ПМТФ, № 6, 1971

УДК 532.517.4

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТРУБЕ

О. Ф. Васильев, В. И. Квон

(Новосибирск)

Рассматривается неустановившееся однородное по длине турбулентное течение несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Постановка задачи основана на использовании уравнений Рейнольдса и уравнения баланса энергии турбулентности, которые замыкаются дополнительными полуэмпирическими соотношениями. Конкретные расчеты нестационарного турбулентного течения, опирающиеся на такой подход, проведены для случая, когда расход в трубе изменяется во времени, совершая гармонические колебания с конечной амплитудой около некоторого среднего значения. Рассматриваемая математическая модель турбулентного течения предварительно была испытана путем сопоставления вычисленных распределений осредненной скорости и турбулентной энергии с опытными данными Лауфера [1] для стационарного турбулентного течения в трубе.

Однородное по длине течение в трубе является одним из простейших примеров сдвигового течения. В отличие от течения в пограничном слое его осредненные характеристики зависят лишь от одной пространственной координаты (расстояния от стенки или радиуса). Вместе с тем эта задача содержит фактически все основные принципиальные трудности, с которыми приходится сталкиваться при изучении течений со сдвигом. Поэтому изучение специфического влияния нестационарности на турбулентные сдвиговые течения, по-видимому, уместнее всего начинать именно с однородного течения в трубе.

Изучением влияния нестационарности на турбулентные течения в трубах и каналах занимались многие исследователи. Так, подобную задачу для случая течения в круглых трубах изучали Д. Дейли и др. [2], Г. Франке [3], Н. А. Панчурин [4] и др. Однако в известных авторам теоретических исследованиях неустановившихся течений в трубах применялась полуэмпирическая теория турбулентности, использующая буссинесковское представление о коэффициенте турбулентной вязкости (в отношении последнего делались довольно грубые предположения). Вместе с тем сомнительно, чтобы эта теория могла достаточно хорошо отразить те сложные процессы переноса и диффузии турбулентности, которые должны иметь место в нестационарном турбулентном течении. В силу сказанного уместно обратиться в этом случае к современным статистическим моделям турбулентного течения, построенным на применении уравнений переноса, и в частности уравнений переноса турбулентной энергии.

В основе используемого в работе подхода лежат идеи А. Н. Колмогорова, согласно которым основные статистические характеристики турбулентного течения могут быть выражены через энергию и масштаб турбулентности. Применительно к установившемуся течению в трубах это направление получило развитие в работах В. Г. Вагера и Д. Л. Лайхтмана [5] и В. Г. Левина [6].

Для изучения неустановившихся течений такой исход использовался в работах Е. В. Еременко при рассмотрении плоскопараллельных течений в каналах. В работе [7] им выполнен расчет кинематических характеристик в плоской трубе с гармонически изменяющимся градиентом давления. В уравнении энергии турбулентности он выделяет диффузию энергии пульсации давления и отдельно для нее вводит аппроксимационное выражение. Коэффициент турбулентной вязкости принят пропорциональным так называемому турбулентному числу Рейнольдса, а коэффициент турбулентной диффузии — согласно Г. С. Глушко [8]. Тем самым коэффициенты турбулентного обмена оказываются связанными с распределением энергии турбулентности в пространстве и времени. Однако следует отметить, что пропорциональность коэффициента турбулентной вязкости турбулентному числу Рейнольдса не соблюдается вблизи стенки (малые турбулентные числа Рейнольдса), где происходит основная часть генерации энергии турбулентности.

В данной работе коэффициент турбулентной вязкости (а через него и коэффициент турбулентной диффузии) принимается в виде некоторой функции от турбулентного числа Рейнольдса. При рассмотрении сдвигового турбулентного течения в пограничном слое на такие зависимости впервые указал Г. С. Глушко [8], который построил эту зависимость в виде кусочно-гладкой функции на основе многочисленных экспериментальных данных. Здесь предлагается аппроксимировать эту зависимость некоторой гладкой функцией с асимптотикой y^3 при $y \to 0$, где y — расстояние от стенки трубы.

1. Основные уравнения и дополнительные соотношения. Для несжимаемой жидкости уравнения Рейнольдса и энергии турбулентности e осесимметричного движения в цилиндрической системе координат (x, r, φ) имеют вид

$$\frac{d\langle u_r\rangle}{dt} - \frac{\langle v_\varphi\rangle^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2\langle u_r\rangle - \frac{\langle u_r\rangle}{r^2}\right) + $$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(-r\langle u_r'^2\rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(-\langle u_r'u_x'\rangle) - \frac{1}{r}(-\langle u_\varphi'^2\rangle)$$

$$\frac{d\langle u_\varphi\rangle}{dt} + \frac{\langle u_r\rangle\langle u_\varphi\rangle}{r} = \nu\left(\nabla^2\langle u_\varphi\rangle - \frac{\langle u_\varphi\rangle}{r^2}\right) + $$
$$+ \frac{\partial}{\partial r}(-\langle u_r'u_\varphi'\rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(-\langle u_\varphi'u_x'\rangle) + \frac{2}{r}(-\langle u_r'u_\varphi'\rangle)$$

$$\frac{d\langle u_x\rangle}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x} + \nu\nabla^2\langle u_x\rangle + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(-r\langle u_r'u_x'\rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(-\langle u_x'^2\rangle)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\langle u_r\rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(r\langle u_x\rangle) = 0$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\langle u_x'\left(e' + \frac{p'}{\rho}\right)\right\rangle - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\left\langle u_r'\left(e' + \frac{p'}{\rho}\right)\right\rangle - $$
$$- \langle u_x'^2\rangle\frac{\partial\langle u_x\rangle}{\partial x} - \langle u_r'^2\rangle\frac{\partial\langle u_r\rangle}{\partial r} - \langle u_\varphi'^2\rangle\frac{\langle u_r\rangle}{r} - $$
$$- \langle u_x'u_r'\rangle\left(\frac{\partial\langle u_x\rangle}{\partial r} + \frac{\partial\langle u_r\rangle}{\partial x}\right) + \nu\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}e + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\langle u_x'^2\rangle}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\langle u_x'u_r'\rangle)\right] + \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\left[\frac{\partial}{\partial r}e + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x}\langle u_x'u_r'\rangle + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\langle u_r'^2\rangle - \frac{\langle u_\varphi'^2\rangle}{r}\right] - \Delta \tag{1.1}$$

Здесь t — время; ось x направлена по оси трубы; u_x, u_r, u_φ — компоненты вектора скорости; p — давление; e — энергия турбулентности;

ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость (угловыми скобками обозначены осредненные величины)

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \langle u_x \rangle \frac{\partial}{\partial x} + \langle u_r \rangle \frac{\partial}{\partial r}, \quad e \frac{\langle u_x'^2 \rangle + \langle u_r'^2 \rangle + \langle u_\varphi'^2 \rangle}{2}$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \Delta \equiv \nu \left[2 \left\langle \left(\frac{\partial u_x'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle + \right.$$

$$+ 2 \left\langle \left(\frac{\partial u_r'}{\partial r} \right)^2 \right\rangle + 2 \left\langle \left(\frac{\partial u_\varphi'}{r \partial \varphi} + \frac{u_r'}{r} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial u_x'}{\partial r} + \frac{\partial u_r'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle +$$

$$\left. + \left\langle \left(\frac{\partial u_\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial u_x'}{r \partial \varphi} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial u_\varphi'}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r \partial \varphi} - \frac{u_\varphi'}{r} \right)^2 \right\rangle \right]$$

Рассмотрим нестационарное турбулентное движение несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе радиуса R. Введем следующие предположения: существует осевая симметрия течения, течение статистически однородно вдоль оси трубы (т. е. осредненные значения компонент скорости и произведений их пульсаций не зависят от переменной x) и тангенциальная компонента осредненной скорости равна нулю. Можно считать, что эти предположения выполняются для течения в круглой цилиндрической трубе на достаточно больших расстояниях от входного и выходного сечений. При этих предположениях из уравнения неразрывности и условия непроницаемости на стенке трубы следует, что $\langle u_r \rangle = 0$. В результате система уравнений (1.1) заметно упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\nu \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial r} - \langle u_r' u_x' \rangle \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \langle u_r'^2 \rangle}{\partial r} - \frac{\langle u_\varphi'^2 \rangle}{r} = 0$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left\langle u_r' \left(e' + \frac{p'}{\rho} \right) \right\rangle - \langle u_x' u_r' \rangle \frac{\partial u_x}{\partial r} +$$

$$+ \frac{\nu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} e + \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \langle u_r'^2 \rangle - \frac{\partial}{\partial r} \langle u_\varphi'^2 \rangle \right] - \Delta \qquad (1.2)$$

Далее можно показать, что градиент давления $\partial \langle p \rangle / \partial x$ является функцией только времени t. Действительно, интегрируя второе уравнение системы (1.2) по r, получим

$$\langle p \rangle - \langle p_0 \rangle + \rho \langle u_r'^2 \rangle + \rho \int_R^r \frac{\langle u_r'^2 \rangle - \langle u_\varphi'^2 \rangle}{r} dr = 0$$

Здесь $\langle p_0 \rangle = \langle p(R, t, x) \rangle$. Поскольку $\langle u_r'^2 \rangle$ и $\langle u_\varphi'^2 \rangle$ не зависят от x, то $\partial \langle p \rangle / \partial x = \partial \langle p_0 \rangle / \partial x$ и $\partial \langle p \rangle / \partial x$ есть функция только t и x. И тогда из первого уравнения системы (1.2) вытекает, что $\partial \langle p \rangle / \partial x$ — функция только от времени.

Рассмотрим теперь члены, описывающие работу вязких напряжений. Они представлены слагаемыми в квадратных скобках уравнения турбулентной энергии системы (1.2). Известно, что работа вязких напряжений существенна только вблизи стенки трубы. Используя асимптотическое представление ([9], стр. 236) компонент пульсационной энергии вблизи стенки, можно показать, что основной вклад в работу вязких напряжений вносит член $(\nu / r) \partial (r \partial e / \partial r) / \partial r$. Учитывая это обстоятельство, будем пренебрегать далее остальными слагаемыми работы вязких напряжений.

Для дальнейшего анализа течения понадобятся лишь два дифференциальных уравнения системы (1.2): первое и третье, т. е. рейнольдсово уравнение для продольной скорости и уравнение энергии турбулентности. Однако в этих уравнениях число неизвестных превышает число уравнений. Для замыкания системы, следуя Г. С. Глушко [8], воспользуемся полуэмпирическими предположениями:

1) перенос импульса осуществляется диффузией градиентного типа

$$-\langle u_r' \, u_x' \rangle = \varepsilon \partial \, \langle u_x \rangle / \, \partial r \tag{1.3}$$

2) перенос полной турбулентной энергии описывается так же, как диффузионный процесс градиентного типа

$$\nu \frac{\partial e}{\partial r} - \left\langle u_r' \left(e' + \frac{p'}{\rho} \right) \right\rangle = D \frac{\partial e}{\partial r} \tag{1.4}$$

3) процесс диссипации энергии турбулентности определяется соотношением

$$\Delta = CDe \, / \, L^2 \tag{1.5}$$

Здесь ε — коэффициент турбулентной вязкости, D — суммарный коэффициент диффузии, L — масштаб турбулентности, C — универсальная постоянная.

Очевидно, три приведенных соотношения по существу не содержат новой информации, если только не определены ε, D и L. Эмпиризм этих формул обусловлен тем, что определение указанных коэффициентов и масштаба длины осуществляется с привлечением экспериментальных данных. Оказывается, что руководствуясь физическими соображениями, можно сконструировать относительно простые зависимости для ε, D и L. Так, А. Н. Колмогоров предложил считать $\varepsilon \sim \sqrt{e}L$. Анализируя турбулентные течения в пограничном слое, Г. С. Глушко [8] показал, что коэффициент ε может быть представлен как функция только турбулентного числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_t = \sqrt{e}L \, / \, \nu$.

Рассмотрим более подробно поведение коэффициента турбулентной вязкости в пристенной области, представив его в виде степенной зависимости: $\varepsilon \sim y^n$, где y — расстояние от стенки. Как следует из уравнения неразрывности для пульсационных скоростей и условий равенства их нулю на самой стенке (при $y = 0$), показатель степени $n \geqslant 3$. Имеются как экспериментальные, так и теоретические исследования, свидетельствующие в пользу значения показателя $n = 3$ (см., например, [9, 10]). Это подтверждается также недавним исследованием [11] течения в пристенной области, основанным на принципе максимальной устойчивости.

По экспериментальным данным Лауфера (см. [9]) $e \sim y^2$ в пристенной области. Обработка многочисленных экспериментов, выполненная Г. С. Глушко [8], дает $L \sim y$ при $y \to 0$. Отсюда можно заключить, что должна иметь место асимптотика $\varepsilon \to \mathrm{Re}_t^{3/2}$ при $\mathrm{Re}_t \to 0$ (в предположении, что коэффициент ε зависит только от турбулентного числа Рейнольдса). С учетом этого обстоятельства зависимость $\varepsilon = \varepsilon\,(\mathrm{Re}_t)$, которую Г. С. Глушко [8] аппроксимировал кусочно-гладкой функцией, в данной работе аппроксимируется гладкой функцией с асимптотикой $\varepsilon \sim \mathrm{Re}_t^{3/2}$ при $\mathrm{Re}_t \to 0$

$$\varepsilon \, / \, \nu = \alpha \, \mathrm{Re}_t \, [1 - \exp \, (- \, \sigma_2 \, \mathrm{Re}_t^2) + \sigma_3 \mathrm{Re}_t^{1/2} \exp \, (- \, \sigma_1 \, \mathrm{Re}_t^2)] \tag{1.6}$$

Формула (1.6) при $\sigma_1 = 4 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_2 = 2.1 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_3 = 2 \cdot 10^{-2}$ и $\alpha = 0.2$ хорошо согласуется с зависимостью, предложенной Г. С. Глушко, всюду, кроме непосредственной окрестности точки $\mathrm{Re}_t = 0$. Напомним, что у Г. С. Глушко $\varepsilon \sim \mathrm{Re}_t^2$ при $\mathrm{Re}_t \to 0$. Так как согласно формуле (1.6) $\varepsilon / \nu = \alpha\sigma_3 \mathrm{Re}_t^{3/2} + O(\mathrm{Re}_t^3)$ при $\mathrm{Re}_t \to 0$, то коэффициент турбулентной вязкости в непосредственной окрестности точки $\mathrm{Re}_t = 0$ определяется константой σ_3. Значение $\sigma_3 = 2 \cdot 10^{-2}$ определено обработкой экспериментальных данных Лауфера [1] для круглой трубы. Заметим, что при больших Re_t формула (1.6) дает асимптотику $\varepsilon / \nu = \alpha \mathrm{Re}_t$.

Предположим также, что суммарный коэффициент диффузии энергии турбулентности связан с коэффициентом турбулентной вязкости линейной зависимостью

$$D = \nu + m\varepsilon \tag{1.7}$$

где m — постоянный коэффициент. Величина, обратная m, является аналогом турбулентного числа Прандтля.

Для масштаба турбулентности L пока не найдено удачной и достаточно надежной теоретической зависимости, связывающей его с другими характеристиками течения. В связи с этим в данной работе будем аппроксимировать масштаб L полиномиальным выражением

$$L / R = l_0 + l_2 (r / R)^2 + l_4 (r / R)^4 \tag{1.8}$$

Нетрудно заметить аналогию между этим выражением и известной формулой Никурадзе для длины пути смешения при течении в трубе.

Две из констант l_0, l_2, l_4 можно определить, используя эмпирическую зависимость для L из работы [8] при $r = R$, а именно

$$L(R) = 0, \quad dL / dr|_{r=R} = -1$$

При этом предполагаем, что в окрестности стенки масштабы турбулентности L течения в пограничном слое и течения в трубе одинаковы. Третья константа l_0 определялась из условия, что $\varepsilon / u_* R \approx \alpha \sqrt{e} L / u_* R \approx 0.07$ при $r = 0$. Такое значение $\varepsilon / u_* R$ в середине трубы вычислено Хинце [12] по данным Лауфера [1]. Таким образом, получены следующие значения параметров: $l_0 = 0.37$, $l_2 = -0.24$, $l_4 = -0.13$. Константы C и m, соответствующие указанным значениям остальных постоянных, равны $C = 3.93$ и $m = 0.4$ согласно [8].

2. Постановка задачи. Суммируя сказанное выше, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\nu + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r D \frac{\partial e}{\partial r} + \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - CD \frac{e}{L^2}$$

Здесь коэффициенты ε, D и масштаб L определяются выражениями (1.6) — (1.8). Для простоты обозначений опущены знак осреднения и индекс x у единственной ненулевой компоненты u_x вектора осредненной скорости.

Граничными условиями будут следующие:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial e}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0, \qquad u = e = 0 \quad \text{при } r = R \tag{2.2}$$

Условия (2.2) при $r = 0$ следуют из симметрии течения относительно оси трубы, а при $r = R$ — из условия прилипания на гладкой стенке.

На основе выражений (2.1) и (2.2) может быть рассмотрено периодическое движение в трубе. В более общем случае к ним необходимо добавить начальные условия

$$u = u(r), \quad e = e(r) \quad \text{при } t = 0 \tag{2.3}$$

Для решения конкретных задач кроме указанных условий необходимо задать еще градиент давления или расход в функции времени. В данной работе считается заданным расход

$$Q(t) = 2\pi \int_0^R urdr \tag{2.4}$$

Независимость расхода от продольной координаты вытекает из уравнения неразрывности и выражает тот факт, что для несжимаемой жидкости расход в любом сечении жесткой трубы одинаков. Задание расхода позволяет исключить из рассмотрения давление p, которое, вообще говоря, теперь будет относиться к искомым функциям.

Действительно, интегрируя первое уравнение системы (2.1) при условиях (2.2) и (2.4), получаем

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\pi R^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} - 2\pi R\nu \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R}\right) \tag{2.5}$$

3. Диссипация энергии. Привлечение уравнения энергии турбулентности позволяет расшифровать механизм обращения энергии в турбулентном течении, а также вычислить потерю энергии. Проинтегрируем уравнения системы (2.1) по сечению трубы, предварительно умножив первое из них на u. Сложив их, после несложных преобразований получим интегральное уравнение баланса полной энергии

$$-Q\frac{\partial p}{\partial x} = 2\pi\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R \rho\left(\frac{u^2}{2} + e\right) rdr + 2\pi\int_0^R \left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \rho CD\frac{e}{L^2}\right] r\,dr \tag{3.1}$$

Здесь использовано кроме (2.2) дополнительное условие $\partial e / \partial r = 0$ при $r = R$, которое следует из уравнения энергии в вязком подслое ($D = \nu$, $e \sim y^2$ при $y \to 0$).

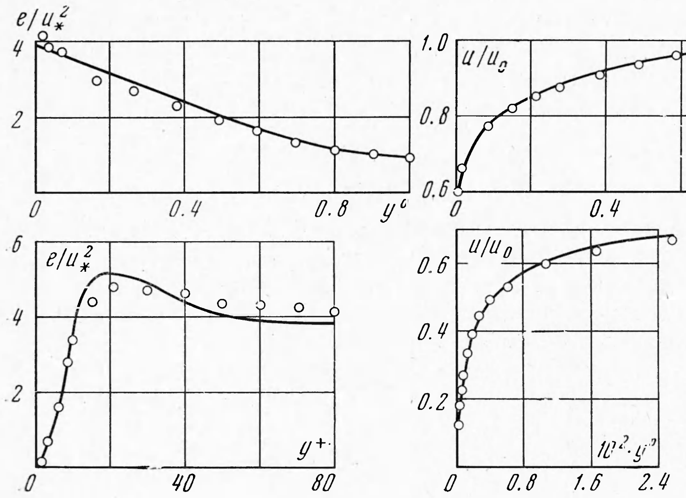
Выражение (3.1) допускает следующую механическую интерпретацию. Работа давления расходуется на изменение кинетической энергии осредненного и пульсационного движений и диссипацию энергии в тепло. Очевидно, потеря механической энергии происходит только за счет диссипации энергии осредненного и пульсационного движений. Следовательно, потеря энергии на участке трубы единичной длины запишется в виде

$$N = 2\pi\int_0^R \left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \rho CD\frac{e}{L^2}\right] r\,dr \tag{3.2}$$

4. Течение с периодически изменяющимся расходом (численное решение). Система (2.1) с условиями (2.2), (2.3), (2.5) и заданным расходом $Q = Q(t)$ решалась численно по неявной шеститочечной конечно-разностной схеме, примененной ранее для расчета течения в пограничном слое [13]. Численное решение стационарной задачи, найденное методом установления по данной конечно-разностной схеме, в общем удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными Лауфера [1]. Об этом свидетельствует сравнение, выполненное для числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_0 = 2v_0R / \nu = 4.232 \cdot 10^5$ (фиг. 1). Здесь v_0 — средняя по сечению скорость. На фиг. 1 использованы следующие обозначения:

$$u_0 = u\,(0,\ t),\quad u_*^2 = |\,\nu \partial u\,/\,\partial r\,|_{r=R},\ y^\circ = 1 - r\,/\,R,\ y^+ = u_* y\,/\,\nu$$

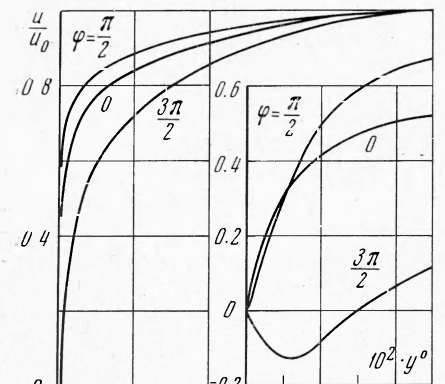
u_*^2 — квадрат динамической скорости, сплошные кривые представляют собой результаты расчета. Как видно, хорошее совпадение вычисленных



Фиг. 1

скоростей с опытными данными наблюдается как в ядре течения, так и в пристенной области.

Расчетные кривые распределения турбулентной энергии также довольно близки к экспериментальным данным. В окрестности стенки численное решение обнаруживает характерный максимум, наблюдаемый в эксперименте.



Фиг. 2

Обратимся теперь к нестационарному течению. Пусть расход изменяется по гармоническому закону

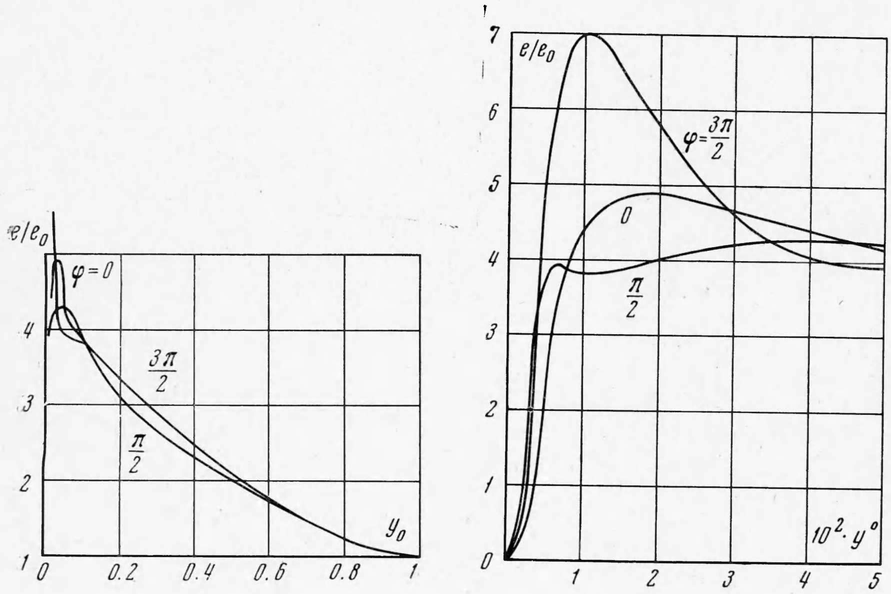
$$Q\,(t) = Q_0\,(1 + a \sin \omega t)$$

$$(Q_0 = \pi R^2 v_0,\ \omega = 2\,\pi\,/\,T) \quad (4.1)$$

Здесь Q_0, a — постоянные величины. Рассмотрим переходный процесс, в результате которого начальное стационарное движение становится периодическим. Нетрудно заметить, что все исходные данные могут быть выражены в виде трех безразмерных параметров (Re_0, a, $\omega_0 = \omega\,(2\,R)^2\,/\,\nu$), которыми определяется решение рассматриваемой нестационарной задачи.

Процесс установления периодического движения происходит довольно быстро. Конкретные расчеты показывают, что движение жидкости практически становится периодическим уже по истечении 1—2 периодов T от начального момента времени, соответствующего стационарному движению.

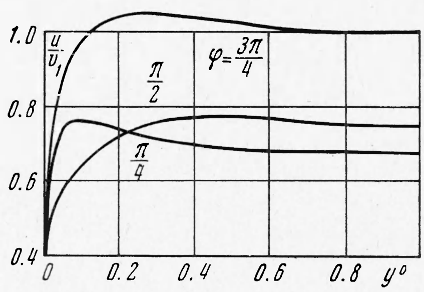
На фиг. 2 показаны расчетные профили скорости как в основной части, так и в пристенной области течения при $\mathrm{Re}_0 = 10^5$, $a = 0.5$, $\omega_0 = 10^6$ для трех характерных моментов одного периода колебаний (т. е. для трех различных фаз колебания $\varphi = \omega t$) при установившемся периодическом движении. Обратим внимание на то, что при неустановившемся движении в



Фиг. 3

отдельные промежутки времени в пристенной области возможны обратные течения, хотя мгновенная средняя по сечению скорость остается при этом положительной во все время движения ($a < 1$). На фиг. 3 приведены распределения энергии турбулентности для тех же условий. Перестройка распределения энергии из-за нестационарности происходит прежде всего в пристенной области.

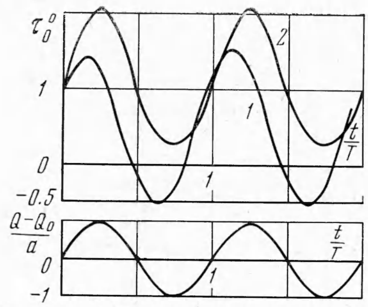
Рассмотрим теперь случай, когда расход меняется по закону $Q = Q_1 \sin \omega t$ ($Q_1 = \pi R^2 v_1$), т. е. случай, когда расход в трубе периодически изменяется около нулевого значения. Расчеты показали, что в этом случае при достаточно больших значениях ω_0 максимальное значение скорости имеет место у стенки (фиг. 4, $\mathrm{Re}_1 \equiv 2v_1R / \nu = 0.5 \cdot 10^5$, $\omega_0 = 10^4$). Такая картина наблюдалась в экспериментах Франке [3]. С ростом безразмерной частоты ω_0 максимум скорости продолжает смещаться к стенке, а в основной части сечения профиль скорости становится почти равномерным. В этом случае в пристенной области существует периодический пограничный слой, который уже не охватывает все поперечное сечение трубы.



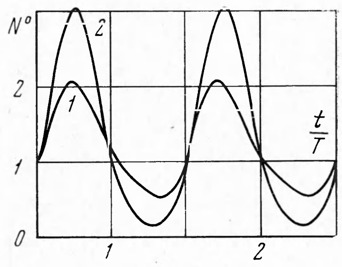
Фиг. 4

Зная распределение скорости, можно вычислить касательное напряжение на стенке по формуле $\tau_0 = -\mu \partial u / \partial r|_{r=R}$ и диссипацию энергии по (3.2). На фиг. 5 и фиг. 6 представлены результаты их вычисления при $\mathrm{Re}_0 =$

$= 10^5$, $a = 0.5$ для $\omega_0 = 10^6$ (кривые 1) и для $\omega_0 = 10^4$ (кривые 2), причем через $\tau_0°$ и $N°$ обозначены соответственно касательное напряжение и диссипация энергии, отнесенные к их значениям при установившемся движении с расходом Q_0.



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 5 можно заметить, что частота колебания расхода влияет как на амплитуду, так и на сдвиг фазы касательного напряжения.

Авторы благодарят Р. Т. Чернышеву, выполнившую приведенные здесь расчеты.

Поступила 18 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. L a u f e r J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. Nat. Advis Com. Aeronaut., 1954, Rept No. 1175.
2. D a i l y J. W., H a n k e y W. L., O l i v e R. W., J o r d a a n J. M. Jr. Resistance coefficients for accelerated and decelerated flows through smooth tubes and orifices. Trans. ASME, 1956, vol. 78, No. 5.
3. F r a n k e G. Wärmeübergang und Geschwindigkeitsverlauf bei pulsieren — der Rohrströmung. Allgem. Wärmetechn, 1961, Bd 10, H. 3.
4. П а н ч у р и н Н. А. Распределение скоростей в некоторых случаях нестационарного турбулентного течения в трубах. Тр. Ленингр. ин-та водн. трансп., 1963, вып. 46.
5. В а г е р Б. Г., Л а й х т м а н Д. Л. Структура турбулентного потока в трубе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
6. Л е в и н Б. В. К расчету основных характеристик турбулентных потоков с поперечным сдвигом. Теплофизика высоких температур, 1964, № 4.
7. Е р е м е н к о Е. В. Расчет кинематических характеристик турбулентного потока при неустановившемся движении. Сб. «Турбулентные течения», М., «Наука», 1970.
8. Г л у ш к о Г. С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
9. М о н и н А. С., Я г л о м А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
10. К а д е р Б. А. Турбулентность в вязком подслое вблизи плоской стенки. Сб. «Турбулентные течения», М., «Наука», 1970.
11. Г о л ь д ш т и к М. А., С а п о ж н и к о в В. А., Ш т е р н В. Н. Определение профиля скорости в вязком подслое на основе принципа максимальной устойчивости. Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 4.
12. Х и н ц е И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
13. Б р а и л о в с к а я И. Ю., Ч у д о в Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. Вычислительные методы и программирование. М., Изд-во МГУ, 1962.