

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РЕШЕТОК ГИДРОТУРБИН, УДК 533.6  
ИМЕЮЩИХ МАЛУЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ НЕОДНОРОДНОСТЬ

В. Б. Курзин, С. Н. Коробейников, В. П. Рябченко, Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
630090 Новосибирск

В теории аэроупругости турбомашин хорошо известно, что введение даже малой неоднородности в решетках может привести к значительному изменению устойчивости колебаний лопастей в потоке и существенному увеличению динамических напряжений в отдельных лопастях при вынужденных колебаниях решеток. Для газовых турбомашин, собственные частоты колебаний лопастей которых слабо зависят от окружающей среды, этот вопрос достаточно хорошо изучен. Для гидротурбин исследования в данном направлении практически отсутствуют. В настоящей работе рассмотрено влияние малой геометрической неоднородности решеток гидротурбин на собственные частоты и формы их колебаний в покоящейся жидкости.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим свободные колебания решетки достаточно тонких лопастей гидротурбин, расположенной между двумя коаксиальными цилиндрами в покоящейся идеальной несжимаемой жидкости. В отличие от модели, изученной в [1], будем предполагать, что решетка имеет малую геометрическую неоднородность вследствие неточности ее изготовления и сборки.

Геометрические параметры решетки будем считать заданными. Введем однородную решетку с лопастями одинаковой толщины  $h(\mathbf{r}_{0m})$  ( $\mathbf{r}_{0m}$  — радиус-векторы точек их срединных поверхностей  $S_m^{(0)}$ ). Тогда геометрическая неоднородность рассматриваемой решетки будет полностью определяться функциями

$$\delta \mathbf{r}_m(\mathbf{r}_{0m}) = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_{0m}, \quad \delta h_m(\mathbf{r}_{0m}) = h_m(\mathbf{r}_m) - h(\mathbf{r}_{0m}). \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}_m$  — радиус-векторы соответствующих точек срединных поверхностей  $S_m$  заданных лопастей;  $h_m$  — их толщины. Малость геометрической неоднородности будем характеризовать параметром

$$\varepsilon_1 = \max\{|\delta \mathbf{r}_m|/b, |\delta h_m|/h\} \ll 1 \quad (1.2)$$

( $b$  — хорда профиля характерного сечения лопасти).

Геометрическая неоднородность решетки приводит к расстройке собственных частот колебаний лопастей, которая в реальных условиях эксплуатации турбомашин имеет место практически всегда. Как правило,

$$\max\left\{\frac{\omega_m^{(1)} - \omega^{(1)}}{\omega^{(1)}}\right\} = \varepsilon_2 \ll 1, \quad (1.3)$$

где  $\omega_m^{(1)}$  — собственная частота колебаний  $m$ -й лопасти по первой форме;  $\omega^{(1)}$  — собственная частота колебаний лопастей соответствующей однородной решетки. Введение второго малого параметра  $\varepsilon_2$  связано с тем, что порядок малости величин в соотношениях (1.2), (1.3) может быть различным.

Предполагая, что взаимодействие между лопастями осуществляется лишь через жидкость, получим матричную систему уравнений, описывающих свободные колебания лопа-

стей рассматриваемой решетки:

$$(\mathbf{C}_m - \lambda \mathbf{M}_m) \mathbf{X}_m = \lambda \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{A}_{mn} \mathbf{X}_n \quad (\lambda = \omega^2, \quad m = 0, 1, \dots, N-1). \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{X}_m$  — векторы коэффициентов аппроксимации амплитудной функции колебаний срединной поверхности  $m$ -й лопасти по некоторой системе базисных функций [1];  $\mathbf{C}_m$  и  $\mathbf{M}_m$  — матрицы жесткостей и масс;  $\mathbf{A}_{mn}$  — матрицы гидродинамических коэффициентов влияния;  $\omega$  — собственная частота колебаний решетки;  $N$  — число лопастей. Представим матрицы этого уравнения в виде

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{C} + \delta \mathbf{C}_m, \quad \mathbf{M}_m = \mathbf{M} + \delta \mathbf{M}_m, \quad \mathbf{A}_{mn} = \mathbf{A}_{mn}^{(0)} + \delta \mathbf{A}_{mn} \quad (1.5)$$

( $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{A}_{mn}^{(0)}$  — матрицы соответствующей однородной решетки). Отметим, что матрицы  $\mathbf{A}_{mn}^{(0)}$  обладают свойством цикличности [2], т. е.

$$\mathbf{A}_{mn}^{(0)} = \mathbf{L}_s, \quad (1.6)$$

где

$$s = \begin{cases} n - m & \text{для } n \geq m, \\ N + (n - m) & \text{для } n < m. \end{cases}$$

Так как значения элементов матриц  $\mathbf{C}_m$ ,  $\mathbf{M}_m$  и  $\mathbf{A}_{mn}$  являются непрерывными функциями геометрических параметров решетки, то, согласно (1.2), возмущенные составляющие этих матриц представим в виде

$$\delta \mathbf{C}_m = \varepsilon_1 \tilde{\mathbf{C}}_m, \quad \delta \mathbf{M}_m = \varepsilon_1 \tilde{\mathbf{M}}_m, \quad \delta \mathbf{A}_{mn} = \varepsilon_1 \tilde{\mathbf{A}}_{mn} \quad (1.7)$$

$$(\|\tilde{\mathbf{C}}_m\| = O(\|\mathbf{C}\|), \quad \|\tilde{\mathbf{M}}_m\| = O(\|\mathbf{M}\|), \quad \|\tilde{\mathbf{A}}_{mn}\| = O(\|\mathbf{A}_{mn}^{(0)}\|)).$$

Здесь и в дальнейшем употребляются спектральные нормы матриц, подчиненные евклидовым нормам соответствующих векторов [3]. Задача состоит в решении обобщенной проблемы собственных значений для системы уравнений (1.4).

**2. Предварительная оценка возмущений собственных значений.** Наличие малых параметров в поставленной задаче дает основание воспользоваться методом возмущений для ее решения. Однако эффективность применения этого метода зависит от числа обусловленности на собственные значения, которое определяет порядок величин возмущений искомых собственных значений по отношению к величине возмущений исходных данных. Для обобщенной проблемы собственных значений, к решению которой сведена поставленная задача, общая оценка числа обусловленности [2] является слишком грубой для того, чтобы сделать предварительное заключение о возможности применения этого метода. В самом деле, представим систему (1.4) с учетом (1.5) и (1.7) в виде одного матричного уравнения

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}) \mathbf{X} = -\varepsilon_1 (\tilde{\mathbf{B}} - \lambda \tilde{\mathbf{A}}) \mathbf{X}, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}$  — блочные, вещественные и симметрические матрицы вида

$$\mathbf{A} = \text{diag} \{ \mathbf{D}_m \}_0^{N-1} + \{ \mathbf{A}_{mn}^{(0)} \}_0^{N-1}, \quad \mathbf{D}_m = \mathbf{M},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \text{diag} \{ \tilde{\mathbf{D}}_m \}_0^{N-1} + \{ \tilde{\mathbf{A}}_{mn} \}_0^{N-1}, \quad \tilde{\mathbf{D}}_m = \tilde{\mathbf{M}}_m,$$

$$\mathbf{B} = \text{diag} \{ \mathbf{B}_m \}_0^{N-1}, \quad \mathbf{B}_m = \mathbf{C}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \text{diag} \{ \tilde{\mathbf{B}}_m \}_0^{N-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_m = \tilde{\mathbf{C}}_m.$$

Введем в рассмотрение собственные значения  $\lambda_0^{(s)}$  ( $s = 1, 2, \dots, N_1$ , где  $N_1$  — порядок

матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ) и собственные векторы  $\mathbf{X}_0^{(s)}$  задачи о свободных колебаниях соответствующей однородной решетки, когда правая часть уравнения (2.1) равна нулю. Будем считать, что значения  $\lambda_0^{(s)}$  пронумерованы в порядке возрастания. Отметим, что  $\lambda_0^{(s)}$  являются вещественными положительными числами. Введем левые собственные векторы  $\mathbf{Y}_0^{(s)}$  и нормируем их так, что

$$\mathbf{Y}_0^{(s)} = (\mathbf{X}_0^{(s)})^T, \quad \|\mathbf{X}_0^{(s)}\| = 1. \quad (2.2)$$

Тогда получим соотношения

$$\mathbf{Y}_0^{(s)} \mathbf{B} \mathbf{X}_0^{(s)} = c_0^{(s)}, \quad \mathbf{Y}_0^{(s)} \mathbf{A} \mathbf{X}_0^{(s)} = m_0^{(s)}; \quad \lambda_0^{(s)} = c_0^{(s)} / m_0^{(s)}, \quad (2.3)$$

где  $c_0^{(s)}$  определяет потенциальную энергию деформаций лопастей по форме, отвечающей  $\mathbf{X}_0^{(s)}$ , а  $m_0^{(s)}$  — обобщенную массу решетки, колеблющейся по этой же форме. Применяя теорему о среднем к интегральным выражениям этих величин, найдем, что они имеют следующую зависимость от порядкового номера соответствующей собственной частоты колебаний лопастей:

$$m_0^{(s)} = O(m_0^{(1)}), \quad c_0^{(s)} = \lambda_0^{(s)} O(c_0^{(1)}) / \lambda_0^{(1)} \quad (s = 1, 2, \dots, N_1). \quad (2.4)$$

Механический смысл указанной зависимости для  $c_0^{(s)}$  состоит в том, что потенциальная энергия элементов лопастей пропорциональна квадрату кривизны поверхностей, определяющих формы колебаний, и увеличивается с ростом номера моды колебаний.

В соответствии с [2] и с учетом (2.3) запишем общую оценку возмущений собственных значений в виде

$$|\lambda - \lambda_0^{(s)}| \leq \varepsilon_1 \|\mathbf{B}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| = \varepsilon_1 \max c_0^{(s)} / \min m_0^{(s)}. \quad (2.5)$$

Априори из (2.5) не следует, что возмущение собственных значений будет мало, так как, во-первых, существует вероятность плохой обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$ , а во-вторых, ничем не ограничено значение  $\max c_0^{(s)}$ . Согласно (2.4), с увеличением числа базисных функций  $N_1$ , аппроксимирующих деформацию лопасти, будет расти и значение  $\max c_0^{(s)}$  так, что в пределе оно будет стремиться к бесконечности.

Покажем, что для множества  $\Lambda_0$  собственных значений  $\lambda_0^{(s)}$ , отвечающих низким модам колебаний лопастей, имеет место более точная оценка, основанная на предположении (1.3).

С этой целью рассмотрим собственное значение  $\lambda^{(r)}$  системы (2.1), которое удовлетворяет условию

$$\lambda_0^{(s_0-1)} \leq \lambda^{(r)} \leq \lambda_0^{(s_0)}, \quad \lambda_0^{(s_0)} \in \Lambda_0 \quad (\lambda_0^{(0)} = 0). \quad (2.6)$$

Представим соответствующий собственный вектор  $\mathbf{X}^{(r)}$  линейной комбинацией векторов  $\mathbf{X}_0^{(s)}$ :

$$\mathbf{X}^{(r)} = \sum_{s=1}^{N_1} \alpha_s^{(r)} \mathbf{X}_0^{(s)}, \quad \|\mathbf{X}^{(r)}\| = 1. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.1) и умножая левую часть (2.1) на вектор  $\mathbf{Y}_0^{(s)}$ , с учетом (2.3) получим

$$\alpha_s^{(r)} \lambda_r^{(s)} = \varepsilon_1 \left( \frac{\tilde{c}_0^{(s)}}{c_0^{(s)}} - \frac{\lambda^{(r)}}{\lambda_0^{(s)}} \frac{\tilde{m}_0^{(s)}}{m_0^{(s)}} \right), \quad (2.8)$$

где  $\lambda_r^{(s)} = (\lambda(r) - \lambda_0^{(s)})/\lambda_0^{(s)}$ ;  $\hat{c}_0^{(s)} = \mathbf{Y}_0^{(s)} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{X}(r)$ ;  $\tilde{m}_0^{(s)} = \mathbf{Y}_0^{(s)} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{X}(r)$ .

Так как значения  $\hat{c}_0^{(s)}$  и  $\tilde{m}_0^{(s)}$  являются непрерывными функциями параметров геометрической неоднородности решетки  $\delta h_m$  и  $\delta r_m$ , то в линейном приближении их можно разбить на две составляющие:

$$\hat{c}_0^{(s)} = \hat{c}_h^{(s)} + \hat{c}_\alpha^{(s)}, \quad \tilde{m}_0^{(s)} = \tilde{m}_h^{(s)} + \tilde{m}_\alpha^{(s)}.$$

Здесь  $\hat{c}_h^{(s)}$ ,  $\hat{c}_\alpha^{(s)}$  — возмущенные составляющие потенциальной энергии деформации решетки, первая из которых зависит лишь от параметра неоднородности  $\delta h_m$ , а вторая — от  $\delta r_m$ ;  $\tilde{m}_h^{(s)}$  — возмущенная составляющая обобщенной массы решетки, зависящая от  $\delta h_m$ ;  $\tilde{m}_\alpha^{(s)}$  — возмущенная составляющая присоединенной массы жидкости, которая возникает из-за неоднородности решетки по параметру  $\delta r_m$ . Из условия (1.3) с учетом (2.8) следует

$$2\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 \left| \frac{\hat{c}_h^{(1)}}{\hat{c}_0^{(1)}} - \frac{\lambda^{(1)} \tilde{m}_h^{(1)}}{\lambda_0^{(1)} m_0^{(1)}} \right|, \quad 2\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 \left| \frac{\hat{c}_\alpha^{(1)}}{\hat{c}_0^{(1)}} - \frac{\lambda^{(1)} \tilde{m}_\alpha^{(1)}}{\lambda_0^{(1)} m_0^{(1)}} \right|. \quad (2.9)$$

Из (1.2) с учетом (1.7) находим  $\tilde{m}_h^{(1)}/m_0^{(1)} \leq 1$ . Для возмущенной составляющей присоединенной массы при условии (1.2) имеет место оценка  $\tilde{m}_\alpha^{(1)}/m_0^{(1)} = O(1)$ .

Учитывая оценки для  $\tilde{m}_h^{(1)}$  и  $\tilde{m}_\alpha^{(1)}$ , с помощью неравенств (2.9) получим

$$\tilde{m}_0^{(1)}/m_0^{(1)} = O(1), \quad \hat{c}_0^{(1)}/c_0^{(1)} = O(\varepsilon)/\varepsilon_1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (2.10)$$

Из интегральных выражений для соответствующих точных значений  $\tilde{m}_0^{(s)}$  и  $\hat{c}_0^{(s)}$  запишем соотношения, аналогичные (2.4):

$$|\tilde{m}_0^{(s)}| = O(|\tilde{m}_0^{(1)}|), \quad |\hat{c}_0^{(s)}| = \frac{c_0^{(s)}}{c_0^{(1)}} O(|\hat{c}_0^{(1)}|). \quad (2.11)$$

Учитывая (2.10) и (2.11), из (2.8) для  $s \leq s_0$  имеем

$$a_s^{(r)} \lambda_r^{(s)} = O(\varepsilon). \quad (2.12)$$

Умножая (2.1) слева на вектор  $\tilde{\mathbf{Y}}^{(r)} = (\tilde{\mathbf{A}}^{(r)})^T$ , находим

$$\sum_{s=1}^{N_1} (\alpha_s^{(r)})^2 \hat{c}_0^{(s)} \lambda_r^{(s)} = \varepsilon_1 (\hat{c}^{(r)} - \lambda^{(r)} \tilde{m}^{(r)}), \quad (2.13)$$

где  $\hat{c}^{(r)} = \mathbf{Y}^{(r)} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{X}(r)$ ;  $\tilde{m}^{(r)} = \mathbf{Y}^{(r)} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{X}(r)$ . Аналогично (2.4) и (2.11) из интегральных выражений соответствующих точных значений  $\hat{c}^{(r)}$  и  $\tilde{m}^{(r)}$  следует

$$|\tilde{m}^{(r)}| = O(|\tilde{m}_0^{(1)}|), \quad |\hat{c}^{(r)}| = \frac{c_0^{(r)}}{c_0^{(1)}} O(|\hat{c}_0^{(1)}|). \quad (2.14)$$

Разделив (2.13) на  $c_0^{(r)}$ , с учетом (2.4), (2.6), (2.10), (2.11) и (2.14) получим

$$\sum_{s=s_0}^{N_1} (\alpha_s^{(r)})^2 \lambda_r^{(s)} < \sum_{s=1}^{s_0-1} (\alpha_s^{(r)})^2 \lambda_r^{(s)} + O(\varepsilon). \quad (2.15)$$

Для оценки суммы правой части (2.15) разобьем ее на две составляющие:

$$\Pi_1 = \sum_{s=1}^{s_1} (\alpha_s^{(r)})^2 \lambda_r^{(s)}, \quad \Pi_2 = \sum_{s=s_1+1}^{s_0-1} (\alpha_s^{(r)})^2 \lambda_r^{(s)}.$$

Значение  $s_1$  в этих выражениях выбираем из условия  $\lambda_r^{(s_1)} = a \gg \varepsilon$ . Применяя к  $\Pi_2$  неравенство Гёльдера, с помощью (2.12) и с учетом (2.2), (2.7) запишем

$$\Pi_1 = \frac{s_1}{a} O(\varepsilon^2), \quad \Pi_2 = \sqrt{s_2} O(\varepsilon). \quad (2.16)$$

Здесь  $s_2$  — число элементов множества

$$\mathbf{R}_2 = \{\lambda_0^{(s)} : (\lambda_0^{(s_0)} - \lambda_0^{(s)})/\lambda_0^{(s)} \leq a\}_{s=s_1+1}^{s_0-1}. \quad (2.17)$$

Будем предполагать, что  $s_2$  невелико. Тогда при условии

$$s_1 \leq a/\varepsilon \quad (2.18)$$

из (2.15) с учетом (2.16) получим оценку

$$\min_s |\lambda_r^{(s)}| = O(\varepsilon), \quad r \leq s_1 + s_2. \quad (2.19)$$

Таким образом, для множества

$$\Lambda_0 = \{\lambda_0^{(s)}\}_{s=1}^{s_0-1}, \quad (2.20)$$

где  $s_0 = s_1 + s_2$ , а  $s_1$  и  $s_2$  определяются из условий (2.17), (2.18), имеет место асимптотическая оценка возмущений собственных значений (2.19).

**3. Применение метода возмущений.** Стандартный метод возмущений решения задачи на собственные значения линейной алгебры [3] основан на представлении искомого собственного значения и собственного вектора в виде разложений по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . При этом в качестве нулевых членов разложений берутся соответствующие их значения для невозмущенных матриц. В рассматриваемом случае такой подход является недостаточно эффективным по двум причинам. Во-первых, велика вероятность близости невозмущенных составляющих собственных значений, что делает некорректным стандартное разложение собственных векторов. Во-вторых, как следствие решения не стандартной, а обобщенной проблемы собственных значений порядок величины возмущений собственных векторов будет отличаться от  $\varepsilon$ .

В соответствии с [4] найдем сначала функцию сравнения для асимптотического представления искомого собственного вектора. С этой целью, принимая во внимание (2.19), (2.20), введем целочисленное множество  $\mathbf{R}_0^{(r)}$ , для которого с учетом (2.12) выполняется неравенство

$$\max_{s \in \mathbf{R}_0^{(r)}} |\lambda_r^{(s)}| \geq a \gg \varepsilon, \quad r \leq s_0, \quad (3.1)$$

и, учитывая (2.7), представим искомый собственный вектор  $\mathbf{X}^{(r)}$  в виде суммы двух составляющих:

$$\mathbf{X}_1^{(r)} = \sum_{s \in \mathbf{R}_0^{(r)}} \alpha_s^{(r)} \mathbf{X}_0^{(s)}, \quad \mathbf{X}_2^{(r)} = \sum_{s \notin \mathbf{R}_0^{(r)}} \alpha_s^{(r)} \mathbf{X}_0^{(s)}. \quad (3.2)$$

Согласно (3.2), представим (2.15) в форме

$$\sum_{s \in \mathbf{R}_0^{(r)}} (\alpha_s^{(r)})^2 \lambda_r^{(s)} + \sum_{s \notin \mathbf{R}_0^{(r)}} (\alpha_s^{(r)})^2 \lambda_r^{(s)} = O(\varepsilon). \quad (3.3)$$

Предполагая, что число элементов  $S$  множества  $\mathbf{R}_0^{(r)}$  (число близких собственных значений) невелико, так что  $S/s_2 = O(1)$ , аналогично (2.16) находим

$$\sum_{s \in \mathbf{R}_0^{(r)}} (\alpha_s^{(r)})^2 \lambda_r^{(s)} = O(\varepsilon). \quad (3.4)$$

Второй член (3.3) разложим на две составляющие:

$$\sum_{s \notin \mathbf{R}_0^{(r)}} (\alpha_s^{(r)})^2 \lambda_r^{(s)} = \Pi_1 + \Pi_3$$

( $\Pi_1$  определено в п. 2). Из (2.16), (2.18), (3.3) и (3.4) следует

$$\Pi_1 = O(\varepsilon), \quad \Pi_3 = O(\varepsilon). \quad (3.5)$$

Учитывая (3.1) и (3.2), из (3.5) имеем

$$\|\mathbf{X}_2^{(r)}\|^2 = O(\varepsilon). \quad (3.6)$$

Таким образом, с учетом (3.2) искомый собственный вектор представим в виде

$$\mathbf{X}^{(r)} = \mathbf{X}_1^{(r)} + \sqrt{\varepsilon} \tilde{\mathbf{X}}_2^{(r)}, \quad \|\mathbf{X}_1^{(r)}\| = O(1), \quad \|\tilde{\mathbf{X}}_2^{(r)}\| = O(1), \quad (3.7)$$

а соответствующее собственное значение, согласно (2.12), (2.19), — в виде

$$\lambda^{(r)} = \lambda_0^{(r)}(1 + \tilde{\lambda}^{(r)}), \quad |\tilde{\lambda}^{(r)}| = O(\varepsilon), \quad r \leq s_0. \quad (3.8)$$

Подставим (3.7), (3.8) в уравнение (2.1) и умножим его слева на прямоугольную матрицу, строками которой являются векторы  $\mathbf{Y}_0^{(p)}$  ( $p \in \mathbf{R}_0^{(r)}$ ). Учитывая (2.2), (2.3), (2.8), (2.12), получим

$$[\text{diag}(\delta \tilde{\lambda}_0^{(r)}) + \mathbf{G} - \tilde{\lambda}^{(r)} \mathbf{J}] \mathbf{X}_1^{(r)} = \eta, \quad \|\eta\| = O(\varepsilon^{3/2}), \quad (3.9)$$

где  $\tilde{\lambda}^{(r)} = (\lambda - \lambda_0^{(r)})/\lambda_0^{(r)}$ ;  $\delta \tilde{\lambda}_0^{(rs)} = (\lambda_0^{(s)} - \lambda_0^{(r)})/\lambda_0^{(r)}$ ;  $\mathbf{J}$  — единичная матрица;  $\mathbf{G}$  — вещественная симметричная матрица с элементами

$$g_{ps}^{(r)} = \frac{\varepsilon_1}{c^{(r)}} \mathbf{Y}_0^{(p)} (\tilde{\mathbf{B}} - \lambda_0^{(r)} \tilde{\mathbf{A}}) \mathbf{X}_0^{(s)}, \quad \mathbf{X}_1^{(r)} = \{\alpha_s^{(r)} : s \in \mathbf{R}_0^{(r)}\}, \quad \|\tilde{\mathbf{X}}_1^{(r)}\| = 1 - O(\varepsilon).$$

Применяя апостериорную оценку возмущений собственных значений для нормальных матриц [3], из (3.9) находим

$$\tilde{\lambda}^{(r)} = \tilde{\lambda}_1^{(r)} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad |\tilde{\lambda}_1^{(r)}| = \min |\tilde{\lambda}_0^{(t)}| \quad (t = 1, 2, \dots, N) \quad (3.10)$$

( $\tilde{\lambda}_0^{(t)}$  — собственные значения матрицы  $[\text{diag}(\tilde{\lambda}_0^{(r)}) + \mathbf{G}]$ ). Дальнейшее решение поставленной задачи ограничим определением возмущенной составляющей собственного значения  $\tilde{\lambda}_1^{(r)}$ . Однако при реализации последней задачи возникают дополнительные трудности, связанные с тем, что, как и в [1], матрицы аэродинамических коэффициентов влияния  $\tilde{\mathbf{A}}_{mn}$  в явном виде не определяются. Эти трудности усугубляются еще и тем, что в отличие от матриц  $\tilde{\mathbf{A}}_{mn}^{(c)}$  их возмущенные составляющие  $\tilde{\mathbf{A}}_{mn}$  свойством цикличности не обладают.

**4. К определению возмущенных составляющих коэффициентов обобщенных гидродинамических сил.** Рассмотрим величины

$$\tilde{a}_{ps} = \lambda_0^{(s)} \mathbf{Y}_0^{(p)} \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{X}_0^{(s)}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_1 = \{\tilde{A}_{mn}\}_0^{N-1}, \quad (4.1)$$

которые входят в выражение для элементов  $g_{ps}^{(r)}$  матрицы  $\mathbf{G}$  уравнения (3.9). Значение  $\tilde{a}_{ps}$  определяет возмущенную составляющую коэффициента обобщенной гидродинамической силы, соответствующей  $p$ -й обобщенной координате, которая возникает при колебаниях решетки по  $s$ -й форме.

Полагая векторы  $\mathbf{X}_0^{(s)}$  известными [1], будем искать векторы

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(s)} = \lambda_0^{(s)} \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{X}_0^{(s)}, \quad (4.2)$$

которые определяют нестационарные составляющие распределенной гидродинамической нагрузки, действующей на лопасти решетки при ее колебаниях с частотой  $\omega_0^{(s)} = \sqrt{\lambda_0^{(s)}}$  и формой  $\mathbf{X}_0^{(s)}$ , соответствующими собственным колебаниям однородной решетки. Как известно [5], собственные колебания лопастей однородной решетки происходят с одинаковыми амплитудами и постоянным сдвигом фаз  $\mu_k = 2\pi k/N$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) между колебаниями соседних лопастей. Указанные формы колебаний решетки обусловлены гидродинамическим взаимодействием лопастей, и в окрестности каждой моды собственных колебаний изолированной лопасти имеют место собственные колебания решетки с  $N$  различными сдвигами фаз. Учитывая это обстоятельство, полный спектр собственных значений системы (2.1) удобно разбить на совокупность подмножеств  $\Lambda^{(j)} = \{\lambda_0^{(jk)}\}_{k=0}^{N-1}$ , индексы элементов которых находятся в следующем соответствии с исходными индексами:

$$r = 1 + k + (j-1)N, \quad j = 1, 2, \dots, N_0 \quad (4.3)$$

(индекс  $j$  обозначает номер моды). Аналогично (4.3) для индексов  $p$  и  $s$  введем в соответствие индексы  $(uq)$  и  $(vl)$  так, что

$$p = 1 + q + (u-1)N, \quad s = 1 + l + (v-1)N \quad (4.4)$$

$$(q, l = 0, 1, \dots, N-1; \quad u, v = 1, 2, \dots, N_0).$$

Согласно указанному закону колебаний, представим векторы  $\mathbf{X}_0^{(s)}$  и  $\tilde{\mathbf{P}}^{(s)}$  следующим образом:

$$\mathbf{X}_0^{(s)} = \mathbf{X}_0^{(vl)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \{\mathbf{X}_{0n}^{(vl)}\}_{n=0}^{N-1}, \quad \tilde{\mathbf{P}}^{(s)} = \tilde{\mathbf{P}}^{(vl)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \{\tilde{\mathbf{P}}_n^{(vl)}\}_{n=0}^{N-1}; \quad (4.5)$$

$$\mathbf{X}_{(n)}^{(vl)} = \mathbf{X}_{00}^{(vl)} e^{i\mu_l n}, \quad \|\mathbf{X}_{(0n)}^{(vl)}\| = 1; \quad (4.6)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_m^{(vl)} = \lambda_0^{(vl)} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{A}_{mn} \mathbf{X}_{00}^{(vi)} e^{i\mu_l n}. \quad (4.7)$$

Подвектор  $\tilde{\mathbf{P}}_m^{(vl)}$  определяет возмущенную составляющую распределенной нестационарной гидродинамической нагрузки, действующей на  $m$ -ю лопасть при колебаниях решетки по указанному выше закону. Таким образом, определение коэффициентов  $\tilde{a}_{ps}$  (4.1) сводится к решению гидродинамической задачи о нестационарном обтекании решетки лопастей, колеблющихся по заданному закону, и не требует нахождения матриц в явном виде.

**5. К определению возмущенных составляющих собственных значений.** Согласно (3.9), (3.10), возмущения первого порядка собственных значений могут быть опре-

делены с помощью решения задачи на собственные значения для матрицы  $\Delta + G$ , где

$$\Delta = \text{diag} (\lambda_0^{(\tau s)}), \quad G = \{g_{ps}^{(\tau)}\}, \quad p, s \in \mathbf{R}_0^{(\tau)}. \quad (5.1)$$

Принимая во внимание (4.3)–(4.7), элементы матрицы  $G$  для дальнейшего удобно представить в новых индексах:

$$g_{uv}^{(ql)} = \frac{c_1}{c_j^{(k)}} (h_{uv}^{(ql)} - a_{uv}^{(ql)}). \quad (5.2)$$

Здесь

$$a_{uv}^{(ql)} = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{Y}_{00}^{(uv)} \tilde{\mathbf{F}}_m^{(vl)} e^{-i\mu_m m}, \quad (5.3)$$

$$c_j^{(k)} = \mathbf{Y}_{00}^{(jk)} \mathbf{C} \mathbf{X}_{00}^{(jk)}, \quad h_{uv}^{(ql)} = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{Y}_{00}^{(uq)} (\tilde{\mathbf{C}}_m - \lambda_0^{(jk)} \tilde{\mathbf{M}}_m) \mathbf{X}_{00}^{(vl)} e^{i\mu_m (l-q)}.$$

Рассмотрим несколько частных случаев близости собственных значений однородной решетки, которые могут быть положены в основу алгоритма определения собственных значений для общего случая.

1. Изолированное собственное значение. Возмущение  $\tilde{\lambda}_1^{(jk)}$  собственного значения  $\lambda_0^{(jk)}$ , для которого множество  $\mathbf{R}_0^{(jk)}$  содержит один элемент, согласно (3.1), (3.9), (5.1)–(5.3), имеет вид  $\tilde{\lambda}_1^{(jk)} = g_{jj}^{(kk)}$ .

2. Близость двух собственных значений при сильном гидродинамическом взаимодействии лопастей. При сильном гидродинамическом взаимодействии для фиксированной  $j$ -й моды колебаний однородной решетки собственные значения, соответствующие колебаниям лопастей с различными сдвигами фаз, будут достаточно изолированными друг от друга. Пусть при этом несколько собственных значений для различных мод колебаний близки между собой так, что

$$\lambda_0^{(vk)} = \lambda_0^{(jk)} (1 + \varepsilon \lambda'_v), \quad |\lambda'_v| = O(1), \quad v \in \mathbf{R}_0^{(jk)},$$

где  $\mathbf{R}_0^{(jk)}$  — множество значений  $v$ , отвечающих индексу близких между собой собственных значений  $\lambda_0^{(vk)}$ . Согласно (5.1)–(5.3), возмущения первого порядка этих собственных значений будут совпадать с собственными значениями матрицы  $\Delta + G$ , где

$$\Delta = \varepsilon_1 \text{diag} \{ \lambda'_v \}_{v \in \mathbf{R}_0^{(jk)}}, \quad G = \{g_{uv}^{(kk)}\}_{u, v \in \mathbf{R}_0^{(jk)}}. \quad (5.4)$$

3. Слабое гидродинамическое взаимодействие при изолированных собственных частотах колебаний лопастей в пустоте. Пусть гидродинамическое взаимодействие лопастей мало так, что

$$\|\mathbf{A}_{mn}\| = \varepsilon_1 O(\|\mathbf{M}\|), \quad m \neq n. \quad (5.5)$$

Этот случай имеет место для достаточно редких решеток гидротурбин и практически для всех решеток газовых турбомашин. И пусть собственные частоты колебаний лопастей в пустоте достаточно изолированы так, что

$$|\lambda_0^{(lk)} - \lambda_0^{(jk)}| / \lambda_0^{(jk)} \geq a \gg \varepsilon, \quad l \neq j. \quad (5.6)$$

Принимая во внимание (1.5)–(1.7), из (5.5) получим оценку

$$\|\mathbf{A}_{mn}^{(0)}\| = \varepsilon_1 O(\|\mathbf{M}\|), \quad \|\tilde{\mathbf{A}}_{mn}\| = \varepsilon_1 O(\|\mathbf{M}\|), \quad m \neq n. \quad (5.7)$$



Учитывая (5.7), блоки  $\mathbf{A}_{mn}^{(0)}$  для  $m \neq n$  матрицы  $\mathbf{A}$  в уравнении (2.1) можно перенести в правую часть, а блоками  $\tilde{\mathbf{A}}_{mn}$  ( $m \neq n$ ) пренебречь. Тогда, учитывая (5.6), можно сделать заключение о том, что множество  $\mathbf{R}_0^{(j0)}$  в соответствии с (4.3) будет состоять из чисел  $s = 1 + l + (j-1)N$ ,  $l = 0, 1, \dots, N-1$ . Это означает, что для некоторой  $j$ -й моды колебаний лопасти множество собственных значений, обусловленное гидродинамическим взаимодействием лопастей, с учетом их геометрической неоднородности можно рассматривать как возмущенные значения  $\lambda_0^{(j0)}$ . Их возмущенные составляющие  $\tilde{\lambda}_1^{(j0)}$  определяются с помощью решения задачи на собственные значения для матрицы  $\mathbf{G}^{(j)} = \{g_{jj}^{(q)}\}_{q,l=0}^{N-1}$  (в этом случае  $\Delta \equiv 0$ ). Принимая во внимание отмеченное выше обстоятельство, с учетом (1.6), (4.2)–(4.7) величины (5.3), определяющие элементы матрицы  $\mathbf{G}$ , представим в виде

$$a_{jj}^{(ql)} = \mathbf{Y}_{00}^{(j0)} \sum_{m=0}^{N-1} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \left( \mathbf{P}_{00}^{(jl)} - \mathbf{P}_{00}^{(jk)} \right) \div \tilde{\mathbf{P}}_m^{(j0)} \right] e^{i\mu_m(l-q)},$$

$$h_{jj}^{(ql)} = \tilde{\mathbf{Y}}_{00}^{(j0)} \left( \tilde{\mathbf{C}}_m - \lambda_0^{(j0)} \tilde{\mathbf{M}}_m \right) \tilde{\mathbf{X}}_{00}^{(j0)} e^{i\mu_m(l-q)},$$

где  $\tilde{\mathbf{P}}_{00}^{(jk)}$  — вектор, определяющий амплитудную функцию нестационарной гидродинамической силы, действующей на исходную лопасть однородной решетки, колеблющейся по  $j$ -й моде со сдвигом фаз  $\mu_k$ ;  $\tilde{\mathbf{P}}_m^{(j0)}$  — возмущенная составляющая этого вектора, обусловленная неоднородностью решетки, для  $m$ -й лопасти,  $j$ -й моды и нулевого сдвига фаз.

Матричное уравнение, из которого находятся искомые значения  $\tilde{\lambda}_1^{(j0)}$ , удобно преобразовать следующим образом:

$$(\mathbf{J}\tilde{\lambda}_1^{(j0)} - \mathbf{E}^{-1}\mathbf{G}^{(j)}\mathbf{E})\mathbf{Z}^{(j)} = 0. \quad (5.9)$$

Здесь

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \exp \left( i \frac{2\pi}{N} mn \right) \right\}_{m,n=0}^{N-1}; \quad \mathbf{Z}^{(j)} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{X}_1^{(j)} = \{z_n^{(j)}\}_{n=0}^{N-1};$$

$\mathbf{Z}^{(j)}$  — собственный вектор (5.9), соответствующий одному из собственных значений матрицы  $\mathbf{G}^{(j)}$ ,  $n$ -я компонента которого  $z_n^{(j)}$  определяет амплитуду колебаний  $n$ -й лопасти при  $\|\mathbf{Z}^{(j)}\| = 1$ . В результате преобразования подобия матрицы  $\mathbf{G}$  с учетом (5.8) имеем

$$\mathbf{E}^{-1}\mathbf{G}^{(j)}\mathbf{E} = \mathbf{L}^{(j)} + \text{diag}(\tilde{r}_m^{(j)}), \quad (5.10)$$

где  $\tilde{\mathbf{L}}^{(j)}$  — циклическая матрица с элементами

$$l_{mn}^{(j)} = \frac{c_1}{c_j^{(n)}} \mathbf{Y}_{00}^{(j0)} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}_{00}^{(jk)} (1 - e^{-i\mu_k(n-m)}); \quad (5.11)$$

$$\tilde{r}_m^{(j)} = \frac{\varepsilon_1}{c_j^{(0)}} \mathbf{Y}_{00}^{(j0)} [(\tilde{\mathbf{C}}_m - \lambda_0^{(j0)} \tilde{\mathbf{M}}_m) \mathbf{X}_{00}^{(j0)} - \tilde{\mathbf{P}}_m^{(j0)}]. \quad (5.12)$$

Отметим, что уравнения, по форме совпадающие с (5.9)–(5.12), были получены при изучении устойчивости колебаний неоднородных решеток в потоке газа [5–7]. Однако механическая модель рассматриваемых гидроупругих колебаний имеет существенное отличие от модели колебаний решетки в потоке газа. Оно состоит в следующем:

1) частоты и формы колебаний лопастей существенно зависят от их взаимодействия с жидкостью;

2) параметр расстройки собственных частот колебаний лопастей  $\tilde{r}_m$  может зависеть

от возмущения гидродинамических сил, обусловленного геометрической неоднородностью решетки.

Указанные обстоятельства приводят к необходимости для решеток гидротурбин задачу об упругих колебаниях лопастей с учетом действующих на них гидродинамических сил решать совместно с задачей о нестационарном обтекании решетки.

4. **Общий случай близости собственных значений.** Пусть при слабом гидродинамическом взаимодействии лопастей несколько собственных частот колебаний лопастей в пустоте близки между собой. Этот случай является достаточно типичным для колебаний решетки в потоке газа, пример которых был рассмотрен в [8].

С учетом (3.9), (5.4), (5.9), (5.10) возмущения первого порядка исследуемого множества собственных значений будут совпадать с собственными значениями блочной матрицы  $[\mathbf{L} + \text{diag}(\Delta + \tilde{\mathbf{R}}_m)]$ , где  $\mathbf{L} = \{\mathbf{L}_{mn}\}_{m,n=0}^{N-1}$ ;  $\mathbf{L}_{mn}$  — квадратные матрицы порядка числа близких собственных значений по индексу  $j$  с элементами

$$l_{mn}^{(uv)} = \frac{\varepsilon_1}{c_v^{(0)}} \mathbf{Y}_{00}^{(u0)} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{P}_{00}^{(vk)} (1 - e^{-i\mu_k(n-m)});$$

$\tilde{\mathbf{R}}_m$  — квадратные матрицы того же порядка, что и  $\mathbf{L}_{mn}$ , с элементами

$$\tilde{r}_{mn}^{(uv)} = \frac{\varepsilon_1}{c_v^{(0)}} \mathbf{Y}_{00}^{(u0)} [(\tilde{\mathbf{C}}_m - \tilde{\lambda}_0^{(v0)} \tilde{\mathbf{M}}_m) \mathbf{X}_{00}^{(v0)} - \tilde{\mathbf{P}}_m^{(v0)}].$$

6. **Влияние малой геометрической неоднородности решетки на амплитудно-частотные характеристики колебаний решетки.** Результаты решения рассмотренной задачи на собственные значения представляют практический интерес в основном для отстройки от резонансных явлений, которые могут иметь место при известных источниках возбуждений. Как известно, уровень резонансных колебаний зависит не только от демпфирования в системе, но и от формы возбуждающей силы, а именно: на режиме резонанса при заданном демпфировании амплитуда колебаний системы будет пропорциональна скалярному произведению функции распределенной возбуждающей силы на функцию формы соответствующих собственных колебаний. Для решеток турбомашин, например, основным источником возбуждения являются нестационарные гидродинамические силы, обусловленные окружной неравномерностью течения. Эти силы представляют собой совокупность гармоник, каждая из которых воздействует с одинаковыми частотами и амплитудами, а также с постоянным сдвигом фаз  $\mu_k$  на все соседние лопасти решетки.

Так как собственные колебания однородной решетки происходят по формам, обладающим условием обобщенной периодичности, то для резонанса вынужденных колебаний решетки под действием указанных возбуждающих сил необходимо совпадение не только частот этих сил с собственными, но и соответствующих сдвигов фазы сил. Иначе говоря, для каждой отдельной гармоники возбуждающей силы из множества собственных значений  $\Lambda^{(3)}$ , обусловленных гидродинамическим взаимодействием лопастей, резонансным будет лишь одно.

Принципиальное отличие имеет характер вынужденных колебаний неоднородных решеток. Из алгоритмов решения задачи на собственные значения, полученных выше, следует, что формы колебаний неоднородных решеток в общем случае не обладают условиями обобщенной периодичности. Поэтому для каждой гармоники возбуждающей силы явление резонанса можно ожидать при совпадении ее частоты с любой из собственных частот колебаний решетки. При этом амплитуды колебаний различных лопастей будут отличаться между собой. Наиболее наглядно ожидаемые закономерности могут быть представлены с помощью амплитудно-частотных характеристик вынужденных колебаний решеток.

В качестве примера были проведены численные исследования влияния неоднородности решетки на свободные и вынужденные колебания лопастей для модели гидротурбины

ПЛ 587В, рассмотренной в [1]. (Указанная решетка состоит из шести лопастей. Расчет проводился для угла выноса, соответствующего рабочему положению решетки.)

В таблице представлены результаты тестового расчета зависимости собственной частоты колебаний однородной решетки от сдвига фаз  $\mu_k$ , проведенного методом возмущений, и дано их сравнение с результатами расчета методом итераций [1].

В соответствии с результатами таблицы расчет колебаний неоднородной решетки проведен с помощью алгоритма (5.9)–(5.12). Параметрами неоднородности решетки в указанном алгоритме являются элементы  $\tilde{r}_m^{(j)}$  матрицы (5.10), характеризующие расстройку собственных частот колебаний решетки. При заданной геометрической неоднородности решетки они определяются по формуле (5.12). Приблизительно они могут быть найдены и экспериментально с помощью замера собственных частот колебаний единичных лопастей  $\omega_m^{(j)}$  (при отсутствии их гидродинамического взаимодействия). В этом случае из (5.9) следует

$$\tilde{r}_m^{(j)} = 2\Delta\omega_m^{(j)}/\omega^{(j)}, \quad \Delta\omega^{(j)} = \omega_m^{(j)} - \omega^{(j)}, \quad \omega^{(j)} = \sum_{m=0}^{N-1} \omega_m^{(j)}/N.$$

Примеры зависимостей собственных частот колебаний этой решетки  $f$  от параметров ее неоднородности приведены на рис. 1 сплошными линиями, штриховые линии — зависимости частот колебаний отдельных лопастей (без учета их взаимодействия между собой), которые определяют соответствующую частотную расстройку решетки. При этом

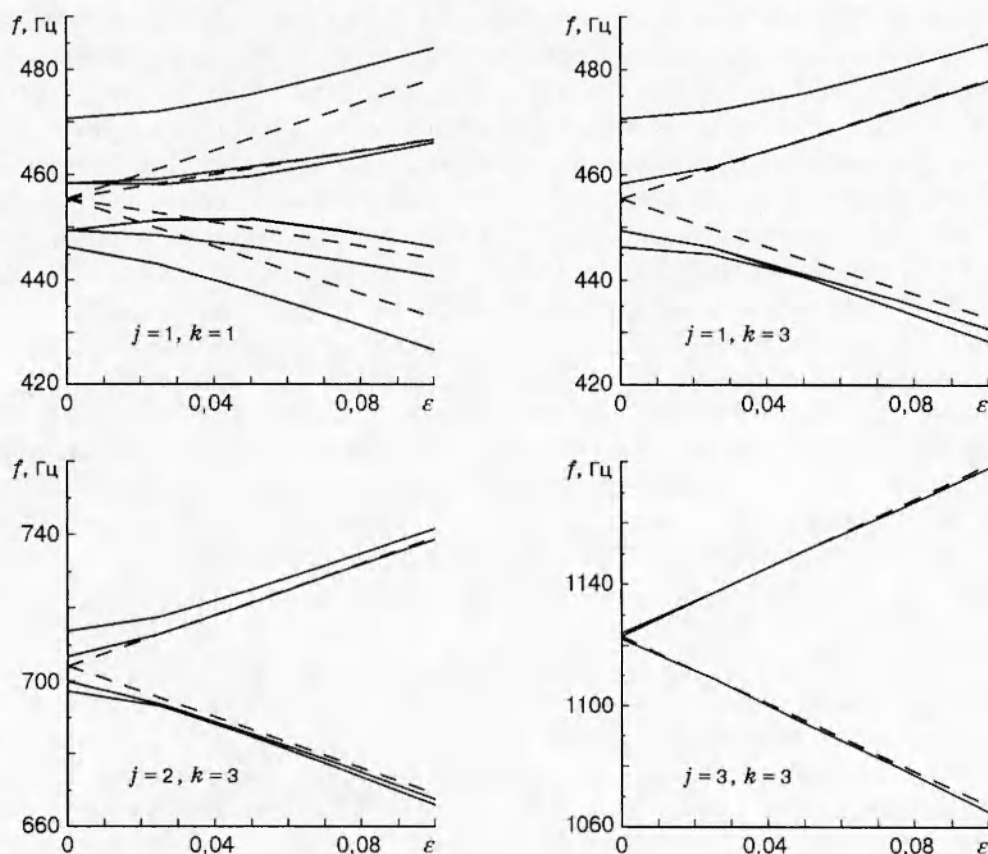


Рис. 1

Номер тона	$f, \text{Гц}$				
	Метод возмущений				Метод итераций
	$\mu = 0$	$\mu_1 = \pi/3$	$\mu_2 = 2\pi/3$	$\mu_3 = \pi$	$\mu_3 = \pi$
1	471	458,6	453,3	446,3	448
2	714	707	700	698	700
3	1124	1123	1122,3	1121,8	1122

результаты отвечают закону расстройки вида

$$\tilde{\omega}_m^{(j)} = \varepsilon \cos \frac{2\pi}{N} mk \quad (N = 6). \quad (6.1)$$

Из приведенных зависимостей видно, что с ростом расстройки и номера моды колебаний собственные частоты решетки сближаются с «парциальными».

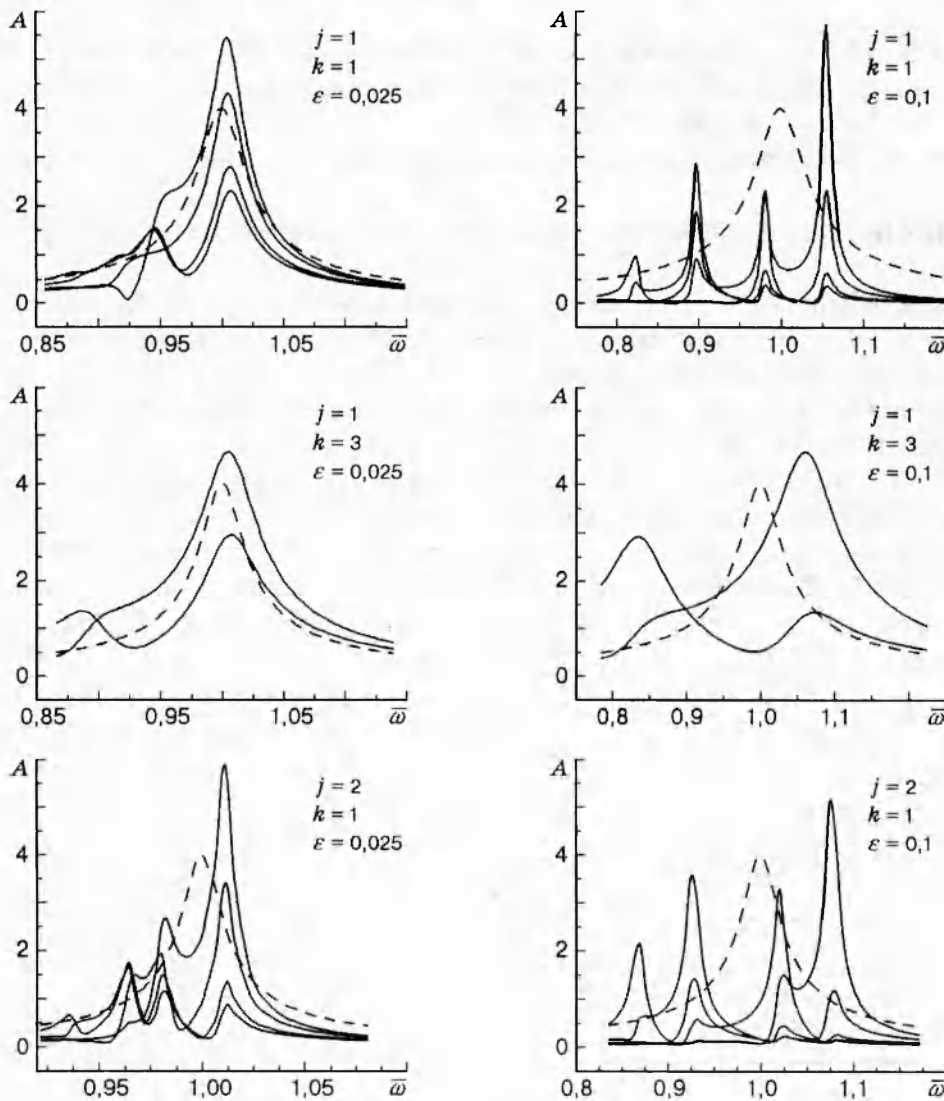


Рис. 2

На рис. 2 сплошными линиями представлены амплитудно-частотные характеристики различных лопастей неоднородных решеток для случая, когда возбуждающие силы действуют на лопасти с одинаковой интенсивностью и нулевым сдвигом фаз между дей-

ствием на разные лопасти (этот случай характерен для стендовых испытаний решеток лопастей гидротурбин). Для ограничения максимальных значений амплитуд колебаний в расчетную модель введено искусственное демпфирование колебаний лопастей. Штриховые линии — амплитудно-частотные характеристики соответствующей однородной решетки. Параметры расстройки, приведенные на рис. 2, отвечают закону (6.1). Видно, что максимальные значения амплитуд колебаний отдельных лопастей могут существенно превышать соответствующие значения амплитуд колебаний однородных решеток, и, как было отмечено выше, для неоднородных решеток в отличие от однородных (штриховые линии) явление резонанса имеет место для всех собственных частот колебаний решетки (так называемый эффект «расслоения» собственных частот).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01220).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Курзин В. В., Коробейников С. Н., Рябченко В. П., Ткачева Л. А. Собственные колебания лопастей однородной решетки гидротурбин в жидкости // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 80–90.
2. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983.
3. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
5. Горелов Д. Н., Курзин В. В., Сарен В. Э. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. Новосибирск: Наука, 1971.
6. Bendixen O. O. Flutter of mistuned turbomachinery rotors // J. Eng. Gas Turbines and Power. 1984. V. 106, N 1. P. 25–33.
7. Fujimoto I., Nagai H., Tanaka H. A comparison of mistuning effects on flutter between stalled and unstalled cascades // Unsteady aerodynamics, aeroacoustics and aeroelasticity of turbomachines and propellers / H. M. Attasi (Ed.). N. Y.: Springer, 1993.
8. Курзин В. Б. К расчету изгибно-крутильного флаттера лопаток осевых турбомашин // Теория и расчет элементов тонкостенных конструкций. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.

*Поступила в редакцию 15/IV 1996 г.*

---