

УДК 534.222+539.374

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УДАРНО-НАГРУЖЕННЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛАХ

Н. Н. Мягков

Институт прикладной механики РАН, 117334 Москва

Выполнено моделирование нелинейных волновых процессов в ударно-нагруженных упругопластических материалах. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными и численными решениями точных систем динамических уравнений позволяет сделать вывод, что предложенные модельные уравнения качественно описывают эволюцию распределения напряжений как в области упругого течения, так и в области пластического течения, и могут быть использованы для решения одно- и двумерных задач импульсного деформирования и разрушения упругопластических сред.

Ключевые слова: нелинейные волны, взаимодействие волн, ударно-нагруженные материалы, упругопластические материалы.

Введение. Исследование эволюции нелинейных волн, порожденных взрывным или ударным нагружением материалов и конструкций, представляет научный и практический интерес. Эксперименты такого рода обычно проводятся в условиях импульсного нагружения контактным взрывом взрывчатых веществ или ударом со скоростями до 2 км/с, что соответствует интервалу напряжений от нескольких единиц до десятков гигапаскалей. Как правило, в этих случаях амплитуда напряжений мала по сравнению с модулем объемного сжатия материала (но значительно превышает предел упругости), поэтому возможно использование асимптотических методов моделирования ударно-волновых процессов. По-видимому, в большинстве случаев построение асимптотических моделей является единственной возможностью проведения аналитических исследований и построения упрощенных численных алгоритмов.

1. Асимптотические модели распространения нелинейных продольных волн в упругопластических средах. В [1, 2] построена асимптотическая модель распространения нелинейных продольных волн в упругопластических средах. Предложенные уравнения модели имеют вид [1, 2]

$$\lambda_i \frac{\partial V_i}{\partial z} - \frac{1}{4} (\alpha + 2) V_i \frac{\partial V_i}{\partial \xi_i} - 3\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_i} - \frac{1}{2} \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial \xi_i^2} - \frac{1}{2} \varepsilon_\Delta \int_{-\infty}^{\xi_i} \Delta_\perp V_i d\xi'_i = 0. \quad (1)$$

Здесь $V_i = -\sigma'_{11} + \lambda_i u'_1$; $\sigma'_{11} = \sigma_{11}/(\rho_0 C_0^2)$; $u'_1 = u_1/C_0$; $\lambda_{1,2} = \pm 1$; $z = x'_1(1 + O(\varepsilon))$ — безразмерная лагранжева координата по направлению оси x_1 ; $\xi_i = t' - \lambda_i^{-1} x'_1$ — фазовая переменная; $t' = t/t_0$; $x'_1 = x_1/(C_0 t_0)$; t_0 — характерное время; C_0 — объемная скорость звука; $\Delta_\perp = \partial^2/\partial r'^2 + (1/r')\partial/\partial r'$ ($r' = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}/r_0$); σ_{11} , u_1 — компоненты тензора напряжений и вектора скорости перемещения среды; ρ_0 — невозмущенная плотность; ε , ε_Δ , ν , μ — малые параметры: ε определяется как отношение модуля амплитуды напряжений к модулю объемного сжатия; ε_Δ характеризует поперечную расходимость (дифракцию

волны) и определяется как квадрат отношения длины волны к линейному размеру области нагружения; $\nu = (C_l^2 - C_0^2)/(2C_0^2)$ (C_l — фазовая скорость продольных упругих волн); μ характеризует вязкость внутреннего трения и теплопроводность; параметр α определяется из уравнения состояния.

Уравнения (1) замыкаются определяющим уравнением среды, устанавливающим функциональную связь между $\psi_i(z, \xi_i)$ и $V_i(z, \xi_i)$, которую можно представить в виде $\psi_i = \hat{R}[V_i]$. Через $\hat{R}[V_i]$ обозначен результат действия нелинейного оператора, задаваемого в неявном виде решением определяющего уравнения. Для обеспечения равномерной пригодности уравнений (1) при $z \leq O[\min\{\varepsilon^{-1}, \mu^{-1}, \nu^{-1}, \varepsilon_{\Delta}^{-1}\}]$ достаточно выполнения условий

$$|J_i^{(\varepsilon)}| = O(\varepsilon), \quad |J_i^{(\nu)}| = O(\varepsilon), \quad (2)$$

где

$$J_i^{(\varepsilon)} = \int_{-\infty}^{\xi_j} V_j d\xi_j; \quad J_i^{(\nu)} = \int_{-\infty}^{\xi_j} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_i} \right) d\xi_j; \quad \psi = \hat{R}[V_1 + V_2]; \quad \xi_j \in (-\infty, +\infty);$$

$i, j = 1, 2$ ($i \neq j$). Выполнение первого условия в (2) обеспечивается заданием подходящих граничных условий. Из вида интегралов $J_i^{(\nu)}$ следует, что второе условие в (2) должно выполняться, по крайней мере, для быстро убывающих решений V_j при $|\xi_j| \rightarrow \infty$. Вообще говоря, проверить выполнение этого условия можно только при известных функциях V_j , т. е. после решения задачи.

При выводе уравнений (1) можно получить “самосогласованные” выражения, дающие зависимость между скоростью и напряжением с точностью до членов второго порядка малости включительно:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= -\lambda_i u'_1 - \frac{1}{4}(\alpha + 2)u_1'^2 + \frac{1}{2}\mu\lambda_i \frac{\partial u'_1}{\partial \xi_i} - \frac{3}{2}\nu\psi, \\ \lambda_i u'_1 &= -\sigma'_{11} - \frac{1}{4}(\alpha + 2)\sigma_{11}'^2 - \frac{1}{2}\mu \frac{\partial \sigma'_{11}}{\partial \xi_i} - \frac{3}{2}\nu\psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Выражения (3) представляют собой обобщение известных соотношений в нелинейной акустике [3] на случай неупругой среды.

Для учета взаимодействия нелинейных волн, относящихся к различным характеристическим направлениям, фазовые переменные в отличие от (1) необходимо представить в виде [1, 2]

$$\xi_i = t' - \lambda_i^{-1}(x'_1 + \varepsilon\Phi_i(x'_1, t') + \nu\theta_i(x'_1, t')), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

т. е. в фазовые переменные вносятся поправки порядка ε и ν . В результате исходная система уравнений вновь приводится к уравнениям (1), определяющему уравнению и уравнениям для фазовых функций:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} &= -\frac{1}{4}(\alpha + 2)V_j, \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial z} &= -3 \left(\frac{\partial \psi / \partial \xi_i}{\partial V / \partial \xi_i} - \frac{\partial \psi_i / \partial \xi_i}{\partial V_i / \partial \xi_i} \right)_z, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $V = V_1 + V_2$. Отметим, что взаимодействие волн учитывается неявно посредством неоднородной деформации фазовых переменных в решении, полученном без учета взаимодействия.

Введение поправок порядка ε и ν в фазовые переменные позволяет расширить область применимости решений уравнений (1) на случай протяженных волн. При этом решения уравнений (1) дают первое приближение, равномерно пригодное при $z \leq O[\min\{\varepsilon^{-1}, \mu^{-1}, \nu^{-1}, \varepsilon_{\Delta}^{-1}\}]$.

Следует отметить, что в систему уравнений (1), описывающую квазиплоские волны, определяющее уравнение входит таким же образом, как и в систему уравнений для плоских волн. При решении конкретных задач необходимо задать вид зависимости $\psi_i = \dot{R}[V_i]$. Например, чтобы воспользоваться для этих целей дислокационными соотношениями, определяющее уравнение удобно записать в форме Малверна — Дувалла [4], которое в наших обозначениях примет вид

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_i} = \frac{1}{3} \frac{\partial V_i}{\partial \xi_i} + \frac{4}{3} \frac{\partial \varepsilon^p[V_i, \psi_i]}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

где ε^p — пластическая деформация сдвига. На основе дислокационных представлений скорость пластической деформации поликристаллических тел определяется обычно соотношением Орована [5].

Зависимости $\psi = \psi(V)$, замыкающие уравнения (1), могут быть заданы из определяющих соотношений теории малых упругопластических деформаций [6]. В случае, когда для описания пластического поведения среды используется модель упругопластического течения типа модели Прандтля — Рейсса [6, 7], определяющее уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_i} = \frac{1}{3} \frac{\partial V_i}{\partial \xi_i} - \bar{\lambda} \psi_i, \quad i = 1, 2.$$

Параметр $\bar{\lambda}$ определяется из условия текучести Мизеса, которое в случае одноосной деформации имеет вид $|\psi_i| \leq Y/(3G)$ (Y — предел текучести при растяжении; G — модуль сдвига). В общем случае предел текучести представляется функцией давления, температуры, пластических деформаций, скоростей деформаций и других параметров состояния.

С помощью выражений (3) легко оценить остаточную массовую скорость в средних сечениях образца после прохождения локализованного импульса нагрузки, у которого нормальное напряжение стремится к нулю при $\xi_1 \rightarrow \pm\infty$. Остаточная скорость появляется вследствие гистерезиса цикла упругопластического деформирования и составляет (при оценке скорости в (3) полагалось $\mu' = 0$) $u_1' = -(3/2)\nu\psi_1(+\infty)$, где $\psi_1(+\infty) = -Y/(3G)$. Остаточная массовая скорость наблюдалась, например, в экспериментах [8].

Выпишем приближенную систему уравнений, аналогичную (1), в переменных $(t', \tilde{\xi}_i)$:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t'} + \frac{1}{4} \lambda_i(\alpha + 2)V_i \frac{\partial V_i}{\partial \tilde{\xi}_i} + 3\lambda_i\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{\xi}_i} - \frac{1}{2} \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial \tilde{\xi}_i^2} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\Delta} \int_{-\infty}^{\tilde{\xi}_i} \Delta_{\perp} V_i d\tilde{\xi}_i' = 0, \quad (1')$$

где $\tilde{\xi}_i = x_1' - \lambda_i t'$ ($i = 1, 2$). Учет взаимодействия нелинейных волн, относящихся к различным характеристическим направлениям, здесь также осуществляется путем представления фазовых переменных в виде (4) с последующей записью уравнений для фазовых функций.

2. Плоские задачи распространения и взаимодействия ударных волн.

2.1. *Распространение ударного импульса при соударении пластин.* Рассмотрим нормальный удар пластины толщиной l со скоростью $u_0 > 0$ ($u_0/C_0 \sim \varepsilon \ll 1$) в момент $t = 0$ по поверхности покоящейся пластины-мишени толщиной L . Поперечные размеры пластин много больше их толщины, что позволяет рассматривать задачу как одномерную. Считаем, что ударник и мишень изготовлены из одного и того же материала — алюминия.

Будем рассматривать эволюцию волны V_1 в мишени в случае, когда l мало по сравнению с L , что, как правило, реализуется в эксперименте. В этом случае граничное условие на свободной поверхности можно представить в виде

$$V_1 = \begin{cases} u_0/C_0, & 0 < t \leq t_1, \quad x_1 = -l + u_0t, \\ 0, & t > t_1, \quad x_1 = -l + u_0t_1, \end{cases} \quad (7)$$

где $t_1 = (l/C_0)/(1 + (\alpha + 2u_0)/(8C_0))$. При записи (7) пренебрегается искажением профиля вследствие упругопластического деформирования при распространении ударной волны V_2 от поверхности соударения до свободной поверхности ударника, но учитывается сдвиг фазы за счет нелинейности.

При описании эволюции ударной волны в мишени будем искать решение V_1 уравнения (1') в плоском случае ($\varepsilon_\Delta = 0$) с начальным условием

$$V_1 = \begin{cases} u_0/C_0 > 0, & -l \leq x_1 < 0, \\ 0, & 0 \leq x_1 \leq L, \end{cases} \quad t = 0$$

и граничным условием (7) с учетом того, что в средних сечениях мишени $V_2 = 0$. Начальное давление бралось из решения задачи о распаде разрыва на контактной границе $x_1 = 0$. Полагалось $\psi_1 = 2\tau/(3G)$, где $\tau = -(\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

При описании поведения среды примем дислокационную модель. Используем уравнение (6), в которое вместо ξ_1 подставлено $\xi'_1 = (x_1 - C_0t)/l$, а скорость пластической деформации определим соотношением Орована [5]

$$\frac{\partial \varepsilon^p}{\partial \xi'_1} = bN_d v_d,$$

где b — смещение Бюргера. Конкретные зависимости для плотности движущихся дислокаций N_d и средней скорости их движения v_d брались в соответствии с моделью, предложенной в работе [9]. Остальные параметры материала: $\rho_0 = 2,787$ г/см³, объемный модуль $K = 764$ кбар. Коэффициент Пуассона полагался равным 0,33. Уравнение состояния имеет вид $P = (K/n)[(\rho/\rho_0)^n - 1]$, где $n = 4,1$. Таким образом, параметры α и $\nu' = 2\nu/(\alpha + 2)$, входящие в уравнение (1'), принимают значения $\alpha = 3,1$ и $\nu' = 0,1$.

Поставленная задача решалась численно с использованием искусственной вязкости для скорости соударения $u_0 = 1,2$ км/с и толщины ударника 1,5 мм. Получены профили волны напряжения и распределения максимальных касательных напряжений τ в пластине-мишени в различные моменты времени после удара. На рис. 1 приведены зависимости $\tau(X)$, где $X = x_1|_{t=0}$. Видно, что полученные результаты согласуются с результатами численного решения точной системы уравнений [9].

2.2. Отражение ударного импульса конечной длительности от свободной поверхности. При выходе ударного импульса на свободную поверхность происходит его отражение, т. е. взаимодействие падающего импульса с отраженной волной. Уравнения (1), (4), (5) позволяют рассмотреть задачу об отражении ударного импульса при малых, но конечных деформациях.

Проведем моделирование экспериментальных данных Тейлора и Райса [10, с. 29] с использованием дислокационной модели [5]. Расчет взаимодействия волн выполнен по одномерному варианту уравнений (1) с использованием уравнений для фазовых функций (4), (5). На рис. 2 представлены зависимости скорости свободной поверхности u_s от времени для пластины из армо-железа толщиной 5,08 см, нагруженной нормальным ударом со скоростью 170 м/с (ударник изготовлен из того же материала, что и мишень). Видно, что численное решение, учитывающее взаимодействие падающей и отраженной волн, хорошо согласуется с экспериментальными данными Тейлора и Райса.

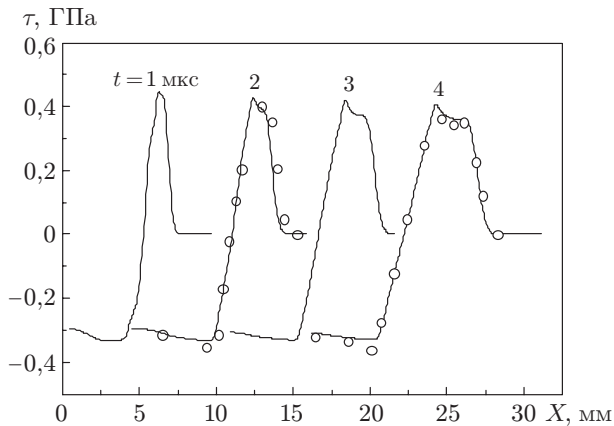


Рис. 1

Рис. 1. Распределения касательного напряжения τ в различные моменты времени (точки — численное решение [9])

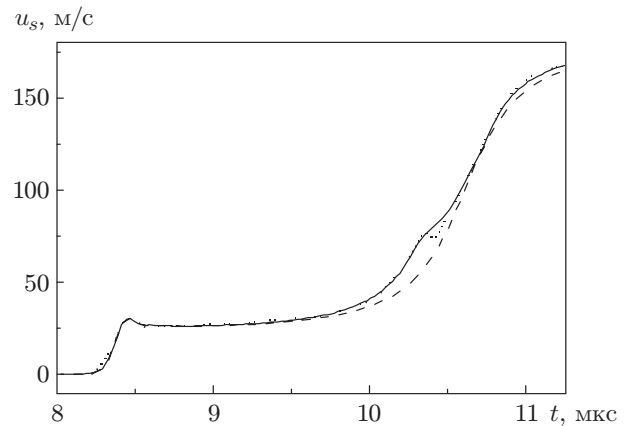


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость скорости свободной поверхности u_s от времени:

сплошная кривая — численное решение с учетом взаимодействия падающей и отраженной волн, штриховая — численное решение без учета этого взаимодействия, пунктирная — экспериментальные данные Тейлора и Райса [10, с. 29]

При измерении скорости поверхности образца использовался лазерный интерферометр [10]. На контактной поверхности образец — окно интерферометра интенсивность и знак отраженной волны зависят от отношения импедансов $\bar{\alpha} = \bar{\rho}\bar{C}/(\rho_0 C_0)$ ($\bar{\rho}$, \bar{C} — плотность и скорость звука в материале окна): $V_2 = -V_1(1 - \bar{\alpha})/(1 + \bar{\alpha})$. В качестве материала окна лазерного интерферометра используются кварцевое стекло, сапфир, LiF и др. Если $\bar{\alpha} < 1$, то отраженная волна является волной разрежения, и ее влияние на скорость контактной поверхности образца аналогично влиянию в случае свободной поверхности $\bar{\alpha} = 0$, рассмотренном выше. В данном случае вторая ступенька предвестника имеет амплитуду, зависящую от $\bar{\alpha}$. Этот вывод подтверждается экспериментами со сплавом титана Ti — 6 % Al — 4 % V [11], в которых были определены двухступенчатый предвестник в профиле скорости контактной поверхности образец — LiF ($\bar{\alpha} < 1$) и одноступенчатый предвестник в случае контакта образца с сапфиром ($\bar{\alpha} > 1$).

3. Повреждение плоской пластины при ударе цилиндрическим ударником.

С использованием уравнений (1) численно решена модельная задача о повреждении пластины конечной толщины при нормальном ударе цилиндрическим ударником со скоростью 185 м/с. Фазовый сдвиг, вызванный взаимодействием волн, не учитывался. Метод численного решения уравнений (1) аналогичен использованному в работе [12].

Материал ударника и мишени — алюминий с параметрами $\rho_0 = 2,61$ г/см³, $C_0 = 5,3$ км/с, $C_l = 6,4$ км/с. В качестве определяющего бралось уравнение, соответствующее модели идеально пластического деформирования, с динамическим пределом текучести $Y = 0,18$ ГПа [13]. Толщина ударника $l = 1,14$ мм, толщина мишени $L = 2,8l$. Радиус ударника принимался равным $r_0 = 6l$. Следовательно, в уравнении (1) $\nu = 0,229$, $\varepsilon_\Delta = 1/36$. Характерное время $t_0 = l/C_0 = 0,215$ мкс. Начальные и граничные условия имеют вид

$$V_1(z = 0, \xi_1, r') = \varepsilon v(\xi_1)R(r'),$$

$$V_1|_{\xi_1 \rightarrow -\infty} = \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1}|_{\xi_1 \rightarrow +\infty} = 0, \quad V_1|_{r' \rightarrow \infty} = \frac{\partial V_1}{\partial r'}|_{r'=0} = 0,$$

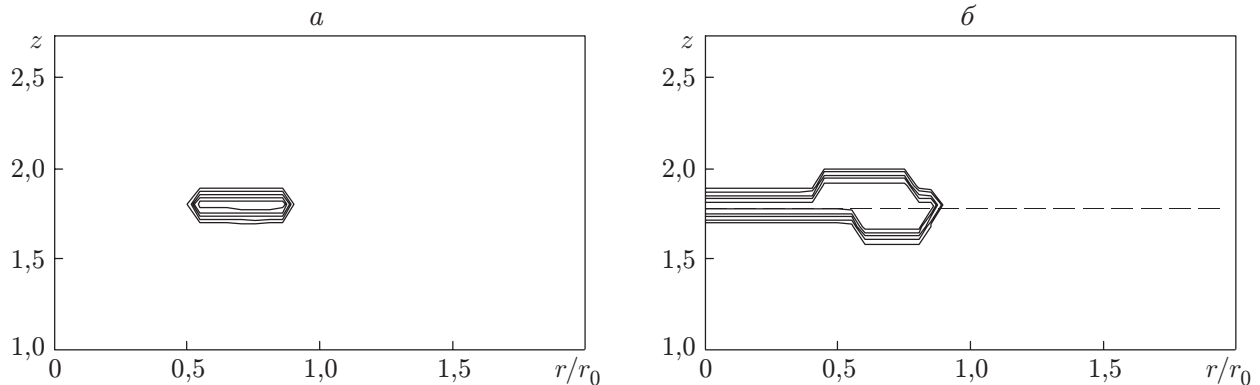


Рис. 3. Области разрушения пластины:
 $a - t = 3,92t_0$; $b - t = 3,98t_0$

где

$$R(r') = \begin{cases} 1, & r' \leq 1, \\ 0, & r' > 1, \end{cases} \quad v(\xi_1) = \begin{cases} 1, & \xi_1 \in [0, 2 - (\alpha + 2)u_0/(8C_0)], \\ 0, & \xi_1 \notin [0, 2 - (\alpha + 2)u_0/(8C_0)], \end{cases} \quad (8)$$

скорость соударения $u_0 = 185$ м/с. Параметр $\varepsilon = 2P_m/K = 0,036$ (P_m — амплитуда напряжения). Из (8) следует, что соударение пластин соответствует моменту времени $\xi_1 = t = 0$. В (8) пренебрегается влиянием боковой разгрузки, так как поперечные размеры ударника значительно превышают его толщину. На свободной поверхности $z = L/l$ ставятся граничные условия $V_2 = -V_1$, $\xi_2 = \xi_1$.

Уравнения эволюции поврежденности материала брались такими же, как в работе [14]. В качестве меры поврежденности принимался удельный объем микродефектов ω . Считается, что разрушение материала пластины происходит, когда поврежденность достигает критического уровня. Результаты расчетов двумерного повреждения пластины приведены на рис. 3 (удар производится вдоль нижней поверхности $0 \leq r/r_0 \leq 1$). На рис. 3 показаны области, соответствующие $\omega \geq 0,01$. На рис. 3,б центральная область внутри линий соответствует разрушенному материалу. В случае плоской задачи минимальное время образования откольной поверхности, согласно проведенным расчетам, составляет $3,98t_0$. Разрушение начинается под ударником (рис. 3,а), а затем распространяется к центру, образуя дискообразную трещину (рис. 3,б). Аналогичный результат получен в [15, 16] при численном решении точной исходной системы уравнений. Штриховой линией на рис. 3,б показано положение линии предполагаемого откольного разрушения, полученное в работе [15], в которой рассматривалась аналогичная задача с близкими параметрами материала и ударника. Видно, что положение линии откола соответствует нашим расчетам.

Таким образом, на ряде примеров показано, что предложенные модельные уравнения качественно описывают эволюцию распределения напряжений как в области упругого течения, так и в области пластического течения, и могут быть использованы для решения одно- и двумерных задач импульсного деформирования и разрушения упругопластических сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мягков Н. Н. Nonlinear waves in shock-loaded condensed matter // J. Phys. D. Appl. Phys. 1994. V. 27. P. 1678–1686.
2. Мягков Н. Н. О взаимодействии нелинейных волн в средах с упругопластическим поведением // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 88–100.

3. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
4. Malvern L. E. Plastic wave propagation in bar of material exhibiting a strain rate effect // Quart. Appl. Math. 1951. V. 8, N 4. P. 405–411.
5. Гилман Дж. Дж. Динамика дислокаций и поведение материалов при ударном воздействии // Механика. 1970. № 2. С. 96–134.
6. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978.
7. Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1985.
8. Канель Г. И., Фортон В. Е. Механические свойства конденсированных сред при интенсивных импульсных воздействиях // Успехи механики. 1987. Т. 10, № 3. С. 3–81.
9. Фомин В. М., Хакимов Э. М. Численное моделирование волн сжатия и разрежения в металлах // ПМТФ. 1979. № 5. С. 114–122.
10. Los Alamos shock wave profile data / Ed. by C. E. Morris. Berkeley etc.: Univ. California Press, 1982.
11. Morris C. E., Winkler M. A., Mitchell A. C. Ti–6Al–4V alloy wave profile measurements in the shadow region // Shock waves in condensed matter — 1987 / Ed. by S. C. Schmidt, N. C. Holms. Amsterdam: Elsevier, 1988. P. 265–268.
12. Завилейский О. Г., Мягков Н. Н. Квазиплоская ударная волна в упруговязкой максвелловской среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 5. С. 71–76.
13. Канель Г. И., Разоренов С. В., Фортон В. Е. Кинетика разрушения алюминиевого сплава АМг6М в условиях откола // ПМТФ. 1984. № 5. С. 60–64.
14. Seaman L., Curran D. R., Shockey D. Computational models for ductile and brittle fracture // J. Appl. Phys. 1976. V. 47, N 11. P. 4814–4826.
15. Заппаров К. И., Кукуджанов В. Н. Математическое моделирование задач импульсного деформирования, взаимодействия и разрушения упругопластических тел. М., 1986. (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. механики; № 280).
16. Eftis J., Nemes J. A. Constitutive modelling of spall fracture // Arch. Mech. 1991. V. 43, N 2/3. P. 399–435.

*Поступила в редакцию 7/V 2002 г.,
в окончательном варианте — 17/IX 2002 г.*
