

ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ЭНЕРГИИ

К. А. Лурье

(Ленинград)

Рассматриваются возможные режимы работы простого магнитогазодинамического устройства, представляющего собой бесконечный канал между двумя параллельными проводящими пластинами, по которому движется сжимаемый проводящий газ. Перпендикулярно направлению движения газа и параллельно пластинам приложено однородное магнитное поле.

При движении газа в таком поле возникает электрический ток в направлении, перпендикулярном пластинам. Если пластины соединены через некоторую нагрузку, то на последней может быть получена известная полезная мощность.

Наоборот, пропуская через газ, находящийся в магнитном поле, ток от внешнего источника, можно поддерживать движение газа, определяемое, если отвлечься от «входных» газодинамических параметров, действующими пондеромоторными силами. Эти силы в исследуемой постановке задачи сводятся к дополнительному, зависящему от магнитного поля градиенту давления, направленному вдоль скорости газа. Замедляющее действие указанного градиента свойственно генераторному режиму, ускоряющее — режиму потребления энергии. Режим потребления сводится к тому, что энергия поля расходуется на нагрев и, быть может, на ускорение газа. (Это не означает, конечно, что в генераторном режиме невозможно ускорение газа: оно будет иметь место, если одновременно газ охлаждается. Аналогичное замечание относится к замедлению газа в режиме потребления.)

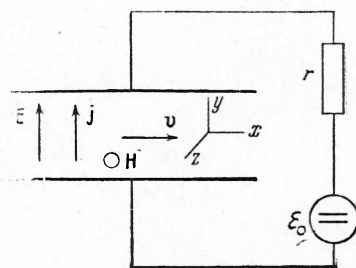
Ниже рассматриваются различные режимы работы подобного магнитогазодинамического преобразователя энергии. Выясняются условия, при которых возможен переход от одного режима к другому. Показано, что при отсутствии в потоке ударных волн не может иметь места переход от режима генерации к режиму потребления энергии или обратно.

1. Постановка задачи. Пусть газовый поток движется со скоростью v вдоль оси канала (фиг. 1), которую обозначим Ox . Будем предполагать, что газ обладает постоянной¹ скалярной проводимостью σ ; его вязкостью и теплопроводностью будем пренебрегать. Рассматриваем одномерную задачу, так что все величины зависят только от x . Параллельно оси, на единичном расстоянии одна от другой, расположены две идеально проводящие пластины. Вдоль оси z приложено внешнее постоянное магнитное поле H_0 .

Предположим дополнительно, что магнитное поле H_* , вызванное индуцированными в газе токами, также имеет единственную отличную от нуля компоненту, направленную вдоль оси z .

Соответствующая ситуация может быть реализована, если полюсные башмаки магнита, создающего исходное поле H_0 , расположенные по обе стороны плоскости $z = 0$, параллельно ей, изготовлены из материала с большой (строго говоря, бесконечной) магнитной проницаемостью.

В этих условиях x -компонента поля H_* будет равна нулю.



Фиг. 1.

¹ Исследование задачи в случае переменной проводимости, зависящей, например, от температуры, не меняет рассуждений.

Предположения

$$\mathbf{v} = v_1 i_x, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_* = H_1 i_z, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{c}{4\pi} \frac{dH_1}{dx} i_y$$

в совокупности с законом Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right)$$

приводят к выводу, что электрическое поле \mathbf{E} имеет лишь компоненту $E_y = E$. Уравнение же $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, выполняющееся в стационарной задаче, показывает, что $E = \text{const}$. Таким образом, по всей длине канала действует однородное электрическое поле, направленное вдоль оси y . Величина этого поля весьма просто связана с элементами внешней цепи. Составляя циркуляцию вектора \mathbf{E} по замкнутому контуру электрической цепи, напомним (ширина канала равна единице)

$$E + Ir - \varepsilon_0 = 0$$

Здесь I — полный ток, текущий по цепи; r — сопротивление нагрузки; ε_0 — электродвижущая сила стороннего источника.

Если $\varepsilon_0 = 0$, $r = 0$, то $E = 0$, т. е. в короткозамкнутом генераторе отсутствует электрическое поле.

При фиксированных в некотором сечении гидродинамических элементах потока и заданных сопротивлении нагрузки и э. д. с. внешнего источника единственным параметром, определяющим режим, будет основное магнитное поле H_0 . Сделаем задачу определенной, если фиксируем H_0 , либо другой, зависящий от H_0 параметр, например, полный ток I или полезную мощность $I^2 r$.

Уравнения магнитной газодинамики, написанные в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho_1}{\rho_0}, & p &= \frac{p_1}{p_0}, & T &= \frac{T_1}{T_0} \\ v &= \frac{v_1}{v_0}, & H &= \frac{H_1}{H_0}, & x &= \frac{x_1}{L} \end{aligned} \quad (1.1)$$

имеют для рассматриваемого случая вид

$$\begin{aligned} \rho v \frac{dv}{dx} &= -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\gamma M_0^2} p + \frac{S}{2} H^2 \right) \\ \frac{d}{dx} \rho v &= 0, & \frac{dH}{dx} &= R_m (vH - B) \\ \rho &= \rho T, & \frac{d}{dx} \left[\frac{v^2}{2} + \frac{\rho v}{(\gamma - 1) M_0^2} + SBH \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь введены параметры

$$M_0^2 = \frac{\rho_0 v_0^2}{\gamma p_0}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad S = \frac{H_0^2}{4\pi \rho_0 v_0^2}, \quad B = \frac{cE}{V_0 H_0}, \quad R_m = \frac{4\pi \sigma L v_0}{c^2} \quad (1.3)$$

Неизвестные функции ρ , p , T , v , H должны удовлетворять, кроме того, граничным условиям

$$\rho = p = T = v = H = 1 \quad \text{при } x = 0$$

Соответствующее интегрирование, выполненное в работе [1] для случая $\sigma = \text{const}$, не представляет труда распространить на случай переменной проводимости, зависящей, например, от температуры, получив, таким образом, достаточно общее решение задачи.

Многие сведения о характере течения могут, однако, быть получены и без интеграции исходных уравнений. Эти данные и будут интересовать нас в предлагаемой работе, причем главным образом с точки зрения генерации энергии или потребления ее движущимся газом.

2. Характерные точки потока. Приведем без вывода некоторые следствия основных уравнений (1.2), позволяющие установить имеющие место в различных условиях направления изменения скорости v и числа Маха

$$M_1 = \frac{v_1}{a_1} = \left(\frac{\rho_1 v_1^2}{\gamma p_1} \right)^{1/2} = \frac{v_1}{\sqrt{\gamma R T_1}} \quad (2.1)$$

Эти соотношения таковы:

$$(M_1^2 - 1) \frac{dv_1}{v_1} = - \frac{1}{c_p T_1} dQ_1 - \frac{H_1 dH_1}{4\pi \rho_1 a_1^2} \quad (2.2)$$

$$dQ_1 = \frac{j_1^2}{\rho_1 v_1^3} dx_1 = \frac{v_m}{\rho_1 v_1} \left(\frac{dH_1}{dx_1} \right)^2 dx_1, \quad v_m = \frac{c^2}{4\pi \sigma} \quad (2.3)$$

К. Б. Павловым уравнение (2.2) представлено в виде [2]

$$(v_1^2 - a_m^2) \frac{d\rho_1}{\rho_1} = \frac{v_m}{\rho_1 v_1} (\gamma - 1) \left(\frac{dH_1}{dx_1} \right)^2 dx_1$$

$$a_m = \left(a_1^2 + H_1 \frac{dH_1}{d\rho_1} \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} d\rho_1 < 0, \quad dv_1 > 0 & \text{ при } v_1 < a_m \\ d\rho_1 > 0, \quad dv_1 < 0 & \text{ при } v_1 > a_m \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подстановка

$$\zeta = vH \quad (2.6)$$

позволяет уравнение (2.2) с учетом равенства $p = \rho T$ преобразовать к виду, указанному Реслером и Сирсом [3,4]

$$(M_1^2 - 1) \frac{dv}{v} = - R_m S M_0^2 \gamma \frac{dx}{pv} (\zeta - B) \left(\zeta - B \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \quad (2.7)$$

Аналогично для дифференциала числа Маха M_1 получим

$$(M_1^2 - 1) \frac{dM_1}{M_1} = - R_m S M_0^2 \gamma \frac{dx}{pv} (\zeta - B) \left(\zeta - B \frac{\gamma - 1}{\gamma} \zeta_M \right) \quad (2.8)$$

$$\zeta_M = \frac{1 + \gamma M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}$$

Приведем еще соотношения для dp и dT

$$(M_1^2 - 1) \frac{dp}{p} = R_m S M_0^2 \gamma \frac{dx}{pv} [M_1^2 (\gamma - 1) + 1] (\zeta - B) \left(\zeta - B \frac{\gamma - 1}{\gamma} \zeta_p \right)$$

$$\zeta_p = \frac{\gamma M_1^2}{1 + (\gamma - 1) M_1^2} \quad (2.9)$$

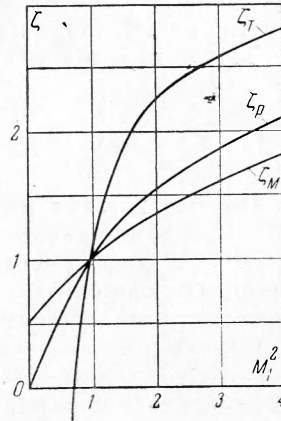
$$(M_1^2 - 1) \frac{dT}{T} = R_m S M_0^2 \gamma \frac{dx}{pv} M_1^2 (\gamma - 1) (\zeta - B) \left(\zeta - B \frac{\gamma - 1}{\gamma} \zeta_T \right)$$

$$\zeta_T = \frac{\gamma M_1^2 - 1}{(\gamma - 1) M_1^2} \quad (2.10)$$

Вывод этих формул можно найти в работе [5]. Графики функций $\zeta_M(M_1^2)$, $\zeta_p(M_1^2)$, $\zeta_T(M_1^2)$ представлены на фиг. 2.

Из полученных соотношений можно получить важные следствия. Пусть, например¹, $B > 0$, $\zeta > B$, тогда из равенства (2.7) вытекает, что $(M_1^2 - 1) dv < 0$. Из третьего равенства (1.2) вытекает одновременно, что $dH > 0$. При этом $H > 0$ (так как $\zeta = vH$, а $v \geq 0$ всегда). Поэтому большая из величин a_1 и a_m определяется знаком $d\rho_1$. Итак,

¹ Это предположение несущественно в том смысле, что одновременная перемена знаков B и H ничего не меняет в задаче.



Фиг. 2

(1) если $M_1^2 < 1$, то $dv > 0$, $d\rho < 0$ (дозвуковое ускорение); при этом $a_m < a_1$ и из (2.4) в этом случае вытекает $v_1 < a_m$;

(2) если $M_1^2 > 1$, то $dv < 0$, $d\rho > 0$ (сверхзвуковое замедление) и $a_m > a_1$. Из (2.4) в этом случае следует, что $v_1 > a_m$.

Существенным обстоятельством является то, что точка $\zeta = B$ никогда в реальных условиях не может быть достигнута непрерывным образом и пройдена потоком на конечном расстоянии от выбранного (не в бесконечности, разумеется) начального сечения.

Такой переход мог бы быть совершен двумя путями:

$$(a) \quad dv = dH = d\zeta = dM_1 = 0 \quad \text{при } \zeta = B$$

$$(б) \quad M_1^2 = 1 \quad \text{при } \zeta = B$$

Первый из этих вариантов сразу исключается, так как соотношения (2.7) и (2.8) показывают, что в указанных условиях обращаются в нуль при $\zeta = B$ дифференциалы всех порядков от определяющих течение величин. Отсюда следует одновременно, что состояние типа (а) может быть достигнуто лишь асимптотически.

Случай (б), как легко вывести из (2.7) и (2.8), возможен лишь для исходного состояния (2). Этому случаю формально может быть поставлен в соответствие переход от сверхзвукового замедления к дозвуковому. Переход этот, однако, неустойчив [6]. Аналогично доказывается невозможность непрерывного перехода от состояний $\zeta < B$ к $\zeta > B$.

Таким образом, точка $\zeta = B$ делит весь интервал $(-\infty, \infty)$ возможных значений ζ на две области, между которыми невозможен устойчивый непрерывный переход.

Другой характерной точкой является $\zeta = B(\gamma - 1) / \gamma$. В этой точке $(M_1^2 - 1) dv = 0$, т. е. либо $M_1^2 = 1$, либо $dv = 0$. Обе эти возможности могут быть реализованы¹.

Отметим также точку $H = 0$, переход которой меняет смысл неравенства между a_m и a_1 . Эта точка, так же допускает непрерывный переход².

3. Режимы работы потока. При анализе режимов потока будем руководствоваться двумя критериями — отдачей (поглощением) энергии газом и отдачей (поглощением) энергии нагрузкой.

Если $jH_1 < 0$, то газ отдает энергию, совершая работу против поля; при этом пондеромоторные силы тормозят газ.

Если $jH_1 > 0$, то пондеромоторные силы совершают работу над газом, ускоряя его; газ потребляет при этом энергию, подводимую извне.

Мы видели выше, что в течениях, реализуемых без ударных волн, либо $\zeta > B$, либо $\zeta < B$, поэтому знак плотности тока j , согласно третьему равенству (1.2), во всем потоке одинаков. Значит, полный ток

$$I = \int j dx_1 \quad \left(j = -\frac{c}{4\pi} \frac{dH_1}{dx_1} \right)$$

снимаемый с пластин, имеет знак, совпадающий со знаком j .

¹ Возможность перехода от сверхзвуковых режимов к дозвуковым через точку $\zeta = B(\gamma - 1) / \gamma$ не вытекает из постановки задачи, приведенной у Реслера и Сирса [3.4]. Это вызвано тем, что указанные авторы исходили из предположения о постоянстве H . Случай 1С в работах [3.4] этих авторов приводит поэтому только к переходу к режиму 1В, но не к режиму 2С (через значение $M_1^2 = 1$ и при одновременной перемене смысла неравенства $\zeta < B\zeta_M(\gamma - 1) / \gamma$ на обратный). Дело в том, что предположение $H = \text{const}$ ведет к замене ζ в (2.7) и (2.8) на $\text{const} \cdot v$, после чего v принимает роль ζ и в режиме 1С теряется возможность рассмотреть случай $d\zeta < 0$, но именно этот случай приводит к переходу через скорость звука.

² После сдачи статьи в набор автор ознакомился с работой Л. А. Вулиса и П. Л. Гусика [7], содержащей изложение условий перехода через скорость звука в плоском канале. В этой работе приводятся также кривые фиг. 2. Нам не кажется убедительным, однако, обоснование невозможности перехода через скорость звука в точке $\zeta = B$ на основании формулы (106). *Замечание при корректуре.*

Из соображений п. 1 видно, что IB имеет знак, противоположный знаку включенного в цепь сопротивления. Это же справедливо согласно изложенному выше и для jB . Сопротивление внешней цепи считаем положительным, если имеется в виду потребитель мощности, и отрицательным, если речь идет о стороннем генераторе. Итак, если $jB < 0$, то внешняя цепь потребляет энергию; если $jB > 0$, то внешняя цепь отдает энергию. Формально, таким образом, представляются следующие четыре случая:

Первый режим $jH_1 < 0, jB < 0$ (3.1)

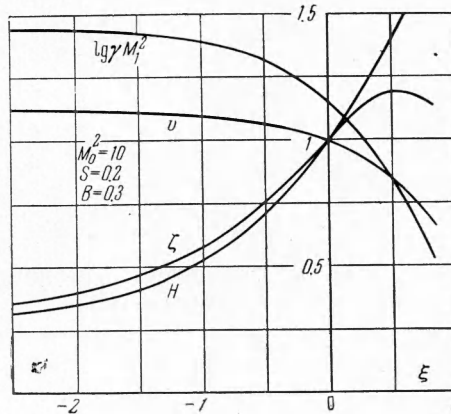
Это генераторный случай: газ отдает энергию полю, внешняя нагрузка потребляет подводимую к ней мощность. При этом $BH_1 > 0$ в силу (3.1) может иметь место

1) $B < 0, H_1 < 0, j > 0, \zeta < B$ (3.1.1)

2) $B > 0, H_1 > 0, j < 0, \zeta > B$ (3.1.2)

Для краткости введем обозначения: $(\rightarrow M)$ — дозвуковое ускорение, $(M \rightarrow)$ — сверхзвуковое ускорение, $(M \leftarrow)$ — сверхзвуковое замедление, $(\leftarrow M)$ — дозвуковое замедление. В режиме (3.1) имеем $(\rightarrow M)$ или $(M \leftarrow)$; как видно из (1.2), (2.7) — (2.10) и фиг. 2, при ускорении газа его температура падает (это же справедливо и для давления), а число Маха растет. Замедление сопровождается нагреванием газа и одновременным повышением давления. Последнее заключение верно всегда, как легко видеть из уравнения

$$dQ_1 = c_v dT_1 - \frac{\rho_1 d\rho_1}{\rho_1^2}$$



Фиг. 3

выражающего первое начало тер-

модинамики в применении к нашему случаю, и формул (1.2) и (2.3).

На фиг. 3 показано типичное поведение различных величин в генераторном режиме ($M_0^2 = 10, S = 0.2, B = 0.3$) в зависимости от $\xi = R_m x$. Видим, что при $\xi = 0.83$ кривые обрываются: в соответствующем сечении достигается местная скорость звука. Правее этой точки решение не может быть продолжено непрерывным образом, продолжение возможно только посредством скачка. В области $\xi < 0$ достигается асимптотический режим, когда $\zeta \rightarrow B = 0.3$ при $\xi \rightarrow -\infty$.

Второй режим $jH_1 > 0, jB > 0$ (3.2)

Такие неравенства соответствуют режиму потребления энергии. Возможны следующие варианты, реализующие этот режим:

$B < 0, H_1 < 0, j < 0, \zeta > B$ (3.2.1)

(a) $(M_1^2 - 1) dv > 0, B < \zeta < B \frac{\gamma - 1}{\gamma}$ ($\leftarrow M$ или $M \rightarrow$)

(б) $(M_1^2 - 1) dv < 0, 0 > \zeta > B \frac{\gamma - 1}{\gamma}$ ($\rightarrow M$ или $M \leftarrow$)

$B > 0, H_1 > 0, j > 0, \zeta < B$ (3.2.2)

(a) $(M_1^2 - 1) dv > 0, B \frac{\gamma - 1}{\gamma} < \zeta < B$ ($\leftarrow M$ или $M \rightarrow$)

(б) $(M_1^2 - 1) dv < 0, B \frac{\gamma - 1}{\gamma} > \zeta > 0$ ($\rightarrow M$ или $M \leftarrow$)

Во всех этих случаях газ потребляет энергию, подводимую от внешнего источника. При замедлении эта энергия расходуется на нагрев. Если же газ ускоряется, то, как видно из (2.7) — (2.10) и фиг. 2, могут представиться несколько случаев поведения термодинамических величин в зависимости от ξ .

Например, при сверхзвуковом ускорении ($M \rightarrow$), когда

$$B > 0, \quad B > \zeta > B \frac{\gamma-1}{\gamma} \zeta_T$$

температура и давление убывают, а число Маха растет вдоль x и т. д. Если при данном M_1^2 для ζ справедливо неравенство

$$B \frac{\gamma-1}{\gamma} < \zeta < B \frac{\gamma-1}{\gamma} \zeta_T$$

т. е. ускорение (случай ($M \rightarrow$)) не слишком велико, то вдоль оси x будет происходить рост температуры.

Если выполняется более жесткое неравенство

$$B \frac{\gamma-1}{\gamma} < \zeta < B \frac{\gamma-1}{\gamma} \zeta_p$$

то одновременно будет расти и давление. Число Маха начнет убывать при еще меньших значениях ζ

$$B \frac{\gamma-1}{\gamma} < \zeta < B \frac{\gamma-1}{\gamma} \zeta_M$$

Аналогичные заключения можно сделать и относительно режима дозвукового ускорения ($\rightarrow M$)

$$\text{Третий режим} \quad jH_1 < 0, \quad jB > 0 \quad (3.3)$$

$$B < 0, \quad H_1 > 0, \quad j < 0, \quad \zeta > 0 > B$$

$$B > 0, \quad H_1 < 0, \quad j > 0, \quad \zeta < 0 < B \quad (M_1^2 - 1) dv < 0 \quad (3.3.1)$$

$$(\rightarrow M) \text{ или } (M \leftarrow) \quad (3.3.2)$$

Газ и внешний источник вместе отдают электрическую энергию, которая расходуется на нагрев и (или) ускорение газа. В последнем случае ($\rightarrow M$) давление, как легко заключить из только что написанных неравенств и фиг. 2, убывает вдоль оси x , число Маха растет, а температура растет или убывает, смотря по тому, выше или ниже кривой ζ_T расположена изображающая точка на фиг. 2.

Ясно, что переход между случаями (3.2) и (3.3) возможен только с пересечением точки $H_1 = 0$. Рассмотрение соответствующих этим вариантам неравенств для H_1 и dH_1/dx_1 показывает, что переход возможен только от случая (3.2) к случаю (3.3), но не обратно. Иными словами, если в некоторой зоне канала имеет место режим (3.2), то при достаточном продвижении вправо вдоль оси x можем прийти к режиму (3.3).

Последнее обстоятельство может представить интерес в том отношении, что при ускорении газа и нагреве его в режиме (3.3) температурный градиент при прочих равных условиях может быть меньше, чем в режиме (3.2) (см., например, [3, 5]).

На фиг. 4 изображен такой переход ($M_0^2 = 1.5$, $S = 0.2$, $B = -1$): от $-\infty$ до точки $\xi = -0.83$ реализуется случай (а) режима (3.2.1), от $\xi = -0.83$ до $\xi = -0.66$ ($H = 0$) случай (б) режима (3.2.1), а от $\xi = -0.66$ до $\xi = 0.03$ режим (3.3) сверхзвукового замедления ($M \leftarrow$). Кривые обрываются в точке $\xi = 0.03$, где число Маха обращается в единицу.

Четвертый режим

$$jH_1 > 0, \quad jB < 0 \quad (3.4)$$

Этот последний из четырех формально возможных случаев, очевидно, лишен физического смысла, так как он отвечает двум потребителям энергии в системе — газу и внешней нагрузке — при отсутствии ее источников. Невыполнимость в указанных условиях равенства

$$j^2 = \sigma \left(jE - \frac{1}{c} jvH_1 \right)$$

подтверждает этот результат.

В заключение отметим, что из сказанного выше следует невозможность реализации положения, когда один участок рабочей длины канала действовал бы по отношению к внешней цепи как генератор, а оставшийся участок как потребитель (по существу, той мощности, которая была получена на первом участке, за вычетом доли, рассеянной на нагрузке). Это следует из того, что на протяжении всей длины канала не может быть перемены знака jB , т. е. знака j .

Эффект различного (в смысле генерации и потребления энергии) поведения системы по отношению к газу может иметь место и в действительности реализуется при переходе от режима (3.2) к режиму (3.3), когда происходит перемена знака H_1 и, следовательно, jH_1 . Здесь, однако, внешняя цепь, кроме сопротивления, необходимо содержит стороннюю электродвижущую силу, включенную навстречу тому напряжению, которое устанавливается при движении газа на сопротивлении нагрузки в отсутствие стороннего генератора.

Изложенная классификация возможных режимов работы вместе с решением основных уравнений, приведенном в [1], позволяет произвести расчет одномерной модели магнитогазодинамического преобразователя энергии. В частности, пользуясь указанными для различных режимов неравенствами, а также вещественностью и неотрицательностью функций v , p , можно указать области значений параметров (1.3), соответствующие каждому режиму.

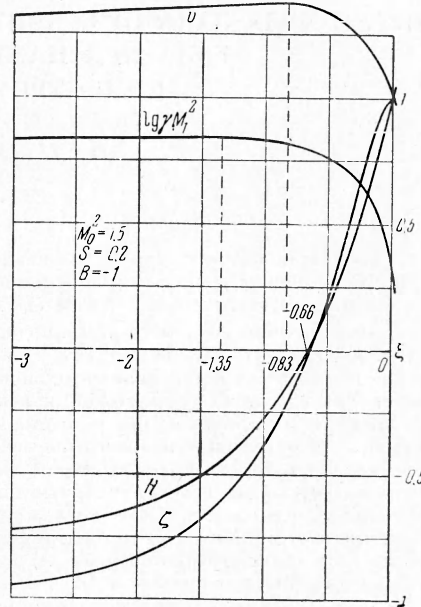
Автор благодарен С. И. Сыроватскому за ценное обсуждение.

Физико-технический институт
им. Иоффе АН СССР

Поступила 22 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е К. А. Решение уравнений одномерного движения сжимаемого газа конечной проводимости в поперечных электрическом и магнитном полях (стационарный случай). ЖТФ, 1961, т. XXXI, № 5.
2. П а в л о в К. Б. Некоторые свойства стационарных течений в магнитной газодинамике. ЖЭТФ, 1960, т. 39, № 2 (8).
3. Р е с л е р Э. Л. и С и р с У. Р. Перспективы магнитной аэродинамики. Сб. Механика, ИИЛ, 1958, № 6.
4. Р е с л е р Э. Л. и С и р с У. Р. Магнитогазодинамическое течение в канале. Сб. Механика, ИИЛ, 1959, № 6.
5. В у л и с Л. А. Термодинамика газовых потоков. Госэнергоиздат, 1950.
6. N a z e J. Etude de la stabilité des écoulements de Resler. — Sears. — С. R., v. 248, p. 362
7. В у л и с Л. А. и Г у с и к П. Л. Об обращении воздействий в магнитной гидродинамике. ЖТФ, 1961, т. XXXI, вып. 7.



Фиг. 4