

17. Бушман А.В., Красюк И.К., Крюков Б.П. и др. Кумулятивные явления при импульсном воздействии на конические мишени // Письма в ЖТФ. — 1988. — Т. 14, вып. 19.
18. Агурейкин В.А., Крюков Б.П. Метод индивидуальных частиц для расчета течений многокомпонентных сред с большими деформациями // ЧММСС. — 1986. — Т. 17, № 1.
19. Чарахчян А.А. Численное моделирование сжатия газа в конических твердотельных мишенях. — М.: ВЦ АН СССР, 1988.
20. Чарахчян А.А. Расчет сжатия дейтерия в конической мишени в рамках уравнений Навье—Стокса для двухтемпературной магнитной гидродинамики // ЖВММФ. — 1993. — Т. 33, № 5.
21. Бушман А.В., Канель Г.И., Ни А.Л., Фортвов В.Е. Теплофизика и динамика интенсивных импульсных нагрузок. — Черноголовка: ИХФ АН СССР, 1988.
22. Бракнер К., Джорна С. Управляемый лазерный синтез. — М.: Атомиздат, 1977.
23. Richtmyer R.D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids // Commun. Pure and Appl. Math. — 1960. — V. 13, N 2.
24. Мешков Е.Е. Некоторые результаты экспериментальных исследований гравитационной неустойчивости границ раздела сред разной плотности // Исследование гидродинамической устойчивости с помощью ЭВМ. — М.: Ин-т прикл. математики АН СССР, 1981. — С. 163—190.
25. Setchell R.E., Storm E., Sturtevant B. An investigation of shock strengthening in a conical convergent channel // J. Fluid Mech. — 1972. — V. 56, N 3.
26. Beuler R.J., Friedlander G., Friedman L. Cluster-impact fusion // Phys. Rev. Lett. — 1989. — V. 63, N 12.
27. Леонас В.Б. Новый подход к осуществлению реакций D—D-синтеза // УФН. — 1990. — Т. 160, вып. 11.
28. Бархударов Э.М., Гелашвили Г.В., Гумбаридзе Г.Г., Тактакишвили М.И. Эффективность преобразования лазерного излучения в электрическую энергию // Квантовая электроника. — 1987. — Т. 14, № 9.
29. Захаров Н.С., Шайнога И.С., Шенцев Н.И. О генерации магнитных полей при воздействии на твердые преграды сдвоенных импульсов излучения // Квантовая электроника. — 1989. — Т. 16, № 2.

г. Москва

Поступила 13/VII 1993 г.,
в окончательном варианте — 5/X 1993 г.

УДК 534.26+539.374

Н.А. Остапенко, В.И. Романченко, Г.Е. Якунина

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ С МАКСИМАЛЬНОЙ ГЛУБИНОЙ ПРОНИКАНИЯ В ПЛОТНЫЕ СРЕДЫ

Проведено исследование оптимальной пространственной формы тел, проникающих в плотные среды, когда при определенных допущениях взаимодействие среды и тела может быть рассмотрено в рамках закона локальности [1]. Построен и реализован численный алгоритм поиска формы тела, обеспечивающей максимальную глубину проникания, в основу которого положен метод локальных вариаций [2].

Приведены примеры решения вариационной задачи при различных изопериметрических условиях, налагаемых на геометрию тела, показывающие, что оптимальные пространственные тела могут обладать значительным преимуществом по глубине проникания в сравнении с эквивалентными традиционными телами вращения.

1. Классы тел. Рассмотрим движение тела, форма поверхности которого в цилиндрической системе координат (r, θ, x) с началом в носике тела и

© Н.А. Остапенко, В.И. Романченко, Г.Е. Якунина, 1994

осью x , направленной в сторону, противоположную движению, определяется уравнением

$$(1.1) \quad f(r, \theta, x) \equiv r - \varphi(x)R(\theta) = 0,$$

где $\varphi(x)$, $R(\theta)$ — функции, определяющие соответственно продольный и поперечный контуры тела, причем $\varphi(0) = 0$, $\varphi(L) = 1$ (L — заданная характерная длина головной части тела).

В дальнейшем форма продольного контура головной части тела предполагается известной и заданной уравнением

$$(1.2) \quad \varphi(x) = x/L = \xi.$$

Если головная часть тела с площадью миделева сечения S_m является конусом с длиной L , то $R(\theta) = \sqrt{S_m/\pi} = L\tau/2$ (τ — относительная толщина головной части тела) и $\varphi(x) \equiv 1$ при $x > L$.

Преследуя цель построить головную часть тела, обеспечивающую наибольшую глубину проникания, при заданных начальной скорости удара v_0 и площади миделева сечения S_m , необходимо учитывать, что на конфигурацию тела в зависимости от требований практики могут быть наложены различные изопериметрические условия. Наиболее часто встречающимися из них являются задание массы (объема) внедряющегося тела и ограничения на его поперечные размеры.

Возможны два принципиально различных подхода к решению указанной задачи.

Первый из них состоит в том, что увеличение глубины внедрения достигается путем “деформирования” некоторой передней части тела (рис. 1), имеющего круговое миделево сечение и головную часть с заданной относительной толщиной τ (штриховые линии). В этом случае поверхность новой конусоидальной передней части тела сопрягается с круговым цилиндром по пространственной кривой

$$(1.3) \quad \xi g(\theta) - \tau/2 = 0, \quad g(\theta) = R(\theta)/L.$$

При известной функции $g(\theta) \neq \tau/2$ передняя часть тела будет конической для $\xi \leq \xi_1 = \tau/(2g_1)$ (см. рис. 1) и состоит из конической и цилиндрической поверхностей при $\xi_1 < \xi < \xi_2 = \tau/(2g_0)$, где g_1 и g_0 — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $g(\theta)$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Тела описанного типа, имеющие, как и эквивалентное тело сравнения (круговой конус — цилиндр), миделево сечение в форме круга, назовем телами класса 1.

Второй подход к оптимизации формы тела состоит в том, что осуществляется переход от эквивалентного тела вращения с поперечным размером $2\sqrt{S_m/\pi}$ к телу пространственной формы с большим поперечным размером и той же площадью миделева сечения S_m . В этом случае оптимизируется головная часть тела на длине L ($\xi \leq 1$), а при $\xi > 1$ имеет место цилиндрическая поверхность, натянутая на контур миделева сечения пространственной головной части (рис. 2). Тела такого типа назовем телами класса 2.

Описанные классы тел указывают лишь возможные направления, в которых может осуществляться поиск форм, обеспечивающих большую глубину внедрения по сравнению с эквивалентными телами вращения, и определяют типы вариационных задач, которые конкретизированы ниже. От-

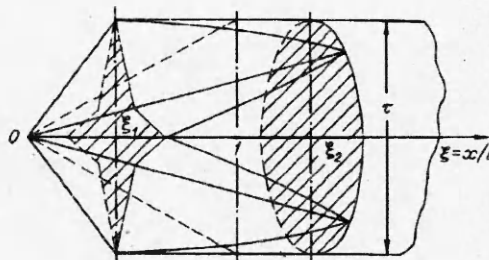
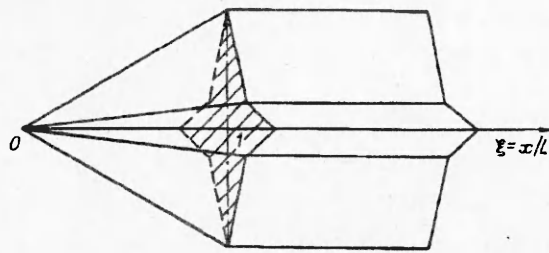


Рис. 1



Р и с. 2

метим, что тела вращения с конической головной частью, имеющей относительную толщину τ , являются допустимыми формами в классах 1 и 2.

2. Глубина внедрения тела. Пусть S — поверхность, на которой осуществляется контакт внедряющегося тела со средой. Тогда со-

противление тела можно записать в виде

$$(2.1) \quad D = q \int_S [-c_p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + c_\tau(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x})] dS,$$

где $q = \rho v_0^2 / 2$ (ρ — плотность среды); \mathbf{x} , \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ — соответственно единичные векторы оси x , внешней нормали к поверхности тела и касательной к ней, направленной вниз по потоку в рассматриваемой точке; причем $\boldsymbol{\tau}[\mathbf{n} \times \mathbf{x}] = 0$, что является в большинстве случаев естественным допущением; c_p и c_τ — коэффициенты давления и трения на поверхности тела.

В рамках закона локального взаимодействия, когда предполагается, что сила воздействия среды на элементарную площадку поверхности тела зависит лишь от ее ориентации относительно направления движения, коэффициенты c_p и c_τ могут быть представлены выражениями

$$(2.2) \quad \begin{aligned} c_p &= A_1(v/v_0)^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2 - B_1(v/v_0)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + C_1, \\ c_\tau &= A_2(v/v_0)^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2 - B_2(v/v_0)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + C_2. \end{aligned}$$

Коэффициенты A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2$) локальной модели (2.2) в общем случае зависят от характеристик среды и скорости удара v_0 и могут быть определены при некоторых упрощениях из теории [3, 4] либо являются эмпирическими константами [5, 6].

Ограничимся случаем, когда c_p и c_τ связаны соотношением

$$(2.3) \quad c_\tau = \mu c_p$$

(μ — коэффициент кулоновского трения). Предположим также, что уменьшение начальной скорости удара v_0 за время, в течение которого головная часть тела не полностью погружена в среду, пренебрежимо мало. Это справедливо, как показывают оценки, при начальных скоростях внедрения в грунт $v_0 \geq 10(\tau/2)^{-1}$ м/с и в металлические преграды $v_0 \geq (10^2 + 10^{5/4}) \times (\tau/2)^{-1}$ м/с. Тогда, интегрируя уравнение движения тела с массой M в случае нормального удара к поверхности среды с использованием соотношений (2.1) — (2.3), найдем выражение для глубины проникания:

$$(2.4) \quad H = \frac{Mv_0^2}{2qAY_1} \left\{ \ln \left(1 + \frac{B}{C} \frac{Y_2}{Y_3} + \frac{A}{C} \frac{Y_1}{Y_3} \right) + \Phi \right\}.$$

В (2.4) индекс 1 у A, B и C опущен; Φ в зависимости от величины $E = 4ACY_1Y_3/(BY_2)^2 - 1$ имеет различное аналитическое представление:

- 1) при $E > 0$
 $\Phi = 2E^{-1/2} [\text{arctg}(E^{-1/2}) - \text{arctg}(E_0 E^{-1/2})],$
 $E_0 = 1 + 2AY_1/(BY_2);$
- 2) при $E = 0$
 $\Phi = -2(1 - E_0^{-1});$

3) при $E < 0$

$$\Phi = (-E)^{-1/2} \ln \left[\frac{(E_0 + \sqrt{-E})(1 - \sqrt{-E})}{(E_0 - \sqrt{-E})(1 + \sqrt{-E})} \right].$$

В случае, когда $B = 0$, что отвечает, в частности, моделям Сагомояна для грунтов и металлов [3, 4] и Забудского для грунтов [3, 5], Φ обращается в нуль и выражение для глубины внедрения приобретает вид

$$(2.5) \quad H = \frac{M\sigma_0^2}{2qAY_1} \ln \left(1 + \frac{A Y_1}{C Y_2} \right).$$

При $A = C = 0$ (Березанская модель для грунтов [5]) функционал H можно записать в форме

$$(2.6) \quad H = \frac{M\sigma_0^2}{qBY_2}.$$

В соотношениях (2.4)–(2.6) величины Y_i ($i = 1, 2, 3$) являются функционалами, зависящими от формы поверхности S , по которой осуществляется контакт тела со средой, и от коэффициента трения μ :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} Y_1 &= \iint_S [-(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + \mu(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x})](\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^2 dS, \\ Y_2 &= -\iint_S [-(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + \mu(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x})](\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) dS, \\ Y_3 &= \iint_S [-(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + \mu(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x})] dS. \end{aligned}$$

В дальнейшем в соответствии с кавитационной схемой обтекания тела в качестве S принимается поверхность головной части тела, обращенная в сторону движения.

В общем случае задача определения формы тела максимальной глубины проникания сводится к вариационной задаче нахождения максимума функционала (2.4) в классе допустимых поверхностей, удовлетворяющих заданным изопериметрическим условиям. Для тел, поверхность которых принадлежит классам 1 и 2, интегралы (2.7), согласно (1.1)–(1.3), запишем в виде

$$(2.8) \quad \begin{aligned} Y_1 &= \frac{L^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[z \frac{g^2 \Phi_2}{(\Phi_1 + g^2)} \right] d\theta, \\ Y_2 &= \frac{L^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[z \frac{g^2 \Phi_2}{(\Phi_1 + g^2)^{1/2}} \right] d\theta, \\ Y_3 &= \frac{L^2}{2} \int_0^{2\pi} [zg\Phi_2] d\theta, \\ \Phi_1 &= 1 + (g/g)^2, \quad \Phi_2 = g + \mu\Phi_1^{1/2}. \end{aligned}$$

В (2.8) $\dot{g} = dg/d\theta$; z — параметр класса тел: $z = (\tau/(2g))^2$ для тел класса 1 и $z = 1$ для тел класса 2.

3. Постановка вариационной задачи. Функционалы (2.4)–(2.6) не относятся к стандартным линейным функционалам, и их аналитическое исследование представляет значительную трудность. Для тонких тел ($g^2 \ll 1$) аналитическое решение вариационной задачи может быть получено с использованием методики, изложенной в [1]. Поперечный контур оптимального тонкого тела состоит из n одинаковых циклов (см. рис. 1, 2, $n = 4$), каждый из которых содержит две симметричные дуги соответственно с $\dot{g} \geq 0$ и $\dot{g} \leq 0$. Такие тела в аэродинамике принято называть звездообразными.

Для нетонких тел найти аналитическое решение вариационной задачи максимизации функционала (2.4) при различных изопериметрических условиях не представляется возможным.

Основываясь на результатах исследования оптимальных тонких тел [1], будем считать, что тела, принадлежащие классам 1 и 2, имеют циклически-симметричную форму головной части. Тогда поиск оптимальной поверхности головной части тела сводится к поиску функции $g(\theta)$ в полуцикле поперечного контура (n задано) при условии

$$(3.1) \quad \dot{g}(\theta) \geq 0, \theta \in [0, \pi/n].$$

Количество циклов n выбирается либо из технологических соображений, либо в результате сравнения глубин внедрения оптимальных тел с различным числом циклов.

Выражения (2.8) для циклически-симметричных поверхностей имеют вид

$$(3.2) \quad Y_1 = L^2 n \int_0^{\pi/n} \left[z \frac{g^3 \Phi_1}{(\Phi_1 + g^2)} \right] d\theta,$$

$$Y_2 = L^2 n \int_0^{\pi/n} \left[z \frac{g^2 \Phi_2}{(\Phi_1 + g^2)^{1/2}} \right] d\theta, \quad Y_3 = L^2 n \int_0^{\pi/n} [z g \Phi_2] d\theta.$$

Для тел класса 1 (см. рис. 1) рассмотрены следующие вариационные задачи поиска оптимальной головной части, отличающиеся изопериметрическими и краевыми условиями, налагаемыми на поперечный контур $g(\theta)$.

1. "Деформирование" передней части тела осуществляется при сохранении его объема, что отвечает условию

$$(3.3) \quad \int_0^{\pi/n} \frac{d\theta}{g} = \frac{2\pi}{\tau n}.$$

При этом на концы экстремали $g(\theta)$ не накладываются ограничения.

2. Объем тела сохраняется (3.3), и задается минимальный размер поперечного контура ($g_0 \equiv g(0) < \tau/2$).

3. Объем тела не сохраняется, но закрепляются концы экстремали в сечении $\xi = 1$:

$$g_0 < \tau/2, \quad g_1 \equiv g(\pi/n) = \tau/2.$$

В задачах 1, 2 следствием условия сохранения объема (3.3) являются соотношения $\xi_1 \leq 1$, $\xi_2 = \tau/(2g_0)$ (см. рис. 1). В задаче 3 сопряжение звездообразной и цилиндрической поверхностей начинается при $\xi_1 = 1$.

Для тел класса 2 (см. рис. 2) кроме вариационных задач 1—3, где условие сохранения объема, совпадающее в этом случае с условием сохранения площади миделева сечения тела, имеет вид

$$(3.4) \quad \int_0^{\pi/n} g^2 d\theta = \frac{\pi}{n} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2,$$

рассмотрены еще две задачи.

4. Заданы объем тела и максимальный радиус поперечного контура ($g_1 > \tau/2$).

5. Заданы объем, максимальный g_1 и минимальный g_0 радиусы поперечного контура тела.

Осуществляется максимизация функционала \bar{H} , равного отношению H (2.4) к соответствующей глубине проникания эквивалентного тела вращения, имеющего коническую головную часть с относительной толщиной τ .

Такой подход позволяет получить непосредственное представление о преимуществе оптимального пространственного тела, принадлежащего классу 1 или 2, по сравнению с эквивалентным телом вращения. Кроме того, H не зависит от массы тела.

Согласно (2.4), (3.2)—(3.4), если на концы экстремали не накладываются условия, решение задачи будет зависеть от следующих параметров:

$$(3.5) \quad \frac{\tau}{2}, \frac{A}{C} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2, \frac{B}{C} \left(\frac{\tau}{2} \right), \frac{2\mu}{\tau}, n.$$

Заметим, что указанный в п. 2 порядок величины σ_0 , при котором можно пренебречь потерей скорости за время неполного погружения головной части проникателя в среду, соответствует случаям, когда второй параметр в (3.5) имеет величину $\geq O(1)$. Если концы экстремали закреплены, то к параметрам (3.5) следует добавить также $2g_0/\tau$ и $2g_1/\tau$. Для тонких тел $((\tau/2)^2 \ll 1)$ первый параметр из (3.5) будет отсутствовать. Четвертый параметр из (3.5) указывает, что кулоновское трение является существенным параметром задачи, поскольку для реальных сред и относительных толщин $2\mu/\tau = O(1)$. Следует отметить также, что без привлечения необходимых условий экстремума, как это сделано в [1] для тонких тел, где критерием перехода от кругового к некруговому оптимальному контуру является одно условие, получение дополнительных сведений для ограничения числа параметров, определяющих решение задачи, не представляется возможным.

4. Метод решения. Для решения сформулированных выше задач был разработан и реализован численный алгоритм, в основу которого положен метод локальных вариаций [2].

Разобьем отрезок интегрирования $[0, \pi/n]$ на N равных частей с шагом $\tau_1 = \pi/(nN)$ и введем обозначения $\theta_m = m\tau_1$ ($m = 0, \dots, N$) и $g_m = g(\theta_m)$. Тогда в соответствии с линейной интерполяцией функции $g(\theta)$ и первым порядком конечно-разностной аппроксимации ее производной на интервале $\Delta\theta$ интегралы, входящие в (2.4), представляются формулами

$$(4.1) \quad I_i \equiv Y_i/(L^2 n) = \sum_{m=1}^N I_{im} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$I_{im}(g, \dot{g}) = \tau_1 f_i \left(\frac{g_m + g_{m-1}}{2}, \frac{g_m - g_{m-1}}{\tau_1} \right),$$

где f_i — подынтегральные функции.

В соответствии с (4.1) необходимо найти такое распределение величин g_m ($m = 0, \dots, N$), удовлетворяющее крайним условиям, условию (3.1) и изопериметрическому условию (3.3) (или (3.4)), которое доставляет максимум функционалу H .

Вычислительный алгоритм решения задачи состоит из следующих основных этапов. Выбирается начальное приближение для поперечного контура $g(\theta)$, удовлетворяющее изопериметрическим и крайним условиям, и на нем с использованием (4.1) вычисляется величина H . Последовательно для каждого $m \in [0, N]$ варьируется компонента g_m , причем $\delta g_m = h$ (h — заданная величина). Для каждой вариации проверяются крайние условия и условие (3.1). Для удовлетворения изопериметрическому условию (3.3) (или (3.4)) выполняется дополнительная вариация контура $g(\theta)$ в некоторой точке θ_l ($l \neq m$). При этом вариация $\delta g_l = h_l$ связана с h соответственно для изопериметрических условий (3.3) и (3.4) соотношениями

$$(4.2) \quad h_l = -h g_l^2 / g_m^2, \quad h_l = -h g_m / g_l.$$

После замены g_m на $g_m + h$, а g_l на $g_l + h_l$ вычисляются интегралы I_i (4.1) и функционал H . Из всех вариаций $\delta g_l = h_l$ ($l \neq m$) выбирается та, которая для заданной вариации $\delta g_m = h$ приводит к максимальному уве-

личению \bar{H} . Описанная процедура повторяется для вариации $\delta g_m = -h$. В итоге функции $g(\theta)$ присваивается то из новых значений $g_m + \delta g_m$, которое совместно с ответной вариацией контура в точке $\bar{\theta}_j$ дает наибольшее приращение H .

Итерация считается выполненной, если осуществлены допустимые вариации контура во всех точках θ_m . По окончании итерации получаем новое приближение для распределения g_m , удовлетворяющее изопериметрическому и краевым условиям. Функционал H для нового приближения не меньше, чем для начального приближения. Если после проведения очередной итерации для заданного h функционал H не увеличивается, то h уменьшается вдвое, и так продолжается до тех пор, пока вариация δg_m не станет достаточно малой. После этого τ_1 уменьшается вдвое, т.е. удваивается N — число разбиений отрезка $[0, \pi/n]$. Значения g_m во вновь образовавшихся точках определяются линейной интерполяцией по соседним точкам предыдущего распределения, и итерации возобновляются. Когда τ_1 станет достаточно мало и существенного увеличения функционала не происходит ($0 < \Delta H < \varepsilon$), вычислительный процесс поиска оптимального распределения g_m можно считать оконченным.

Для того чтобы конкретизировать понятие “достаточно малое“, необходимо рассмотреть вопрос о сходимости описанного метода. Можно показать, что решение, полученное методом локальных вариаций, удовлетворяет конечно-разностной аппроксимации уравнения Эйлера вариационной задачи с точностью до членов порядка $\max(h, h/\tau_1^2)$ на дугах экстремали $g > 0$. Отсюда следует, что вычислительный процесс при $h \ll \tau_1^2$ и $\tau_1 \rightarrow 0$ обеспечивает получение искомого решения.

Численный эксперимент показал, что если при изопериметрических условиях (3.3), (3.4) концы экстремали на отрезке $[0, \pi/n]$ не закреплены или задано только минимальное значение g_0 функции $g(\theta)$, то метод локальных вариаций обеспечивает сходимость к одному и тому же решению при любом начальном распределении g_m . Однако, как было показано в [1], слабые вариации, которые доставляет метод локальных вариаций, не всегда обеспечивают выделение решения вариационной задачи. В случае жестких краевых условий: задано g_1 либо заданы g_1 и g_0 , при изопериметрических условиях (3.3), (3.4) процесс сходимости зависит от выбора начального приближения для поперечного контура. Это объясняется тем, что слабые вариации $g(\theta)$, обусловленные указанным выше соотношением порядков величин h и τ_1 и условием (3.1), а также порядок аппроксимации (4.1) не могут обеспечить сходимость к искомому решению от любого начального распределения g_m .

В указанном случае особое значение приобретает выбор начального приближения. Заметим, что удачный выбор начального приближения не зависит от краевых условий существенно сокращает время, затрачиваемое на поиск решения вариационной задачи методом локальных вариаций.

Известно [1], что оптимальный поперечный контур тонкого пространственного тела состоит из набора дуг окружностей, отвечающих вырезкам из поверхностей круговых конусов, и регулярных дуг ($g > 0$) с переменной кривизной, сопрягающихся в токах излома поперечного контура. Однако непосредственный перенос оптимального контура теории тонкого тела на начальное приближение не является рациональным, так как, с одной стороны, требует затрат времени на его поиск, с другой — оптимальный контур толстого тела может иметь существенные отличия.

В связи со сказанным предпочтение следует отдать начальному приближению, представляющему собой контур, состоящий из дуги окружности ($g = 0$) и регулярных дуг ($g > 0$) — отрезков прямых, которым отвечают плоские участки поверхности головной части проникающего тела. Произвольные параметры, имеющиеся при выборе указанного класса дуг, составляющих начальное приближение, определяются в соответствии с налага-

емыми изопериметрическими и краевыми условиями. Если число произво-лов превышает число наложенных условий, то оставшиеся выбираются обес-печивающими наибольшее значение функционала H . Реализация такого подхода к выбору начального приближения поперечного контура в пакете программ и апробация на различных вариантах расчета показали его эф-фективность.

Определение формы головной части тела, состоящей из вырезов круго-вого конуса ($g = 0$) и плоскостей ($g > 0$), доставляющей максимум функ-ционалу H , где это позволяет набор краевых и изопериметрических условий, имеет и самостоятельное значение. С одной стороны, такая конфигурация с практической точки зрения является простейшей пространственной формой головной части тела, отвечающей поставленной задаче, с другой — позволя-ет непосредственно установить, насколько она уступает оптимальной прост-ранственной форме головной части в обеспечении глубины проникания тела.

5. Результаты расчетов. В качестве примера ниже приведены результа-ты расчетов по оптимизации головной части тела, состоящей из четырех циклов ($n = 4$), при проникании в суглинок с начальной скоростью $v_0 = 400$ м/с. В качестве головной части сравнения рассматривается круго-вой конус с относительной толщиной $\tau = 2\sqrt{S_M/\pi}/L = 2/3$. Были использо-ваны три модели взаимодействия: аналитическая модель Сагомояна [3] и эмпирические модель Забудского и Березанская модель [5]. Функционал глубины проникания H для первых двух моделей имеет вид (2.5), для третьей — (2.6).

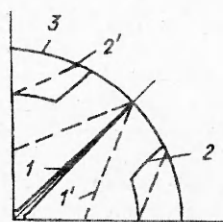
Расчеты проведены для тел как класса 1, так и класса 2. Минимальное значение функции $g(\theta)$ на отрезке $[0, \pi/n]$ во всех случаях считалось заданным: $g_0 = 0,25$. На рис. 3 представлена форма поперечных сечений оптимальной головной части тела класса 1 в одном из его циклов, найденная в рамках модели [3] при изопериметрическом условии (3.3). Сплошные кривые 1—3 соответственно отвечают сечениям $\xi_1 = 0,08$, $\xi = 1$, $\xi_2 = 1,33$ (см. рис. 1), штриховые 1', 2' — начальному приближению поперечного контура в сечениях $\xi_1 = 0,56$, $\xi = 1$. При этом относительная глубина внедрения тела с оптимальной головной частью $H = 1,89$, а с начальным попе-речным контуром $H' = 1,48$.

При том же изопериметрическом условии были найдены оптимальные поперечные контуры головной части тел в рамках модели Забудского и Березанской модели [5]. Расчеты показали слабое влияние типа модели на форму оптимальной головной части, которая качественно для указанных выше двух моделей имеет вид, изображенный на рис. 3. Причем для модели Забудского кривые 1, 2 отвечают сечениям $\xi_1 = 0,08$, $\xi = 1$, что совпадает с данными расчета по модели [3], а величина относительной глубины про-никания тела с оптимальной головной частью $H = 2,31$ и с начальным при-ближением ее поперечного сечения $H' = 1,64$. Соответственно для Березан-ской модели кривые 1, 2 отвечают сечениям $\xi_1 = 0,07$, $\xi = 1$ и $H = 1,38$, $H' = 1,2$.

Таким образом, форма оптимальной головной части консервативна к выбору модели взаимодействия при соответствующих изопериметрических и краевых условиях. Отличие же абсолютных значений H и H' является естественным следствием различных подходов при построении использу-емых моделей взаимодействия и их приближенности.

Другим важным результатом расчетов является значительное снижение максимальной перегрузки p у тела с оптимальной головной частью по сравнению с перегрузкой, испытываемой телом вращения с конической головной частью.

Отношение указанных величин \bar{p} (в случае, когда головная часть тела имеет начальный контур в поперечном сечении p') принимает соответствен-но для моделей Сагомояна, Забудского и Березанской модели следующие значения: $\bar{p} = 0,42$, $\bar{p}' = 0,62$; $\bar{p} = 0,41$, $\bar{p}' = 0,59$; $\bar{p} = 0,72$, $\bar{p}' = 0,83$.



Р и с. 3



Р и с. 4

На рис. 4 в рамках модели взаимодействия [3] при проникании в суглинков представлены формы поперечного сечения оптимального тела класса 2 (сплошная линия) и начального контура (штриховая) в одном из его циклов при изопериметрическом условии (3.4) и фиксированном максимальном значении функции $g(\theta)$ на отрезке $[0, \pi/n]$: $g_1 = 0,45$. Отметим, что начальный контур состоит из прямых и дуги окружности $g(\theta) = g_1$, образующей естественное затупление передней кромки цикла головной части тела. У тел класса 2, как и у тел класса 1, форма оптимальной головной части слабо зависит от выбора модели взаимодействия. Относительная глубина внедрения и максимальная перегрузка в данном случае для трех указанных выше моделей взаимодействия соответственно принимают значения: $H = 1,29$, $\bar{p} = 0,71$, $H' = 1,23$, $p' = 0,76$; $H = 1,38$, $\bar{p} = 0,71$, $H' = 1,3$, $\bar{p}' = 0,76$; $H = 1,14$, $\bar{p} = 0,87$, $H' = 1,12$, $\bar{p}' = 0,89$.

Заметим, что Березанская модель для обоих классов тел дает меньшие значения относительной глубины проникания по сравнению с таковыми для моделей Сагомояна и Забудского при мало отличающихся формах оптимальных головных частей тела. Это обусловлено различным аналитическим представлением сил, действующих на поверхности контакта тела со средой, в зависимости от скорости внедрения v : линейным для Березанской модели и квадратичным для двух других моделей. В то же время модели Сагомояна и Забудского, хотя и имеют разное происхождение, приводят к близким величинам глубины внедрения.

В целом представленные данные расчетов позволяют сделать вывод, что переход от эквивалентного тела вращения к оптимальным телам пространственной формы обеспечивает значительный выигрыш в глубине проникания.

В заключение отметим, что полученные численно структуры оптимальных поперечных контуров находятся в полном качественном соответствии с выводами, сделанными в [1] при наложении на экстремаль различных краевых условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. О телах наименьшего сопротивления, движущихся в средах при наличии закона локальности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1992. — № 1. — С. 95—106.
2. Баничук Н.В., Петров В.М., Черноусько Ф.Л. Метод локальных вариаций для вариационных задач с неаддитивными функционалами // ЖВММФ. — 1969. — № 5. — С. 548—557.
3. Сагомоян А.Я. Проникание. — М.: Изд-во МГУ, 1974.
4. Сагомоян А.Я. Пробивание плиты тонким твердым снарядом // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика. — 1975. — № 5. — С. 104—110.
5. Ефимов М.П. Курс артиллерийского снаряда. — М.: Оборонгиз, 1939.
6. Витман Ф.Ф., Степанов В.А. Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара $10^2 \div 10^3$ м/с // Некоторые проблемы прочности твердого тела. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959.

г. Москва

Поступила 10/IV 1992 г.,
в окончательном варианте — 21/IX 1993 г.