

УДК 532.517.4

## **О численном моделировании динамики однородной изотропной турбулентности\***

**М.К. Баев<sup>1</sup>, Г.Г. Черных<sup>1,2,3</sup>**

<sup>1</sup>*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Сибирский государственный университет телекоммуникаций  
и информатики, Новосибирск*

<sup>3</sup>*Новосибирский государственный университет*

E-mails: m.k.baev@gmail.com, chernykh@ict.nsc.ru

С применением ряда математических моделей, основанных на замкнутом уравнении Кармана–Ховарта, выполнено численное моделирование динамики однородной изотропной турбулентности. Результаты расчетов согласуются с известными экспериментальными данными. Проведено сопоставление математических моделей.

**Ключевые слова:** однородная изотропная турбулентность, уравнение Кармана–Ховарта, численное моделирование.

### **Введение**

Подробный обзор исследований динамики однородной изотропной турбулентности представлен в работе [1]. Обзор исследований, основанных на замкнутом уравнении Кармана–Ховарта [1], приведен, в частности, в работах [2, 3]. Там же обсуждалось турбулентное течение за нагретой решеткой в аэродинамической трубе. Среди работ, не вошедших в обзоры, отметим работу [4]. В ней выполнена постановка задачи и было получено аналитическое решение, соответствующее заключительной стадии вырождения изотропного турбулентного течения проводящей жидкости. В последнее время появился ряд работ, свидетельствующих о возросшем интересе к изотропным турбулентным течениям. Ведутся исследования динамики однородной изотропной турбулентности с применением уравнения Кармана–Ховарта. Автором работы [5] были предложены две математические модели динамики однородной изотропной турбулентности. В первой из них строится математическая модель, включающая в себя систему дифференциальных уравнений переноса продольных двухточечных корреляционных функций второго и третьего порядков. Первое уравнение системы — уравнение Кармана–Ховарта. Во второй модели осуществляется замыкание уравнения Кармана–Ховарта с учетом явления

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00426), СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 132) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке научных школ РФ (№ НШ-6293.2012.9).

перемежаемости турбулентного потока (дальнейшее развитие эта модель получила в работах [6–9]) с применением градиентной гипотезы, связывающей двухточечные продольные корреляционные функции второго и третьего порядков. При этом учитывается зависимость коэффициента турбулентной вязкости от турбулентного числа Рейнольдса  $Re_\lambda$ , определяемого по тейлоровскому микромасштабу  $\lambda$  [1]. В области больших турбулентных чисел Рейнольдса выражение для коэффициента турбулентной вязкости в этой модели согласуется с предложенным в работах [10, 11]. Полученные зависимости для масштаба пульсационной скорости и продольной корреляционной функции согласуются с известными асимптотическими представлениями и экспериментальными данными о вырождении сильной и слабой изотропной турбулентности.

Авторами работ [12], [13] был выполнен критический анализ способов аппроксимации двухточечных корреляционных моментов третьего порядка, входящих в незамкнутое уравнение Кармана–Ховарта. Результаты аппроксимации по различным методикам сопоставлялись с известными экспериментальными данными. Приведены соображения о количественной оценке точности аппроксимации, даны рекомендации по применению замыканий. В работе [14] на основе анализа Ляпунова осуществлено замыкание уравнения Кармана–Ховарта. Замыкание соответствует большим турбулентным числам Рейнольдса (полностью развитое турбулентное течение). Анализируются статистические характеристики поля скорости. Рассмотрен вопрос об автомодельном вырождении однородной изотропной турбулентности.

Явное представление автомодельных решений для замкнутого уравнения Кармана–Ховарта приведено в статье [15]. Решение, соответствующее постоянному инварианту Лойцанского, согласуется с полученным в работах [10, 16].

Геометрические свойства пространства двухточечных корреляционных функций, соответствующих изотропному турбулентному течению, изучались авторами работы [17]. Там же рассматривалась начально-краевая задача для замкнутого уравнения Кармана–Ховарта, была доказана теорема существования и единственности начально-краевой задачи, исследовано асимптотическое поведение решения при больших значениях времени и пространственной переменной.

Авторами работы [18] осуществлено прямое численное моделирование динамики однородной изотропной турбулентности, при очень больших турбулентных числах Рейнольдса  $Re_\lambda \approx 1280$ . Использовались гигантские расчетные сетки — расчеты проводились на сетке с числом ячеек  $4096 \times 4096 \times 4096$ . Основное внимание в этой работе уделено изучению свойств локальной изотропии течения.

Анализируя вышеупомянутые работы и цитированную в них литературу, можно отметить следующее. В настоящее время известен целый ряд полуэмпирических моделей динамики однородной изотропной турбулентности, основанных на замкнутом уравнении Кармана–Ховарта. Известно, что близкую к изотропной турбулентность можно создать в лабораторных условиях, помещая в рабочей части аэродинамической трубы турбулизующую решетку [1]. Детальные лабораторные измерения выполнены в работах [19, 20], там же осуществлено сопоставление ряда результатов измерений с расчетами по модели, представленной в работах [10, 11], и по известной модели Хассельмана [1]; показано, что расчеты, проведенные по модели [10, 11], лучше согласуются с результатами измерений [19, 20]. В экспериментах была достигнута высокая степень изотропии потока путем его поджатия. Результаты измерений могут использоваться в качестве начальных условий при проведении численного моделирования и для сопоставления с результатами расчетов в последующие моменты времени. Отсутствуют попытки сравнений ряда моделей динамики изотропной турбулентности, основанные на сопоставлении результатов расчетов по этим моделям с экспериментальными данными [19, 20]. Попытка восполнить имеющиеся пробелы предпринята в настоящей работе.

### 1. Численные модели динамики однородной изотропной турбулентности

Изотропное турбулентное течение описывается уравнением Кармана–Ховарта для двухточечных корреляционных функций [1]:

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \left( B_{LL,L} + 2\nu \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right). \quad (1)$$

Здесь  $B_{LL}$ ,  $B_{LL,L}$  — продольные двухточечные корреляционные функции второго и третьего порядка поля скорости,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости. Уравнение (1) незамкнуто. Ниже мы рассмотрим ряд известных к настоящему времени замыканий (1).

В качестве первой модели рассмотрим модель замыкания [10, 11]:

$$B_{LL,L} = 2K_1 \frac{\partial B_{LL}}{\partial r}, \quad K_1 = \alpha r \sqrt{2(B_{LL}(0,t) - B_{LL}(r,t))} = \alpha r \sqrt{D_{LL}(r,t)}. \quad (2)$$

Величина  $\alpha = 0,0764$  — эмпирическая постоянная, выбранная в работах [10, 11] из условия согласования с Колмогоровской асимптотикой в инерционном интервале масштабов в приближении локальной изотропии [1].

Во второй модели (упрощенная модель Миллионщикова [21, 22]) выражение для коэффициента турбулентной вязкости имеет вид

$$K_2 = \alpha r \sqrt{2B_{LL}(0,t)}. \quad (3)$$

В третьей модели предлагается следующее представление для коэффициента турбулентной вязкости [23]:

$$K_3 = \alpha_1 \varepsilon^{1/3} r^{4/3}, \quad \varepsilon = -\frac{3}{2} \frac{dB_{LL}(0,t)}{dt}, \quad \alpha_1 = \text{const}, \quad 0,06 \leq \alpha_1 \leq 0,08. \quad (4)$$

В настоящих расчетах полагалось  $\alpha_1 = 0,0764$ .

В работе [5] была предложена еще одна, четвертая математическая модель динамики однородной изотропной турбулентности, включающая в себя наряду с уравнением (1) дифференциальное уравнение переноса двухточечной корреляционной функции третьего порядка  $B_{LL,L}$ :

$$\frac{\partial B_{LL,L}}{\partial t} - D_{LL} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} = 2\nu \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 B_{LL,L} - \frac{\sqrt{D_{LL}}}{2\alpha_u r} B_{LL,L}, \quad (5)$$

здесь величина  $\alpha_u = 0,0764$  — эмпирическая постоянная.

Как отмечается в работе [5], градиентная гипотеза (2) является следствием усечения уравнения (5) в локально-равновесном приближении.

В пятой модели (см. [5–9]) предложено следующее представление коэффициента турбулентной вязкости  $\nu_e = \gamma K_T$ :

$$B_{LL,L} = 2\gamma K_T \frac{\partial B_{LL}}{\partial r}, \quad K_T = \nu K_T^+,$$

$$2K_T^+ = \frac{D_{LL} \tau_2^T}{3\nu a_1} = \frac{1}{3\nu \bar{a}_1 \bar{\alpha}} \frac{D_{LL}^{1/2}}{\left(\frac{1}{6} \frac{D_{LL}}{D_{LL}}\right)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\Lambda^2} + \frac{\psi_1^2}{r^2}\right)^{1/2}},$$

$$D_{ll} = D_{LL} + 2D_{NN}, \quad N \text{ — нормаль к } \mathbf{r}, \quad D_{NN} = D_{LL} + \frac{r}{2} \frac{\partial D_{LL}}{\partial r}.$$

Здесь  $\gamma = c_1 K_T^+$  — коэффициент перемежаемости,  $c_1 = 0,2 \div 0,3$ ,  $\bar{a}_1 = 5,25$ ,  $\alpha = 0,204$ ,  $\psi_1 = 3,21$  — эмпирические постоянные (в расчетах настоящей работы полагалось  $c_1 = 0,2$ ),

$\Lambda = \frac{1}{u^2} \int_0^\infty B_{LL} dr$  — интегральный масштаб турбулентности,  $u^2 = B_{LL}(0, t)$ . В настоящей работе проводились расчеты как с непосредственным вычислением интегрального масштаба, так и с примененной в работах [5–9] аппроксимацией, основанной на результатах [24]:

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = 1,25 + 0,041 \cdot \text{Re}_\lambda^{1/2} (\text{Re}_\lambda^{1/2} - 1), \quad \text{Re}_\lambda = \frac{\sqrt{u^2} \lambda}{\nu}, \quad \lambda^2 = \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)_{r=0}^{-1}, \quad f = \frac{B_{LL}(r, t)}{u^2}.$$

Наконец, в шестой модели [14]

$$\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 B_{LL,L}) = \frac{\sqrt{D_{LL}}}{2} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r}. \quad (6)$$

Замкнутое уравнение (1) или систему уравнений (1), (5) необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

В начальный момент времени задается начальное условие  $B_{LL}(r, t_0) = \Phi_1(r)$ ,  $\Phi_1(r)$  — функция, согласующаяся с результатами измерений [19, 20]. В модели 4 дополнительно принимается  $B_{LL,L}(r, t_0) = 2K_1 \frac{\partial B_{LL}(r, t_0)}{\partial r}$ , либо задаются результаты измерений [20]:

$$B_{LL,L}(r, t_0) = \Phi_2(r).$$

Граничные условия для замкнутого уравнения (1) следующие (граничное условие для  $B_{LL,L}$  необходимо в модели 4):

$$r = 0: \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} = B_{LL,L} = 0; \quad r \rightarrow \infty: B_{LL} \rightarrow 0, \quad B_{LL,L} \rightarrow 0.$$

Алгоритм решения задачи и результаты его тестирования достаточно подробно изложены в работах [2, 3, 11] и здесь приводиться не будут (исключение составляет модель 4; при численной реализации уравнения переноса  $B_{LL,L}$  применялась аналогичная разностная схема).

## 2. Результаты расчетов

Сопоставление моделей осуществлено на задаче о вырождении турбулентности за решеткой в аэродинамической трубе [19, 20]. В качестве начальных условий при  $\tilde{t}_0 = x/M = 40$  задавались экспериментальные данные [19, 20]. Здесь  $x$  — расстояние от решетки (играет роль времени),  $M$  — размер ячейки турбулизующей решетки. Переменные задачи могут быть обезразмерены с использованием масштабов скорости  $U_\infty$  (скорость потока в рабочей части трубы или канала) и длины  $M$ . В результате обезразмеривания в уравнениях моделей вместо величины  $\nu$  используется  $1/\text{Re}_M$ ,  $\text{Re}_M = U_\infty M/\nu$  — число Рейнольдса; в роли времени будет выступать величина  $\tilde{t} = x/M$  (в дальнейшем знак обезразмеривания будет по возможности опущен).

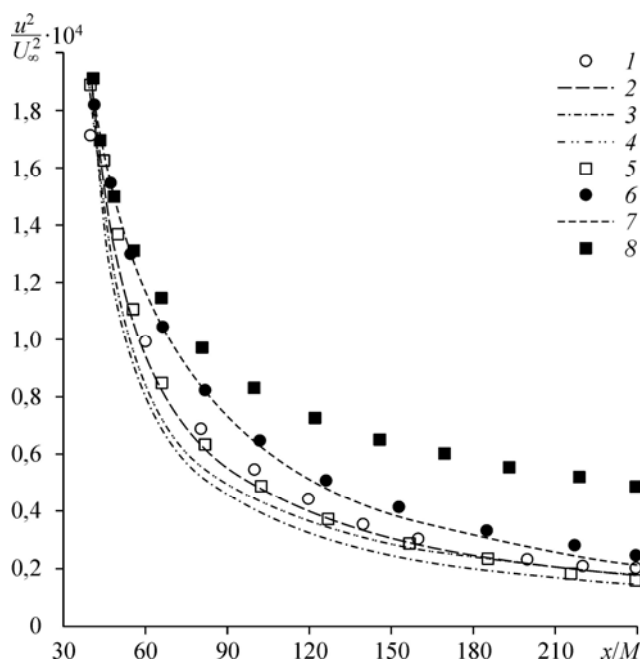


Рис. 1. Изменение величины  $u^2 = B_{LL}(0, t)$  в зависимости от расстояния от решетки.

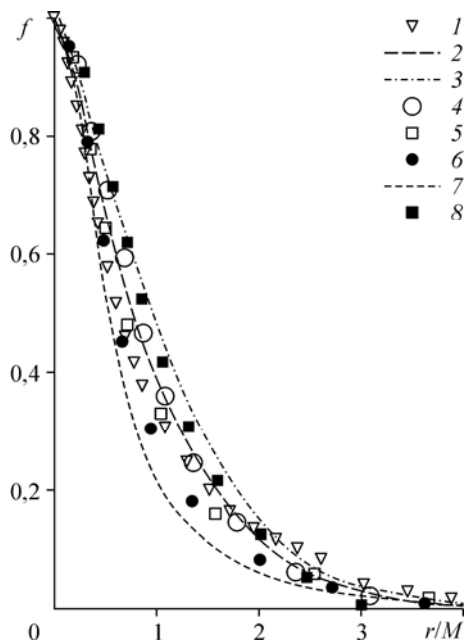
Эксперимент (1); расчет по моделям: 1 [10, 11] (2), 2 [21, 22] (3), 3 [23] (4), 4 [5] (5), 5 [5–9] (6), 5 с примененной в работах [5–9] аппроксимацией [24] (7), 6 [14] (8).

Изменение в зависимости от расстояния от решетки рассчитанной и измеренной величины  $B_{LL}(0, t)$  представлено на рис. 1. Можно видеть, что результаты расчетов по моделям 1 и 4 наиболее близки к экспериментальным данным (расчеты по ним практически совпадают). Удовлетворительное согласие дают модели 2, 3, 5 (последняя в двух модификациях). Две модификации модели 5 дают близкие друг другу результаты. К значительным отклонениям приводит модель 6 (здесь следует отметить, что в работе [14] замыкание уравнения Кармана–Ховарта осуществлялось в предположении  $Re_\lambda \gg 1$ ; в экспериментальных данных [19, 20] величина  $Re_\lambda \approx 20$  при  $\tilde{x}/M = 40$ ).

Рассчитанная нормированная функция  $f(r) = B_{LL}(r, t) / B_{LL}(0, t)$  для  $t = 200$  сопоставляется с экспериментальными данными на рис. 2. Можно видеть, что удовлетворительное согласие с экспериментальными данными дают практически все модели, кроме модели 5 с аппроксимацией микромасштаба [24].

Рис. 2. Сопоставление рассчитанной и измеренной нормированных корреляционных функций  $f(r) = B_{LL}(r, \tilde{t}) / B_{LL}(0, \tilde{t})$  для  $\tilde{t} = x/M = 200$ .

Обозначения см. на рис. 1.



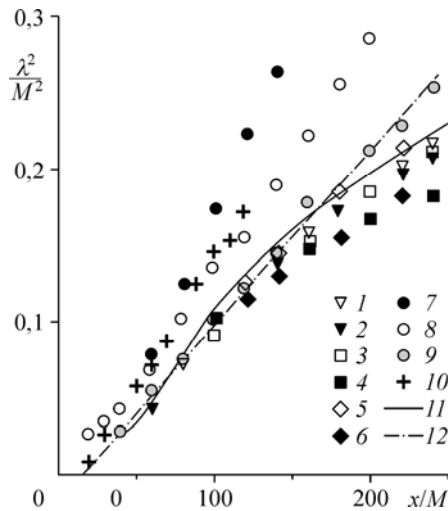


Рис. 3. Тейлоровский микромасштаб  $\lambda$ .

Расчет по моделям: 1 [10, 11] (1), 2 [21, 22] (2), 3 [23] (3), 4 [5] (4), 5 [5–9] (5), 5 с примененной в работах [5–9] аппроксимацией [24] (6), 6 [14] (7), результаты измерений [19, 20] при  $c = 1$  (8), 1,56 (9), результаты экспериментов [25] (10), результаты расчетов [19, 20] (11), аппроксимация из работ [19, 20] (12).

Наряду с результатами, представленными на рис. 1, 2, течение характеризуется также поведением тейлоровского микромасштаба  $\lambda$  (рис. 3) и интегрального масштаба  $L$  (рис. 4). Как уже отмечалось выше, высокая степень изотропии в измерениях достигалась путем поджатия потока, характеризуемого величиной  $c$ , равной отношению площадей поперечного сечения аэродинамической трубы до и после сужения.

Результаты измерений существенно зависят от этого параметра.

Модель 6 на рис. 3 приводит к весьма большим отклонениям. Штрих-пунктирной

линией на рис. 3 обозначена аппроксимация [19, 20]:  $\frac{\lambda^2}{M^2} = \frac{10}{\text{Re}_M} \frac{x-x_0}{M}$ ,  $\frac{x_0}{M} = 17,2$ ,

на рис. 4 — аппроксимация [19, 20]:  $\frac{L}{M} = \frac{L_*}{M} \left( \frac{x-x_1}{M} \right)^{\alpha_1}$ ,  $\frac{L_*}{M} = 0,058$ ,  $\frac{x_1}{M} = -70$ ,

$\alpha_1 = 0,5$ , полученная методом наименьших квадратов (рисунки с этими данными заимствованы из работ [19, 20], и дополнены результатами расчетов настоящей работы). Значительные отклонения дают модели 2 и 5 с аппроксимацией [24]. Расчеты настоящей работы несущественно отличаются от расчетов работ [19, 20]. В [19, 20] величина  $\varepsilon$  в замыкании (2) полагалась равной 0,0707, что соответствует значению универсальной колмогоровской постоянной  $C = 2$ , в настоящей работе авторы придерживались значения  $C = 1,9$ , рекомендованного в [1].

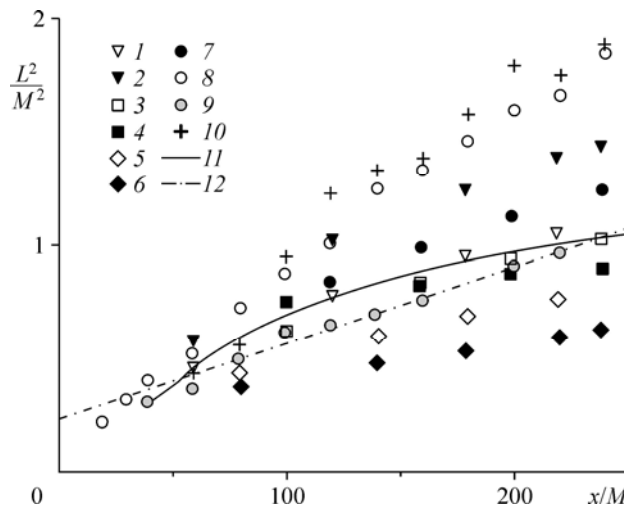


Рис. 4. Интегральный масштаб  $L$ .  
Обозначения см. на рис. 3.

Анализируя представленные результаты расчетов, можно отметить, что лучшее согласие получается при применении модели 1 [10, 11]. К близким результатам приводит модель 4 [5].

Известно, что сильной однородной изотропной турбулентности соответствуют законы вырождения А.Н. Колмогорова [1]:  $u^2(t) \sim t^{-10/7}$ ,  $\Lambda \sim t^{2/7}$ . В процессе вычислений анализировалось поведение величин  $A_1(t) = u^2(t) \cdot t^{10/7}$ ,  $A_2(t) = \Lambda \cdot t^{-2/7}$ . В частности, при  $t = 80$  получено, что  $A_1(t) = 0,033$ ,  $A_2(t) = 0,241$ . При  $t = 200$  эти величины составили 0,042 и 0,280, что свидетельствует о достаточной близости законов вырождения однородной изотропной турбулентности на начальном этапе вышеупомянутым законам А.Н. Колмогорова. Расчеты проводились на основе модели 1.

Отметим, что соответствие способов замыкания уравнения Кармана–Ховарта при  $Re_\lambda \gg 1$  в области малых масштабов  $r \ll 1$  гипотезам подобия Колмогорова [1] обсуждалось в [2, 3, 5–14, 16, 19–20, 22, 23, 26].

Основные результаты настоящей работы сводятся к следующему. Построены основанные на замкнутом уравнении Кармана–Ховарта численные модели динамики однородной изотропной турбулентности. Результаты расчетов согласуются с известными экспериментальными данными. Проведено сопоставление математических моделей.

Авторы благодарят В.А. Костомаху, А.Т. Онуфриева, О.А. Пыркову, Э.В. Теодоровича и В.А. Фроста за предоставленные материалы.

### Список литературы

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. 2-е изд., перераб. и доп. Т. 2. СПб: Гидрометеоиздат, 1996. 742 с.
2. Baev M.K., Chernykh G.G. On Corrsin equation closure // J. of Eng. Thermophysics. 2010. Vol. 19, No. 3. P. 154–169.
3. Баев М.К., Черных Г.Г. Численная модель турбулентного течения за нагретой решеткой в аэродинамической трубе // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 10. С. 44–64.
4. Ватажин А.Б. Электрогидродинамические турбулентные течения // Тр. МИАН СССР: “Современные математические проблемы механики и их приложения, к 80-летию со дня рождения Леонида Ивановича Седова”. 1989. Т. 186. С. 168–176.
5. Онуфриев А.Т. Описание турбулентного переноса. Неравновесные модели: учеб. пособие. М.: МФТИ, 1995. 172 с.
6. Онуфриев А.Т., Пыркова О.А. Задача о затухании слабой турбулентности в однородном изотропном потоке. М., 2005. 12 с. (Препринт / Московский физ.-техн. институт; № 2005-1).
7. Онуфриев А.А., Онуфриев А.Т., Пыркова О.А. Приближенное решение задачи о затухании однородной изотропной турбулентности с учетом явления перемежаемости в потоке. М., 2008. 12 с. (Препринт / Московский физ.-техн. институт; № 2008-1).
8. Онуфриев А.А., Онуфриев А.Т., Пыркова О.А. Задача о затухании однородной изотропной турбулентности с учетом явления перемежаемости // Актуальные проблемы фундаментальной и прикладной математики: сб. науч. трудов. М.: МФТИ, 2009. С. 124–135.
9. Пыркова О.А., Онуфриев А.А., Онуфриев А.Т. Поведение скорости в однородном изотропном потоке на начальном этапе // Тр. МФТИ. 2011. Т. 3, № 1. С. 127–131.
10. Лыткин Ю.М., Черных Г.Г. Об одном способе замыкания уравнения Кармана–Ховарта // Динамика неоднородной жидкости (Динамика сплошной среды): сб. науч. тр. Новосибирск, 1976. Вып. 27. С. 124–130.
11. Лыткин Ю.М., Черных Г.Г. Расчеты корреляционных функций в изотропной турбулентности // Динамические задачи механики сплошных сред (Динамика сплошной среды): сб. науч. тр. Новосибирск, 1978. Вып. 35. С. 74–88.
12. Теодорович Э.В., Фрост В.А. Двухточечные третьи моменты поля скорости в однородной турбулентности. Точность аппроксимации. 2010. 24 с. (Препринт / ИПМех; № 958).
13. Babenko V.A., Frost V.A. Approximation accuracy of the two-point third moments of the velocity field in the homogeneous turbulence // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2012. Vol. 55. P. 2676–2683.
14. De Divitiis N. Self-similarity in fully developed homogeneous isotropic turbulence using the Lyapunov analysis // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2012. Vol. 26. P. 81–92. DOI 10.1007/S00162-010-0213-7.
15. Zeng L., Oberlack M., Grebenev V.N., Liao S. Explicit series solution of closure model for the Karman–Howarth equation // J. ANZIAM. 2010. Vol. 52, No. 2. P. 179–202.

16. Oberlack M., Peters N. Closure of the two-point correlation equation as a basis for Reynolds stress models // Applied Scientific Research. 1993. Vol. 51, Issue 1–2. P. 533–538.
17. Grebenev V.N., Oberlack M. A geometry of the correlation space and nonlocal degenerate parabolic equation from isotropic turbulence // ZAMM. 2012. Vol. 92, No. 3. P. 179–195.
18. Takashi I., Toshiyuki G., Yukio K. Study of high-Reynolds number isotropic turbulence by direct numerical simulation // Annual Rev. Fluid Mech. 2009. No. 41. P. 165–180.
19. Костомаха В.А. Экспериментальное моделирование изотропной турбулентности // Нестационарные задачи механики сплошных сред (Динамика сплошной среды): сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд.-е. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 70. С. 92–104.
20. Костомаха В.А. Структура изотропной и локально изотропной турбулентности: Дис. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1986. 197 с.
21. Миллионщиков М.Д. Изотропная турбулентность в поле турбулентной вязкости // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 10, вып. 8. С. 406–411.
22. Миллионщиков М.Д. О структуре коэффициента турбулентной вязкости для изотропной турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11, вып. 5. С. 203–206.
23. Domaradzki J.A., Mellor G.L. A simple turbulence closure hypothesis for the triple-velocity correlation functions in homogeneous isotropic turbulence revisited // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 140. P. 45–61.
24. Driscoll R.J., Kennedy L.A. A model for the turbulent energy spectrum // Phys. of Fluids. 1983. Vol. 26, No. 5. P. 1228–1233.
25. Batchelor G.K., Townsend A.A. Decay of isotropic turbulence in the initial period // Proc. Roy. Soc. A. 1948. Vol. 193, No. 1035. P. 539–558.
26. Chernykh G.G., Korobitsina Z.L., Kostomakha V.A. Numerical simulation of isotropic turbulence dynamics // Intern. J. of Comp. Fluid Dynamics. 1998. Vol. 10, No. 2. P. 173–182.

*Статья поступила в редакцию 11 декабря 2013 г.*