; такая последовательность действий должна продолжаться до тех пор, пока не получится непрерывный переход от состояния вверх по потоку до состояния вниз по потоку. Оказывается, что эта процедура дает два основных типа структуры ударных волн в зависимости от того, будет ли число Маха невозмущенного потока M_1 больше или меньше 1.12, или, что то же, будет ли число Маха вниз по потоку от ударной волны M_2 соответственно меньше или больше $(4/5)^{1/2}$. Структура слабой ударной волны состоит из одного ударного слоя толщиной l_2 / ε , в котором важнейшими механизмами диссипации являются электронная теплопроводность и обмен энергией между ионами и электронами. Установлено, что такая особенность образования структуры, когда при числе Маха набегающего потока ниже определенного значения существует лишь один релаксационный слой, а при повышении числа Маха создается уже большее число слоев, сочетается с другими релаксационными процессами, как, например, с температурным гистерезисом.

Когда $\Delta_s = l_2 / \varepsilon$, величина ξ_s заменяется на $\xi^* \equiv \varepsilon x / l_2$. В приближении, соответствующем малому дебаевскому радиусу, пренебрегая членами порядка ε и ε^2 в уравнениях (2.8)–(2.11), получим уравнения ударного слоя

$$\begin{aligned} -\frac{5}{3} M_2^2 (1 - \omega) + 1 - \frac{\sigma + \tau}{2\omega} &= 0 \\ \frac{9}{16 M_2} \sigma^{5/2} \frac{d\sigma}{d\xi^*} &= \frac{M_2^2}{3} (\omega^2 - 1) + \frac{\sigma + \tau}{2} - 1 \\ \frac{3}{2} \frac{d\tau}{d\xi^*} &= -\frac{\tau}{\omega} \frac{d\omega}{d\xi^*} + 2^{1/2} \frac{\sigma - \tau}{M_2 \omega^2 \sigma^{3/2}} \\ E &= -\frac{\varepsilon \lambda_{D_2} \omega}{l_2} \frac{d}{d\xi^*} \left(\frac{\sigma}{\omega} \right), \quad \delta = \frac{\varepsilon \lambda_{D_2}}{l_2} \frac{dE}{d\xi^*} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Электрический потенциал может быть определен из уравнения $E_x = -d\Phi / dx$, которое после приведения к безразмерной форме и интегрирования дает

$$\Phi^\circ = -\frac{l_2}{\varepsilon \lambda_{D_2}} \int_{-\infty}^{\xi^*} E d\xi^* = \int_1^{\xi^*} \omega d \left(\frac{\sigma}{\omega} \right) \quad (3.2)$$

Первое из уравнений (3.1) может быть разрешено относительно τ , после чего получаемое соотношение можно использовать для исключения τ из второго и третьего уравнений той же системы. После этого относительно σ и ω получим два дифференциальных уравнения

$$\frac{d\sigma}{d\xi^*} = \frac{64 M_2^3}{27 \sigma^{5/2}} (\omega - 1) (\omega_1 - \omega) \quad \left(\omega_1 = \frac{3 + M_2^2}{4 M_2^2} \right) \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\xi^*} &= \left[-\frac{40}{3} M_2^2 \omega + 5 \left(\frac{5}{3} M_2^2 + 1 \right) - \frac{\sigma}{\omega} \right]^{-1} \times \\ &\times \left\{ \frac{3}{2} \frac{d\sigma}{d\xi^*} + \frac{8^{1/2}}{M_2 \omega^2 \sigma^{3/2}} \left[\sigma - \left(\frac{5}{3} M_2^2 + 1 \right) \omega + \frac{5}{3} M_2^2 \omega^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отметим, что в интервале $1 < \omega < \omega_1$ величина $d\sigma / d\xi^*$ положительна.

Далее независимая переменная ξ^* исключается путем деления обеих частей уравнения (3.3) на соответствующие части уравнения (3.4). Получаемое в результате этого дифференциальное уравнение $d\sigma / d\omega = f(\sigma, \omega)$ может быть в принципе проинтегрировано в пределах, соответствующих точкам 1 и 2; отсюда получается соотношение $\omega = \omega(\sigma)$. Если величина ω известна, то распределение электронной температуры по толщине ударной волны $\sigma(\xi^*)$ может быть найдено при помощи интегрирования уравнения (3.3), причем начало отсчета переменной ξ^* выбирается в некоторой произвольной точке вблизи точки 1. Распределение скоростей $\omega(\xi^*)$ будет определено как $\omega = \omega[\sigma(\xi^*)]$. Распределения ионной температуры, напряженности электрического поля, степени разделения заряда и потенциала могут быть найдены соответственно из первого, четвертого и пятого уравнений (3.1) и из уравнения (3.2).

Очевидно, что точки 1 и 2 соответствуют состояниям вверх и вниз по потоку от ударной волны; они будут особыми точками уравнения $d\sigma / d\omega = f(\sigma, \omega)$, определяющего поле направлений в фазовой плоскости.

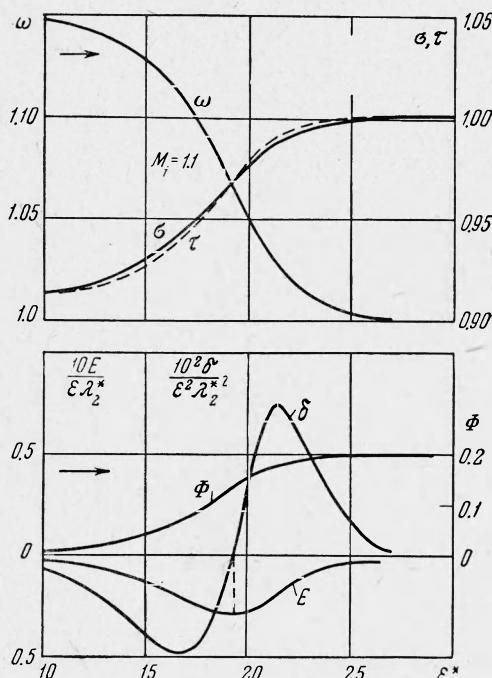
Поэтому необходимо выяснить характер поведения решения в окрестности этих особых точек и тем самым правильно определить ту точку, с которой нужно начинать численное интегрирование, а также найти наклоны кривых, соответствующих решению в особых точках.

Чтобы осуществить все это, около точек 1 и 2 надлежащим образом проводится линеаризация [9, 10].

Как установлено, точка 1 представляет собой седло, а точка 2 — узел. Кроме того, интегральная кривая в фазовой плоскости $\sigma - \omega$ непрерывна и не имеет экстремумов. Численное интегрирование проводится, начиная с седловой точки 1, по направлению к узловой точке 2, с применением метода Рунге — Кутта вплоть до разностей четвертого порядка. Следуя процедуре, описанной в начале этого пункта, получим распределения температур, скоростей, напряженности электрического поля, степени разделения заряда и потенциала по толщине ударной волны. Все эти величины были рассчитаны для числа Маха невозмущенного потока $M_1 = 1.1$ и представлены на графике фиг. 1 где $\lambda_{2^*} = \lambda_D / l_2$. Как можно видеть, электронная и ионная температуры остаются почти одинаковыми внутри ударной волны и плазма ведет себя как однокомпонентная жидкость, имея лишь один релаксационный ударный слой. Толщина ударной волны, определяемая по максимальному градиенту ионной скорости, оказывается равной $7l_2 / e$. Напряженность электрического поля и степень разделения заряда обнаруживают колебательный характер изменения с очень малой амплитудой, и их характеристические безразмерные значения равны соответственно $-0.03 \varepsilon \lambda_D / l_2$ и $0.007 (\varepsilon \lambda_D / l_2)^2$. С другой стороны, перепад потенциала поперек ударной волны не зависит от λ_{D2} / l_2 , и его характерное безразмерное значение приближенно равно 0.2.

4. Ударные волны умеренной интенсивности и сильные ударные волны ($M_1 > 1.12$). При

$M_1 > 1.12$, или, что то же, при $M_2 < (4/5)^{1/2}$, по-прежнему существует термический ударный слой, толщина которого приближенно равна l_2 / e и описание которого дается уравнениями (3.1) и (3.2). В этом слое электронная температура повышается, достигая своего предельного значения вниз по потоку, тогда как изменения ионной температуры и скорости оказываются сравнительно малыми. Однако внутри этого первого слоя имеется второй ударный слой, имеющий толщину порядка ионно-ионного среднего свободного пробега между столкновениями вдоль вниз по потоку $l_2 \ll l_2 / e$. В этом втором слое диссиляция осуществляется за счет ионной вязкости и ионной теплопроводности, так что совокупность обоих слоев может быть описана как ионная ударная волна, заключенная внутри термической ударной волны. Для рассматриваемых здесь ударных волн, имеющих умеренную или большую интенсивность, диссилятивные факторы термического слоя оказываются недостаточными для увеличения толщины ударной волны, и требуются другие диссилятивные факторы, например ионная вязкость. Явление «динамической ударной волны внутри термической ударной волны» характерно для жидкостей с нулевым числом Прандтля [11]. Можно ожидать, что такое же явление, надлежащим образом модифици-



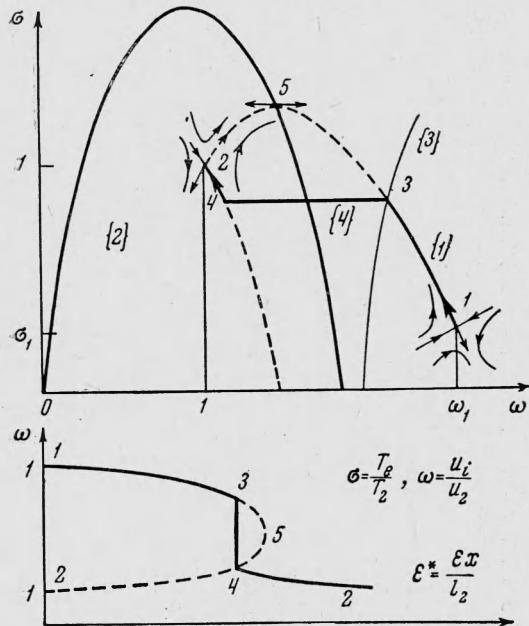
Фиг. 1

рованное для случая конечной толщины, имеет место и в плазме, где число Прандтля очень мало (например, в данном случае оно имеет порядок ε).

Факт существования внутренней ионной ударной волны можно видеть из решения в фазовой плоскости σ , ω , показанного на фиг. 2. В случае $M_2 < (4/5)^{1/2}$ из характеристического уравнения видно, что обе точки 1 и 2 являются седловыми. Интегральная кривая, выходящая из точки 1 в надлежащем характеристическом направлении, имеет максимум в точке 5, где она пересекается с изоклиной нулевого угла наклона, представляющей собой параболу с уравнением

(4.1)

$$\sigma = -\frac{40}{3}M_2^2\omega^2 + 5\omega(\frac{5}{3}M_2^2 + 1)$$



Фиг. 2

(2.8), (2.9) и (2.11) членами порядка ε , получим следующие уравнения, служащие для описания структуры внутреннего или ионного ударного слоя:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}M_2\tau^{5/2}\frac{d\omega}{d\xi} &= \frac{5}{3}M_2^2(\omega - 1) + \frac{\sigma + \tau}{2\omega} - 1 \\ \frac{9\sigma^{5/2}}{16M_2\omega}\frac{d\sigma}{d\xi} &= \frac{M_2^2}{3}(\omega^2 - 1) + \frac{\sigma + \tau}{2} - 1 \\ \frac{3}{2}\frac{d\tau}{d\xi} &= -2\frac{d\omega}{d\xi}\left(-\frac{5}{3}M_2\tau^{5/2}\frac{d\omega}{d\xi} + \frac{\tau}{2\omega}\right) + \frac{45}{16M_2}\frac{d}{d\xi}\left(\tau^{5/2}\frac{d\tau}{d\xi}\right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Второе из этих уравнений свидетельствует, что производная $d\sigma/d\xi$ имеет порядок ε . Следовательно, электронная температура σ повышается главным образом в термическом слое и остается почти постоянной внутри тонкого ионного ударного слоя. На этом основании полагаем $\sigma = \sigma_3 = \sigma_4$.

При постоянном σ третье из уравнений (4.2) интегрируется один раз при помощи первого из тех же уравнений, что приводит к результату

$$\frac{45\tau^{5/2}}{16M_2}\frac{d\tau}{d\xi} = 2\omega\left(\frac{5}{3}M_2^2 + 1\right) - \frac{5}{3}M_2^2\omega^2 + \frac{3}{2}\tau - \sigma_3 \ln \omega - F \quad (4.3)$$

Постоянная интегрирования F может быть определена из граничных условий в точках 3 или 4.

и приходит в точку 2, имея характеристическое направление, соответствующее положительному корню. Точка 2 на этой интегральной кривой достигается при $\xi^* \rightarrow -\infty$, т. е. на бесконечном удалении вверх по потоку. Соответствующее распределение скоростей $\omega(\xi^*)$, показанное на этой фигуре, имеет вид профиля двузначной формы. Ясно, что подобное решение неприемлемо, и вместо него необходимо взять разрывное решение 1—3—4—2: выйдя из точки 1 вдоль интегральной кривой {1}, решение делает скачок из точки 3 в точку 4 и попадает в точку 2 по другой интегральной кривой {2}. Разрыв между точками 3 и 4 характеризует ионный ударный слой толщиной l_2 (линия {4}).

Если $\Delta_s = l_2$, величина ξ_s заменяется на $\xi = x/l_2$, то, пренебрегая в уравнениях

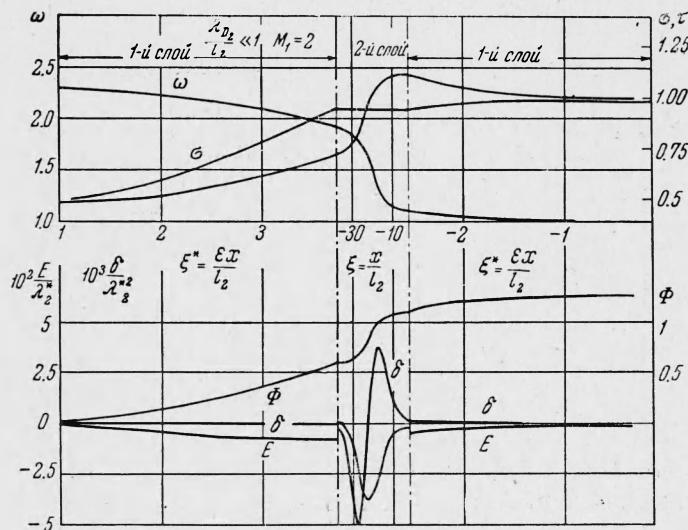
Соотношения Гюгонио для ионной ударной волны, при помощи которых определяются концевые точки, могут быть выведены путем приравнивания нулю производных в первом из уравнений (4.2) и в уравнении (4.3). Если из двух получаемых таким образом уравнений исключить τ и определить постоянную F по условиям в точке 4, придем к условию «скакка», которому удовлетворяет скорость в точке 3

$$5\left(\frac{5}{3}M_2^2 + 1\right)(\omega - \omega_4) + \frac{20}{3}M_2^2(\omega^2 - \omega_4^2) - \sigma_3 \ln(\omega / \omega_4) = 0 \quad (4.4)$$

Введем обозначения

$$Y_1 = \sigma_3 \ln(\omega / \omega_4), \quad Y_2 = 5(\omega - \omega_4)[\left(\frac{5}{3}M_2^2 + 1\right) - \frac{4}{3}M_2^2(\omega + \omega_4)]$$

Уравнение $Y_1 = Y_2$, эквивалентное уравнению (4.4), имеет только один корень, отличный от $\omega = \omega_4$. Для каждой точки интегральной кривой {2}



Фиг. 3

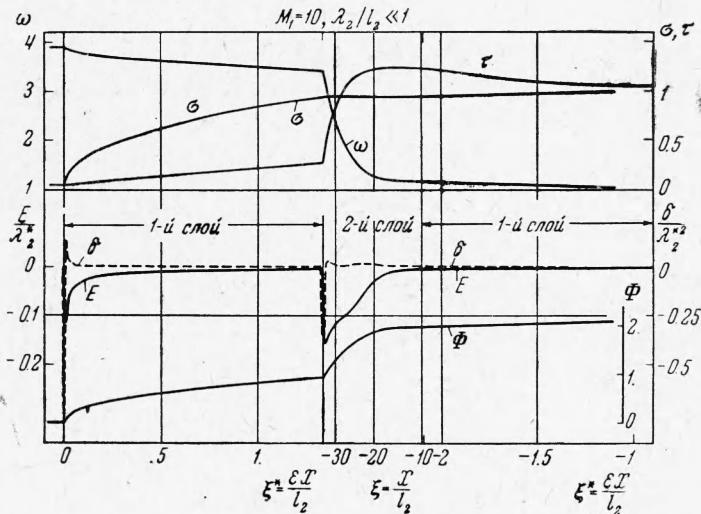
из условия скачка (4.4) вычисляется соответствующая точка 3, чтобы таким образом определить геометрическое место точек 3. Фактическое положение точки 3 определяется пересечением кривой {3}, характеризующей вышеупомянутое геометрическое место, с идущей из точки 1 интегральной кривой {1}. Это решение является единственным.

Уравнения, дающие структуру ионной ударной волны, т. е. первое уравнение (4.2) и уравнение (4.3), интегрируются таким же способом, как и уравнения термического слоя для слабой ударной волны. Оказывается, что точка 3 представляет собой узел, а точка 4 — седло. Уравнение $d\tau / d\omega = g(\tau, \omega)$ подвергается численному интегрированию между точками 4 и 3.

На фиг. 3 и 4 соответственно представлены результаты для двух чисел Маха невозмущенного потока: $M_1 = 2$ и $M_1 = 10$ при обозначении $\lambda_2^* = \lambda_{D*} / l_2$. В первом слое нагрев электронов за счет уменьшения кинетической энергии ионов происходит быстрее, чем нагрев ионов, так как теплопроводность электронов выше. Нагрев и сжатие ионов происходят преимущественно в ионной ударной волне, где, как можно видеть, ионная температура перекрывает свое значение вдалеке вниз по потоку. Однако, в силу значительно большей массы ионов последние не успевают обмениваться энергией с электронами на расстояниях нескольких длин свободного пробега, так что электронная температура не подвергается существенным изменениям. Выравнивание ионной и электронной температур происходит в расположеннном ниже по

потоку продолжении термического слоя. Как и следовало ожидать, толщина этой части термического слоя имеет порядок l_2/e . Это следует из того факта, что для обмена энергией между ионами и электронами требуется $1/e^2$ столкновений, но поскольку относительная тепловая скорость электронов в $1/e$ раз больше тепловой скорости ионов, то обмен энергией осуществляется на расстоянии порядка l_2/e . Когда число Маха велико ($M_1 = 10$), градиенты в начальной области каждого слоя оказываются значительно больше, чем для ударной волны умеренной интенсивности ($M_1 = 2$).

В противоположность изменению термодинамических параметров и параметров потока, изменение электрических параметров весьма чувстви-



Фиг. 4

тельно к числу Маха невозмущенного потока. Отметим, что поведение этих электрических параметров в ионной ударной волне описывается уравнениями

$$E = \frac{\lambda_{D_2} \sigma_3}{l_3 \omega} \frac{d}{d\xi}, \quad \delta = \frac{\lambda_{D_2}}{l_2} \frac{dE}{d\xi}$$

$$\Phi^\circ = - \int_3^1 \frac{l_2}{\lambda_{D_2}} E d\xi = - \sigma_3 \ln \frac{\omega}{\omega_3} + \Phi_3^\circ \quad (4.5)$$

Рассматривая кривые на фиг. 3, можно видеть, что в случае ударных волн умеренной интенсивности величин E , δ , и Φ° медленно изменяются в первом слое и достигают своих максимальных значений в ионной ударной волне (за исключением величины Φ° , которая остается несколько меньшей максимального значения). При этом как напряженность электрического поля E , так и степень разделения заряда δ совершают одно затухающее колебание с амплитудами $0.038 \lambda_{D_2}/l_2$ и $0.005 (\lambda_{D_2}/l_2)^2$.

Как видно из третьего уравнения системы (4.5), электроны в ионной ударной волне находятся в состоянии теплового равновесия и подчиняются распределению Больцмана

$$n_e \approx n_i = n_3 \exp [e(\Phi - \Phi_3) / kT_3] \quad (4.6)$$

Разрывы электрических параметров, заметные на фиг. 3 и 4, получились в результате приближенного решения, основанного на допущении постоянства электронной температуры в ионном ударном слое. При построении менее грубого решения эти разрывы были бы сглажены.

Если ударная волна сильная (фиг. 4), то внутри ионной ударной волны существует еще второй электрический ударный слой. Однако колебания

величин E и δ становятся асимметричными, градиенты в начальной части ионного ударного слоя возрастают, тогда как затухание идет медленно и позволяет видеть слабые следы колебаний. Симметрия восстанавливается, если кривые изменения E и δ строятся в зависимости от расстояния, отнесенного к местной длине свободного пробега. Но важнейшая характерная особенность сильных ударных волн связана с тем, что в начальной области термического слоя появляется «прекурсорный» электрический ударный слой, имеющий толщину порядка $M_1 l_1 / \epsilon$. Так как средний свободный пробег вдалеке вверх по потоку l_1 очень мал в сравнении с пробегом в области вниз по потоку l_2 , то прекурсорный электрический ударный слой оказывается значительно тоньше термического слоя. В этом прекурсорном слое ионная скорость и ионная температура остаются примерно равными своим значениям в области вверх по потоку, тогда как электронная температура резко возрастает.

Основываясь на только что обсужденных фактах и учитывая, что прекурсорный слой возникает вблизи точки 1, можно провести упрощение основных уравнений и получить приближенное аналитическое решение для прекурсорного электрического слоя. Из того, что этот слой существует вблизи расположенной вверх по потоку точки 1, становится ясной возможность нормализации всех переменных путем отнесения к соответствующим значениям вдалеке вверх по потоку. При этом обнаруживается, что критерием количественного проявления электрических эффектов служит параметр $\epsilon \lambda_{D_1} / l_1 M_1$. В случае $M_1 = 10$ величины $\epsilon \lambda_{D_1} / l_1$ и λ_{D_2} / l_2 имеют одинаковый порядок, а поэтому предположение $\lambda_{D_2} / l_2 \ll 1$ эквивалентно предположению $\epsilon \lambda_{D_1} / l_1 M_1 \ll 1$. Если обозначить штрихами переменные, приводимые к безразмерной форме путем отнесения к состоянию 1, то, как и прежде, придем к выводу, что электрическое поле E' и разделение заряда δ' сравнительно малы и в соответствующих уравнениях ими можно пренебречь.

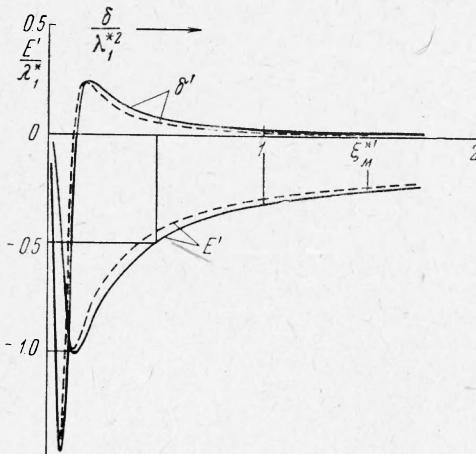
Когда число M_1 велико, можно построить приближенное аналитическое решение, основанное на оценках

$$\omega' = 1 + O(M_1^{-2}), \quad \frac{d\sigma'}{d\xi_M^{*'}} = O(M_1^2), \quad \frac{d\tau'}{d\xi_M^{*'}} = O(1) \ll \frac{d\sigma'}{d\xi_M^{*'}}, \quad \xi_M^{*'} = \frac{\epsilon x}{l_1 M_1} \quad (4.7)$$

Пользуясь вышеуказанными оценками, можно пренебречь изменением ω' и τ' по сравнению с изменением σ' ; в результате получим

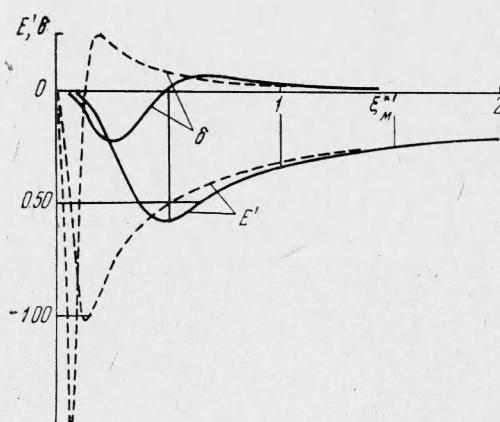
$$\begin{aligned} E' &= -\frac{\epsilon \lambda_{D_1}}{l_1 M_1} \frac{d\sigma'}{d\xi_M^{*'}} = -\frac{8\epsilon \lambda_{D_1} M_1 (\sigma' - 1)}{15 l_1 \sigma'^{5/2}} \\ \delta' &= \left(\frac{\epsilon \lambda_{D_1}}{l_1}\right)^2 \frac{32 M_1^2 (3\sigma' - 5)(\sigma' - 1)}{225 \sigma'^6} \\ \Phi^{*'} &= \frac{e\Phi}{kT_1} = \int_1^{\xi_M^{*'}} \frac{M_1 l_1}{\epsilon \lambda_{D_1}} E' d\xi_M^{*'} = \sigma' \end{aligned} \quad (4.8)$$

На фиг. 5 дается сравнение приближенного аналитического решения для прекурсорного электрического ударного слоя с точным решением. Здесь введено обозначение $\lambda_1^* = \epsilon \lambda_{D_1} / l_1$, пунктирные линии соответствуют приближенному решению. Очевидно, что эти решения хорошо согласуются одно с другим. Как следует из уравнения Пуассона, максимальная амплитуда величины E' должна соответствовать от-



Фиг. 5

существию разделения заряда, т. е. условию $\delta' = 0$, которое на основании второго из равенств (4.8) выполняется при $\sigma' = \frac{5}{3}$. Из первого равенства (4.8) можно видеть, что значение E' и, следовательно, максимальная амплитуда этой величины пропорциональны числу M_1 , тогда как анализ показывает, что этот максимум достигается на расстоянии от ударного фронта, пропорциональном величине $1/M_1^2$. Кроме того, из третьего равенства (4.8) можно видеть, что амплитуда величины δ' пропорциональна M_1^2 . При увеличении числа Маха прекурсорный ударный слой сжимается и приближается к фронту ударной волны, а амплитуда этого слоя возрастает. Поэтому прекурсорный электрический ударный слой может быть различим только при достаточно большом числе Маха, хотя он продолжает существовать и при более низких числах Маха.



Фиг. 6

ные для второго слоя, остаются неизменными, тогда как первые уравнения из (4.2) и (4.5) должны быть модифицированы с целью включения членов, зависящих от электронной вязкости. Как показывают предварительные расчеты, учет электронной вязкости не вносит существенных изменений в распределение скорости и температуры, но увеличивает амплитуду изменения электрических параметров.

Когда дебаевский радиус λ_{D_2} имеет тот же порядок величины, что и средняя длина свободного пробега l_2 , степень разделения заряда уже не будет малой и электрические параметры взаимодействуют с потоком в двух электрических ударных слоях. Как уже указывалось, при больших числах Маха отношение λ_{D_2}/l_2 имеет тот же порядок величины, что и $\epsilon\lambda_{D_1}/l_1$. Далее, если $\epsilon\lambda_{D_2}/l_2 = O(1)$, можно воспользоваться приближенными условиями для сильной ударной волны $\omega' \approx \tau' \approx 1$ и упростить три уравнения для прекурсорного электрического ударного слоя.

Затем число этих уравнений можно уменьшить на единицу, если подметить, что член $\sigma'd\delta'/d\xi_m^{**}$ меньше других, так как имеет множитель $1/M_1^2$. Если пренебречь этим малым членом, то одно из получаемых уравнений становится квадратным по отношению к δ' . Решение остающейся системы из двух дифференциальных уравнений с неизвестными E' и δ' не представляет особого труда.

На фиг. 6 представлены результаты, касающиеся изменения электрических параметров в прекурсорном электрическом слое при $\epsilon\lambda_{D_1}/l_1 = 1$ и $M_1 = 10$. Для сравнения пунктирными линиями показано также решение, полученное в предположении $\epsilon\lambda_{D_2}/l_2 \ll 1$, т. е. при отсутствии взаимосвязи между электрическими и динамическими параметрами. Обнаруживается, что наличие вышеуказанной взаимосвязи лишь незначительно изменяет профиль электронной температуры, но заметно уменьшает амплитуду напряженности электрического поля и степени разделения заряда по сравнению со случаем малого дебаевского радиуса. Разделение заряда здесь еще играет важную роль (шах $\delta = -0.21$), но существует возрастающая тенденция к нейтрализации.

Для упрощения расчет второго электрического ударного слоя был проведен без учета влияния ионной теплопроводности. Сравнение решений для ионного ударного слоя, проведенных с учетом и без учета ионной теплопроводности при $\lambda_{D_2}/l_2 \ll 1$, показало, что учет ионной теплопроводности приводит к уменьшению градиентов скорости и температуры, а также, следовательно, амплитуды изменения электрических параметров, но не влечет за собой качественного изменения структуры.

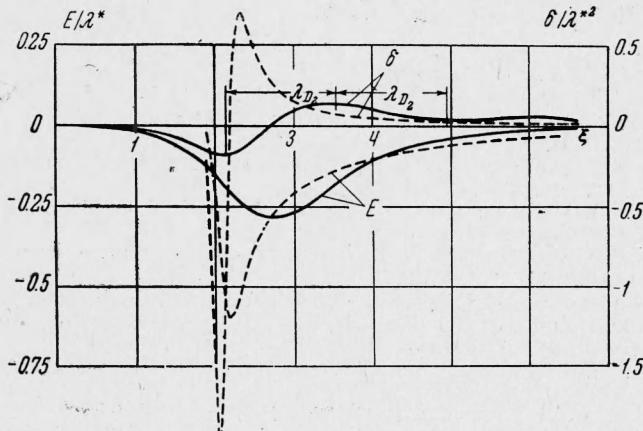
Чтобы решить уравнения второго слоя, по аналогии с прекурсорным электрическим ударным слоем принималось условие $d\delta/d\xi = 0$. При этом условии число

5. Влияние электронной вязкости и увеличенного дебаевского радиуса. Отметим, что при анализе ударных слоев толщиной l_2/ϵ и l_2 члены, зависящие от электронной вязкости и имеющие порядок $\epsilon l_2/\Delta_s$, не учитывались. Однако в случае сильных ударных волн электронная вязкость, действующая внутри слоя толщиной порядка ϵl_2 , может играть известную роль в тонком фронте второго электрического ударного слоя.

Если $\lambda_{D_2}/\epsilon l_2 \ll 1$, то уравнения, содержащие напряженность электрического поля и степень разделения заряда, могут быть решены независимо от уравнений течения даже в слое толщиной ϵl_2 . Уравнение (4.3) и второе уравнение (4.5), нуж-

одновременно решаемых дифференциальных уравнений уменьшается, и задача может быть сведена к решению уравнения вида $dE/d\omega = h(\omega, E)$, интегрируемого в плоскости ωE . Здесь обнаруживается, что точка 3 представляет собой седло, а точка 4 — узел (результат, противоположный случаю $\lambda_{D_2}/l_2 \ll 1$, когда учитывается ионная теплопроводность). Интегрирование ведется от точки 3 по направлению к точке 4.

На фиг. 7 показано распределение электрических параметров внутри второго внутреннего слоя, рассчитанное для случая $\dot{m}_1 = 10$ и $\lambda_2^* = \lambda_{D_2}/l_2 = 0.69$ ($e\lambda_{D_1}/l_1 = 1$). Для сравнения здесь показан пунктиром профиль, полученный при прибли-



Фиг. 7

женном допущении $\lambda_2^* \ll 1$ без учета ионной теплопроводности. На основании сравнения этих графиков можно прийти к тем же выводам, что и для прекурсорного ударного слоя. Кроме того, однако, отчетливо заметен колебательный характер изменения степени разделения заряда, хотя эти колебания очень быстро затухают. В этом случае роль характерной длины может играть не средний свободный пробег в области вниз по потоку, а дебаевский радиус в той же области, причем длина волны вышеупомянутых колебаний совпадает именно с дебаевским радиусом, который представляет собой точное значение длины волны, соответствующей ионной плазменной частоте. Поэтому было бы вполне логично сделать вывод, что колебательный характер кривых действительно отвечает факту наложения ионных плазменных колебаний на внутреннюю структуру ионной ударной волны.

6. Заключительные замечания. Ударная волна в полностью ионизованной плазме имеет весьма сложную структуру. Это связано с тем, что плазму следует рассматривать как смесь двух жидкостей — электронной и ионной, где электрическое поле играет роль восстанавливающей силы, которая препятствует диффузии. Как хорошо известно [12], диффузия побуждает более тяжелые частицы двигаться по направлению к области повышенного давления. Поэтому в начальной области ударной волны ионы движутся вниз по потоку быстрее, чем электроны; получаемый в результате избыток электронов создает отрицательное электрическое поле, которое, в свою очередь, отталкивает ионы назад, а электроны — вперед, так что в конце концов достигается нейтрализация заряда. В отсутствие достаточно сильной столкновительной диссипации этот механизм может привести к возбуждению колебаний [3-5]. Но если принимать во внимание ионную вязкость и теплопроводность, то обнаруживается ионная ударная волна, аналогичная ударной волне в нейтральном газе.

Малость дебаевского радиуса ($\lambda_{D_2}^* \ll l_2$) препятствует разделению заряда, но вследствие большой разницы масс ионов и электронов температуры соответствующих компонент изменяются по толщине ударной волны различным образом. Первыми нагреваются электроны, которые затем проходят через ионную ударную волну, сохранив в основном локальное тепловое равновесие. Что касается теплового равновесия между двумя компонентами, то оно достигается только вниз по потоку от ионной ударной волны. Эти результаты хорошо согласуются с результатами, которые получили Джукс [1] и В. Д. Шафранов [2].

Все электрические эффекты сосредоточиваются в ионной ударной волне, а при больших числах Маха — также и в прекурсорном электрическом ударном слое впереди этой волны. Относительная важность этих эффектов возрастает вместе с отно-

шением λ_{Dz} / l_2 и с числом Маха невозмущенного потока. Так, при $\lambda_{Dz} / l_2 = 0.69$ и $M_1 = 10$ максимальные значения E и δ оказываются равными -0.29 и -0.193 соответственно. Это значение δ_{max} соответствует местному избытку электронов, равному 53%, и суммарная электрическая сила здесь уже не является малой. Приведенные результаты можно сравнить с результатами Гринберга и др. [3-5], которые указывают на существование, практически независимо от отношения λ_D / l , очень сильных электрических полей порядка нескольких тысяч e/cm и местной степени разделения заряда порядка 50%. Такое сравнение указывает на возможное согласование данных, касающихся величины электрических эффектов при $\lambda_D / l \gg 1$; этого нельзя сказать, однако, о картине течения, которая мало зависит от величины электрических эффектов.

Поступила 28 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. J u k e s J. D. The structure of a shock wave in a fully ionized gas. *J. Fluid Mech.*, 1957, vol. 3, p. 275. (Русск. перев. в сб. «Движущаяся плазма». Изд. иностр. лит., 1961, стр. 223—240).
2. Шафранов В. Д. Структура ударной волны в плазме. *Ж. эксперим. и теор. физ.*, 1957, т. 32, стр. 1453.
3. G r e e n b e r g O. W., S e n H. K., T r ē v e Y. M. Hydrodynamic model of diffusion effects on shock structure in a plasma. *Phys. Fluids*, 1960, vol. 3, p. 379.
4. G r e e n b e r g O. W., T r ē v e Y. M. Shock wave and solitary wave structure in a plasma. *Phys. Fluids*, 1960, vol. 3, p. 769.
5. Li H., M a t h i e u R. D. Shock wave structure in a fully ionized gas based on multi-component fluid theory. Pennsylvania State University, Department of Aeronautical Engineering, Techn. Report No. 14, Sept. 1961.
6. B u r g e r s J. M. In *Plasma Dynamics* ed. by F. H. Clauer. Addison — Wesley, p. 119—186.
7. C h a p m a n S. and C o w l i n g T. G. *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. Cambridge University Press. New York, 1952, p. 217. (Русск. пер.: Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960, стр. 217).
8. S p i t z e r L. Jr. *Physics of Fully Ionized Gases*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1956, p. 86. (Русск. пер.: Спителер Л. Физика полностью ионизованного газа. Изд. иностр. лит., 1957, стр. 86).
9. M i p o r s k y N. *Introduction to non-linear mechanics*. Edwards, 1947, p. 9—23.
10. P o i n c a r é H. *Oeuvres*, tome 1, Paris, Gauthier — Villars, 1928, p. 166—181.
11. H a y e s W. D. *Gasdynamic Discontinuities*. Princeton Aeronautical Paperback. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960, pp. 44—46. (Русск. пер. см. в сб. «Основы газовой динамики» (ред. Г. Эммонс), Изд. иностр. лит., 1963, стр. 424—425).
12. C o w l i n g T. C. The influence of diffusion on the propagation of shock waves. *Philos. Mag.*, 1942, ser. 7, vol. 33, p. 61.