УДК 532.54:534.1

КАТЯЩИЕСЯ ВОЛНЫ В КАНАЛЕ С АКТИВНОЙ ГАЗОВОЙ ФАЗОЙ

А. Будлал, В. Ю. Ляпидевский*,**

Лаборатория механики Университета естественных наук и технологий г. Лилля, UMR CNRS 8107 Лилль, Франция

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

** Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

E-mails: abdelaziz.boudlal@univ-lille1.fr, liapid@hydro.nsc.ru

Построена математическая модель течения тонкого слоя тяжелой жидкости под упругой оболочкой, заполненной газом. За счет массообмена с окружающей средой газовая фаза является активной и поддерживает самоорганизующееся волновое движение в слое жидкости. Найдены условия, при которых малые возмущения трансформируются в квазипериодические волновые пакеты конечной амплитуды, движущиеся в одном направлении. Показано, что структура этих волн аналогична структуре катящихся волн в открытых каналах.

Ключевые слова: катящиеся волны, гиперболические уравнения, разрывные решения, устойчивость волновых пакетов.

DOI: 10.15372/PMTF20150401

Введение. Процесс формирования периодических волн конечной амплитуды, или катящихся волн, в результате развития неустойчивости течения в наклонных каналах хорошо известен в гидравлике открытых русел [1]. Математическое описание этого явления в приближении мелкой воды приведено в [2]. При этом в рамках нелинейной гиперболической системы уравнений катящиеся волны представляют собой периодические разрывные решения, стационарные в некоторой движущейся системе координат (бегущие волны). Уравнения мелкой воды применимы также для описания катящихся волн в наклонных каналах произвольного сечения [3, 4].

Квазипериодический режим течения как нелинейная стадия развития неустойчивости равномерного потока может быть получен и в более сложных моделях. Влияние вязкости и диссипации энергии потоков учтено в [5, 6]. Структура турбулентного бора и формирование приповерхностного турбулентного слоя при обрушении бегущих волн рассмотрены в [7, 8].

В течениях многокомпонентных жидкостей в горизонтальных и наклонных каналах и трубах развитие неустойчивости и генерация катящихся волн являются одним из механизмов перехода от стратифицированного режима течения к снарядному [9–12]. При этом как для течений жидкости в открытых каналах, так и для течений многокомпонентных сред

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 15 и программы Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН № 13.4, а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00249).

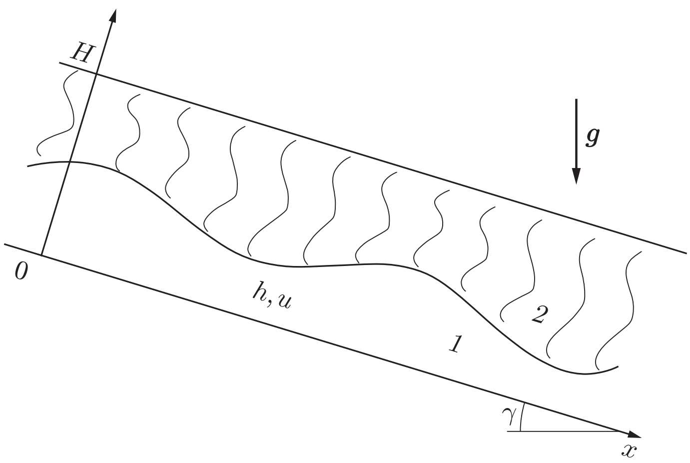

Рис. 1. Схема течения:
1 — слой жидкости, *2* — газ

в закрытых каналах и трубах основным источником колебаний потока является взаимодействие сил, ускоряющих поток (массовые силы, градиент давления), с силами трения. Другим источником возбуждения интенсивного волнового движения в многокомпонентных системах может быть подвод энергии (химической, тепловой, энергии фазового перехода и т. д.) к одному из компонентов потока.

Механическая модель генерации катящихся волн, задаваемая гиперболической системой уравнений газодинамического типа, построена в [13] для газожидкостных течений с переменной массой газового компонента. В данной работе построена аналогичная модель течения тонкого слоя несжимаемой жидкости в наклонном канале под деформируемой оболочкой, заполненной газом. При этом газовая фаза является активной, т. е. масса газа внутри оболочки может меняться в зависимости от ее объема. Таким образом, рассматривается простейшая механическая модель генерации автоколебаний за счет распределенного подвода энергии к некоторому участку канала. Основное внимание уделено определению условий возникновения в канале катящихся волн, распространяющихся в одном направлении. Эти условия связаны с массообменом в газовом компоненте.

Математическая модель. Рассматриваются одномерные нестационарные движения тонкого слоя тяжелой несжимаемой жидкости с плотностью ρ_f в наклонном канале (рис. 1). Сверху жидкость ограничена деформируемой оболочкой, заполненной газом. Газ находится в изолированных отсеках и может закачиваться или откачиваться из отсека по заданному закону. Отсеки закреплены, их объем может меняться в зависимости от положения границы раздела между жидким и газовым компонентами. Угол наклона канала к горизонтальной плоскости равен γ. Система координат выбрана таким образом, чтобы ось абсцисс совпадала с дном канала, а ось ординат была ей ортогональна.

В приближении мелкой воды уравнения движения слоя жидкости, характеризующегося толщиной h и средней скоростью u, направленной вдоль канала, принимают вид

$$h_t + (hu)_x = 0, \qquad u_t + uu_x + (g_n h + \rho_f^{-1} p_g)_x = \alpha g_n - c_w u|u|/h. \tag{1}$$

Здесь $g_n = g\cos\gamma$; $\alpha = \operatorname{tg}\gamma$; g — ускорение свободного падения; c_w — коэффициент трения.

Так как граница раздела $h = h(t, x)$ деформируется только в направлении y, то коэффициент трения учитывает торможение потока не только на дне канала, но и на верхней границе движущегося слоя жидкости. Газ в отсеках считается изотермическим, поэтому зависимость давления газа p_g от толщины слоя h может быть выражена следующим образом: $p_g = \chi m_g/(H - h)$, $\chi = RT/\mu = \text{const}$ (H — общая глубина канала; R — газовая постоянная; T — температура; m_g — масса газа на единицу длины канала; μ — молекулярная масса газа). Будем считать, что скорость подачи газа в отсек зависит от объема газовой фазы, а скорость оттока пропорциональна давлению p_g, т. е.

$$m_t = \theta(\varphi(h) - m/(H-h)), \qquad m = \chi m_g. \tag{2}$$

Уравнения движения газожидкостной среды с подвижным газовым компонентом, аналогичные (1), (2), рассмотрены в [13]. Безразмерные переменные могут быть выбраны таким образом, чтобы выполнялись условия $\rho_f = 1$, $H = 1$, $g_n = 1$. Кроме того, при $\theta \neq 0$ путем растяжения независимых переменных можно обеспечить выполнение условия $\theta = 1$. В этом случае в безразмерных переменных уравнения (1), (2) принимают вид

$$\begin{gathered} h_t + (hu)_x = 0, \qquad u_t + (u^2/2 + h + m/(1-h))_x = \alpha - c_w u|u|/h, \\ m_t = \varphi(h) - m/(1-h). \end{gathered} \tag{3}$$

Система уравнений (3) является гиперболической на любых решениях, ее характеристики могут быть представлены в виде

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_0 = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = \lambda^{\pm} = u \pm \sqrt{h + \frac{mh}{(1-h)^2}}\,. \tag{4}$$

Заметим, что при $\theta = 0$ из (2) следует $m \equiv \text{const}$ при $t > 0$, если это свойство имело место при $t = 0$. В этом случае система (1) сводится к уравнениям мелкой воды для течений тяжелой сжимаемой жидкости в наклонном канале, рассмотренным в [14. Гл. 3]. Заметим, что характеристики (4) не зависят от правой части уравнений (3), поэтому при $\theta = 0$ набор характеристик тот же, что и при $\theta > 0$.

Катящиеся волны. По аналогии с катящимися волнами в открытых наклонных каналах [2] для системы (3) могут быть построены периодические разрывные решения, стационарные в некоторой системе координат, движущейся с постоянной скоростью D, т. е. решения (3), зависящие от переменной $\xi = x - Dt$.

Рассмотрим сначала частный случай волн в горизонтальном канале ($\alpha = 0$, $c_w = 0$, $\theta = 1$). Из (3) следуют соотношения

$$\begin{gathered} h(D-u) = y(D-u_c) = q, \\ \frac{1}{2}\,(D-u)^2 + h + \frac{m}{1-h} = \frac{1}{2}\,(D-u_c)^2 + y + \frac{m_c}{1-y} = J. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь y — критическая глубина; величины с индексом c соответствуют критическим параметрам потока, определенным ниже. Из (5) следует зависимость

$$m = M(h) = (1-h)\Big(\frac{q^2}{2y^2} - \frac{q^2}{2h^2} + y - h + \frac{m_c}{1-y}\Big), \tag{6}$$

поэтому уравнения для бегущих волн могут быть сведены к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\begin{gathered} -D\,\frac{dh}{d\xi} = \frac{f(h)}{\Delta(h)}, \qquad f(h) = \varphi(h) - \frac{m}{1-h}, \\ \Delta(h) = \frac{dM(h)}{dh} = \frac{q^3}{h^3}\Big(1 - \frac{h}{2}\Big) - J + 2h - 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Необходимым условием существования периодических катящихся волн является наличие на участке гладкого течения критической глубины y, при которой $\Delta(y) = 0$, $f(y) = 0$, т. е. из (5) получаем

$$J = \frac{q^2}{2y^2} + y + \varphi(y), \qquad q^2 = y^3 + \Big(1 + \frac{\varphi(y)}{y}\Big). \tag{8}$$

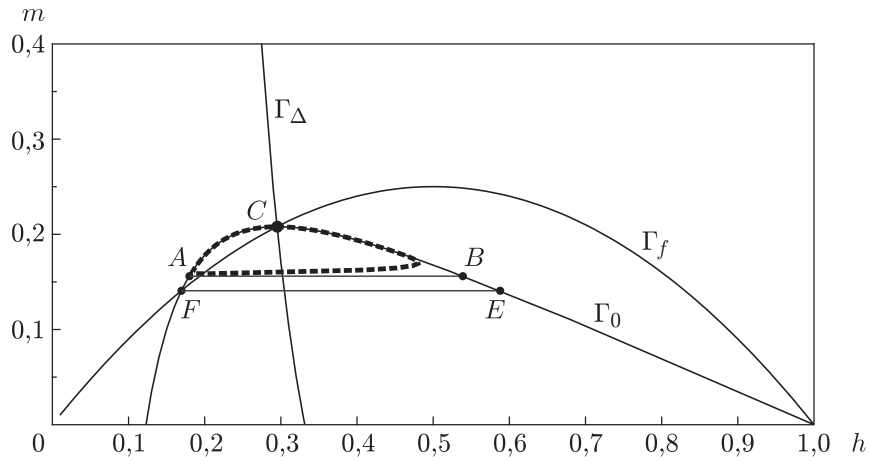

Рис. 2. Диаграмма катящихся волн (3) на плоскости (h, m) при $\varphi(h) = h$: штриховая линия — образ цуга волн (нестационарный расчет), $ABCA$ — решение (7) при $y = 0{,}3$, $FECF$ — волны с предельной амплитудой

Значения u_c, m_c восстанавливаются из (6), (8) однозначно. Рассмотрим случай волн, бегущих вправо, т. е. случай $D > u$ или $q > 0$. Условия на разрыве для решений (3) приводятся к виду

$$M(h^-) = M(h^+),$$

где $h^{\pm} = h(\xi \pm 0)$. Устойчивость разрыва для волн, бегущих вправо, обеспечивается выполнением неравенств $\lambda^+(\xi + 0) < D < \lambda^+(\xi - 0)$ [1], т. е. $h^+ < h^-$. Из условий устойчивости и (7) следует, что для построения катящихся волн малой амплитуды необходимо выполнение условия

$$\lim_{h \to y} \frac{f(h)}{\Delta(h)} = \frac{f'(h)}{\Delta'(h)} < 0.$$

Заметим, что в критической точке выполняется неравенство

$$\Delta'(y) = M''(y) = 3\Big(1 - \frac{1}{y}\Big) + \frac{\varphi(y)}{1 - y}\Big(1 - \frac{3}{y}\Big) < 0,$$

так как $0 < y < 1$ и $\varphi(y) > 0$. Осталось найти условия, при которых $f'(y) > 0$. В силу (7) имеем

$$f'(h) = \varphi'(h) - \frac{M(h)}{(1 - h)^2} - \frac{M'(h)}{1 - h}.$$

Так как $M(y) = (1 - y)\varphi(y)$, $M'(y) = \Delta(y) = 0$, то $f'(y) > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi'(y) > \frac{\varphi(y)}{1 - y}. \tag{9}$$

В частности, для линейной функции $\varphi(h) = \beta h$ катящиеся волны существуют при $y < 1/2$.

Структура катящихся волн конечной амплитуды зависит от поведения функций $f(h)$ и $\Delta(h)$ на интервале $0 < h < 1$. На рис. 2 представлены характерные кривые, определяющие свойства катящихся волн при $\varphi(h) = h$. Эти кривые заданы соотношениями

$$\Gamma_0\colon\quad m = M(h), \qquad \Gamma_\Delta\colon\quad m = (1 - h)^2(q^2/h^3 - 1), \qquad \Gamma_f\colon\quad m = (1 - h)\varphi(h).$$

Критическая точка $C(y, m_c)$ лежит на пересечении кривых Γ_f и Γ_Δ. Кроме того, любое непрерывное решение (5), проходящее через точку C, лежит в плоскости (h, m) на кривой Γ_0. Заметим, что левее точки C на кривой Γ_0 находятся значения параметров потока, соответствующие сверхкритическому течению ($\Delta > 0$), а правее — значения, соответствующие докритическому течению ($\Delta < 0$). Другой характерной точкой является точка $F(h_*, m_*)$ пересечения кривых Γ_f и Γ_Δ, соответствующая сверхкритическому течению. На интервале (h_*, y) функции $f(h)$ и $\Delta(h)$ не обращаются в нуль, но $f(h_*) = 0$. Поэтому отрезок FE, параллельный оси абсцисс, определяет разрыв предельной амплитуды в катящейся волне. При этом длина волны $FCEF$ стремится к бесконечности. Любой отрезок AB, параллельный оси абсцисс и лежащий внутри области $FCEF$, определяет катящуюся волну конечной длины $ABCA$, содержащую критическую точку C. Существование непрерывного решения (7) на докритическом участке течения ($y < h < 1$) обусловлено тем, что функции $f(h)$ и $\Delta(h)$ на этом участке не обращаются в нуль. В общем случае для произвольной зависимости $\varphi(h)$ структура катящихся волн может быть более сложной, но необходимым и достаточным условием существования разрывных периодических решений (7), соединяющих разрывом сопряженные глубины $h^\pm$ ($m(h^+) = m(h^-)$) и проходящих через точку с критическим значением координаты y, является выполнение неравенств [4]

$$f(h) < 0 \quad \text{при} \quad h^+ < h < y, \qquad f(h) > 0 \quad \text{при} \quad y < h < h^-. \tag{10}$$

Нетрудно показать, что из (10) следует необходимое условие существования катящихся волн (9). Заметим, что условие (9) может быть получено с использованием критерия Уизема [1], в котором переход от равномерного потока к потоку, где генерируются нелинейные волны, осуществляется в случае, когда скорости характеристик соответствующей равновесной модели превышают скорость распространения возмущений, соответствующих исходной модели. В рассматриваемом случае модель становится равновесной, если в уравнениях движения (3) в горизонтальном канале ($\alpha = 0$, $c_w = 0$) последнее уравнение заменяется тождеством $m \equiv (1-h)\varphi(h)$:

$$h_t + (hu)_x = 0, \qquad u_t + (u^2/2 + \varphi(h))_x = 0. \tag{11}$$

Характеристики уравнений (11) имеют вид $\lambda_e^\pm = u \pm \sqrt{u^2 + h\varphi(h)}$. Согласно критерию Уизема для волн, распространяющихся вправо ($D > u$), равномерное течение с $h = y$ неустойчиво при $\lambda_e^+ > \lambda^+$, т. е. тогда и только тогда, когда выполнено условие (9).

Волны в наклонном канале в отсутствие массообмена. Рассмотрим случай $c_w > 0$, $\alpha > 0$, $\theta = 0$. Из (2) следует, что $m = m_0 = \text{const}$ при $t > 0$. В отсутствие массообмена в газовой фазе уравнения (1) сводятся к уравнениям течения сжимаемой жидкости в наклонном канале [14]. При $\rho_f = 1$, $g_n = 1$, $H = 1$ система (1) принимает вид

$$\begin{gathered} h_t + (hu)_x = 0, \qquad u_t + (u^2/2 + P(h))_x = \alpha - c_w u|u|/h, \\ P(h) = h + m_0/(1-h). \end{gathered} \tag{12}$$

Модель (12) становится равновесной в результате подстановки $\alpha h \equiv c_w u^2$ ($u > 0$):

$$h_t + \Big(\sqrt{\alpha h^3/c_w}\,\Big)_x = 0.$$

Характеристики этого уравнения имеют вид $\lambda_e = (3/2)\sqrt{\alpha h/c_w}$, поэтому условие возникновения катящихся волн $\lambda_e > \lambda^+$ сводится к неравенству

$$\frac{\alpha}{c_w} > 4\Big(1 + \frac{m_0}{(1-h)^2}\Big)^{1/2}. \tag{13}$$

Таким образом, равномерное течение $u = u_0 = \sqrt{\alpha h_0/c_w}$, $h = h_0$ неустойчиво при

$$\mathrm{Fr} = \frac{u_0}{\sqrt{h_0}} > 2\Big(1 + \frac{m_0}{1 - h_0}\Big)^{1/2},$$

что согласуется с известным критерием неустойчивости $\mathrm{Fr} > 2$ для течений в открытых наклонных каналах [1] при $m_0 \ll 1$.

Катящиеся волны в канале при наличии трения и массообмена. Рассмотрим общий случай системы (3) при $c_w > 0$. Равномерное течение $h \equiv h_0 > 0$, $u \equiv u_0 > 0$, $m \equiv m_0 > 0$ является точным решением (3) при

$$\alpha h_0 = c_w u_0^2, \qquad m_0 = (1 - h_0)\varphi(h_0). \tag{14}$$

Ниже исследуется процесс генерации катящихся волн в каналах с умеренным углом наклона, т. е. в случае, когда неравенство (13) не выполнено и равномерный поток без массообмена в газовой фазе является устойчивым. Это ограничение позволяет оценить влияние активной газовой фазы на структуру катящихся волн. В то же время ограничиться построением катящихся волн в горизонтальном канале ($\alpha = 0$, $u_0 = 0$), рассмотренном выше, недостаточно, так как в случае нестационарных процессов генерации волн в течениях при наличии массообмена в газовой фазе пакет катящихся волн при $\alpha = 0$ является неустойчивым. Наличие малых возмущений приводит к генерации катящихся волн, движущихся в противоположном направлении, и возбуждению в канале стоячих волн конечной амплитуды. В то же время даже при небольшом угле наклона канала наличие среднего течения ($u_0 > 0$) подавляет развитие возмущений вверх по потоку и приводит к формированию устойчивых катящихся волн, распространяющихся вниз по потоку ($D > u$). При ($D > u > 0$) бегущие волны (3) задаются системой уравнений

$$h(D - u) = y(D - u_c) = q,$$

$$\Big(\frac{1}{2}\,(D - u)^2 + h + \frac{m}{1 - h}\Big)' = \alpha - \frac{c_w u^2}{H}, \qquad -Dm' = \varphi(h) - \frac{m}{1 - h},$$

которая может быть сведена к одному уравнению на плоскости (h, m)

$$\frac{dm}{dh} = \frac{\Phi\Delta_1}{F}. \tag{15}$$

Здесь

$$\Phi = \Phi(h, m) = D^{-1}\Big(\frac{m}{1 - h} - \varphi(h)\Big), \qquad \Delta_1 = \Delta_1(h, m) = -\frac{q^2}{h^3} + 1 + \frac{m}{(1 - h)^2},$$

$$F = F(h, m) = \alpha - \frac{c_w u^2}{h} - \frac{m}{D(1 - h)^2} + \frac{\varphi(h)}{D(1 - h)}, \qquad u = u(h) = D - \frac{q}{h}.$$

Далее полагаем

$$G = G(h, m) = \frac{q^2}{2h^2} + h + \frac{m}{1 - h}.$$

Следует отметить, что $\Delta(h) = \Delta_1(h, M(h))$ при $\alpha = 0$, $c_w = 0$. Кроме того, на кривой Γ_f функции Φ, F обращаются в нуль и их отношение имеет конечный предел. Следовательно, при небольших углах наклона канала периодическое решение (15) при $c_w > 0$ должно иметь структуру, аналогичную структуре решения, построенного для горизонтального канала, т. е. проходить через особую точку с координатами, удовлетворяющими условиям $\Delta_1(h, m) = 0$, $F(h, m) = 0$ и содержать устойчивый разрыв, соединяющий докритическую и сверхкритическую ветви решения. Даже при умеренных углах наклона канала,

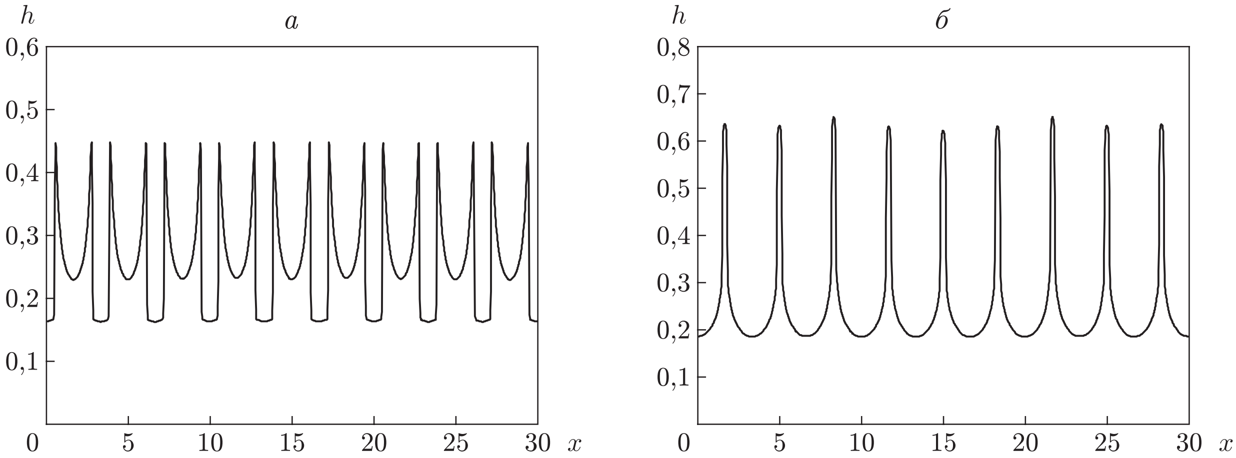

Рис. 3. Эволюция начальных гармонических возмущений в горизонтальном канале ($\alpha = 0$, $c_w = 0{,}005$):
а — $t = 90$, *б* — $t = 200$

соответствующих числу Фруда $\mathrm{Fr} \sim 1$, численные расчеты нестационарных течений показывают, что решения выходят на периодический режим, соответствующий построенному выше периодическому разрывному решению при $\alpha = 0$, $c_w = 0$. Ниже проводится анализ структуры катящихся волн в наклонном канале, возникающих при внесении возмущений в стационарное течение.

Эволюция катящихся волн. Развитие малых возмущений стационарного течения, удовлетворяющего условиям (14), можно смоделировать при численном решении соответствующей начально-краевой задачи для системы (3). При этом в стационарное течение можно вносить возмущения с помощью как начальных, так и граничных условий. Гиперболичность системы уравнений (3) позволяет применять для нестационарных расчетов стандартные численные схемы. В настоящей работе использована схема Годунова.

Основной особенностью развития неустойчивости в газожидкостной системе, удовлетворяющей (9), в отличие от генерации катящихся волн в открытых каналах, является возможность усиления малых возмущений в покоящейся среде. При этом направления распространения возмущений равноправны и в ограниченной области, занятой первоначально покоящейся жидкостью, развиваются незатухающие стоячие волны конечной амплитуды. В наклонных каналах при $u > 0$ развитие возмущений в направлении, противоположном направлению потока, подавляется и при определенных условиях развивается квазипериодическое течение, представляющее собой пакет катящихся волн конечной амплитуды.

Рассмотрим задачу Коши для уравнений (3) в горизонтальном канале ($\varphi(h) = h$, $\alpha = 0$, $c_w = 0$). При $t = 0$ заданы следующие начальные данные:

$$h = h_0(1 + 0{,}01\cos(\omega t)), \quad u = 0, \quad m = h_0(1 - h_0),$$
$$h_0 = 0{,}25, \quad L = 30, \quad \omega = 18\pi/L. \tag{16}$$

При $t > 0$ определяется периодическое (с периодом L) решение (3), (16). На рис. 3 показана форма свободной поверхности слоя жидкости в различные моменты времени. На рис. 3,*а* видно, что в слое генерируются структуры, характерные для катящихся волн, но движущиеся в противоположных направлениях. Эти структуры взаимодействуют (см. рис. 3,*б*), образуя периодически повторяющиеся волновые конфигурации. Учет трения ($c_w = 0{,}005$) на рассмотренных интервалах времени не приводит к изменению фазовых и амплитудных характеристик течения. В наклонном канале основное течение описывается соотноше-

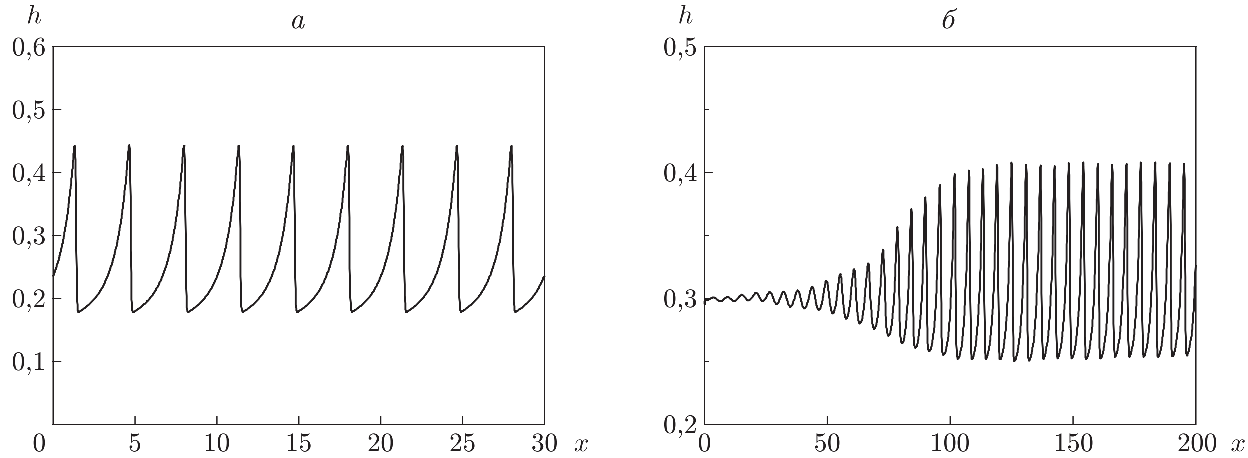

Рис. 4. Катящиеся волны в наклонном канале ($t = 200$, $\alpha = 0{,}005$, $c_w = 0{,}005$): a — течение при периодических начальных условиях, $б$ — развитие возмущения равномерного потока на входе в канал

ниями

$$h = h_0, \qquad u = u_0 = \sqrt{\alpha h_0 / c_w}, \qquad m = h_0(1 - h_0). \tag{17}$$

При $\alpha = 0{,}005$, $c_w = 0{,}005$ из (17) следует, что $\mathrm{Fr} = u_0/\sqrt{h_0} = 1$. Возмущение (16) основного потока при $u = u_0 > 0$ также приводит к возникновению волнового движения, но в этом случае волновой пакет состоит из бегущих волн конечной амплитуды, распространяющихся вправо (рис. 4,a). Начиная с некоторого момента времени амплитуда волн прекращает увеличиваться и реализуется волновой периодический пакет катящихся волн, движущихся с постоянной скоростью. Приведенной на рис. 4,a волновой конфигурации, состоящей из девяти волн, соответствует замкнутая штриховая линия на рис. 2. Следовательно, все образы волн рассматриваемого пакета лежат на одной замкнутой кривой, что свидетельствует о периодичности процесса. Более того, в области непрерывного изменения параметров в волне, соответствующей участкам как докритического, так и сверхкритического течения, построенная кривая лежит на кривой ACB (см. рис. 2), характеризующей катящиеся волны в горизонтальном канале при отсутствии трения. Таким образом, наличие умеренного угла наклона канала не приводит к изменению структуры катящихся волн, но обеспечивает их устойчивость по отношению к нестационарным возмущениям потока. Развитие возмущений в наклонном канале показано на рис. 4,$б$. Длина канала $L = 200$, начальная глубина $h_0 = 0{,}3$. Рассматриваются негармонические возмущения основного течения (17), генерируемые на левой границе с большей частотой, чем в (16), и амплитудой менее 1 %. Вниз по потоку амплитуда этих возмущений резко увеличивается до некоторой критической величины, при которой рост волн внезапно прекращается и формируется пакет катящихся волн со структурой, соответствующей волнам, показанным на рис. 4,a. Аналогичная картина наблюдается при расчете волнового движения в открытых каналах [14]. Таким образом, независимо от способа генерации волновых возмущений формируется квазипериодический “насыщенный” волновой режим течения.

Заключение. В рассматриваемой математической модели (1), (2) газовая фаза является активной, поскольку за счет притока и оттока газа в зависимости от давления и объема газовой полости в слое жидкости может возникать и поддерживаться самоорганизующееся волновое движение. При условии (9), налагаемом на скорость подачи газа, наличие малых возмущений равномерного потока жидкости приводит к развитию интенсивного волнового движения, имеющего квазипериодический характер. При этом в зависимости от угла наклона канала колебания в слое жидкости могут иметь характер как стоячих, так и бегущих волн конечной амплитуды. Уравнения (1), (2) являются уравнениями гиперболического типа и представляют собой простейшую "механическую" модель генерации волнового движения за счет распределенного по длине канала подвода энергии к газовой фазе в горизонтальных и близких к горизонтальным каналах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
2. **Dressler R. F.** Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels // Comm. Pure Appl. Math. 1949. V. 2. P. 149–194.
3. **Dyment A., Boudlal A.** A theoretical model for gas-liquid slug flow in down inclined ducts // Intern. J. Multiphase Flow. 2004. V. 30. P. 521–550.
4. **Boudlal A., Liapidevskii V. Yu.** Stability of regular roll waves // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 2. С. 3–14.
5. **Needham D. J., Merkin J. H.** On roll waves down an open inclined channel // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1981. V. 394. P. 259–278.
6. **Kranenburg C.** On the evolution of roll waves // J. Fluid Mech. 1992. V. 245. P. 249–261.
7. **Richard G. L., Gavrilyuk S. L.** A new model of roll waves: comparison with Brock's experiments // J. Fluid Mech. 2012. V. 698. P. 374–405.
8. **Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А.** Слой смешения под свободной поверхностью // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 127–140.
9. **Barnea D., Taitel Y.** Interfacial and structural stability of separated flow // Intern. J. Multiphase Flow. 1994. V. 25. P. 387–414.
10. **Kordyban E.** Horizontal slug flow: a comparison of existing theories // Trans. ASME. J. Fluids Engng. 1990. V. 112. P. 74–83.
11. **Ляпидевский В. Ю.** Структура катящихся волн в двухслойных течениях // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, № 6. С. 976–982.
12. **Boudlal A.** Roll waves and plugs in two-layer flows // Europ. J. Appl. Math. 2007. V. 19. P. 1–19.
13. **Ляпидевский В. Ю.** Катящиеся волны в газожидкостной среде // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 2. С. 39–42.
14. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

Поступила в редакцию 2/VI 2014 г.