

УДК 539.3: 539.374: 517.958

КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНОСТИ И МОДЕЛЬ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: abd@hydro.nsc.ru

На основе представления тензора модулей упругости через собственные модули и состояния предложены критерии предельности, соответствующие критическим значениям удельной энергии деформации и различным собственным модулям анизотропных сред. Приведены примеры критериев предельности (пластичности), не зависящих от безопасного напряженного состояния. С использованием понятия собственных состояний получены определяющие уравнения предельного деформирования анизотропных материалов. Рассмотрены соответствующие уравнения для изотропных материалов классов $\{1, 5\}$ и $\{5, 1\}$, а также материалов кубической сингонии разных классов. В зависимости от класса анизотропного материала критерии предельности могут существенно различаться.

Ключевые слова: критерии предельности, анизотропия, собственные модули и состояния, определяющие соотношения.

Задачи о предельном (неупругом) деформировании анизотропных материалов рассматриваются во многих работах. Обзор теорий прочности, условий предельности (пластичности) приведен, например, в работах [1–7]. В [8–13] понятие собственных состояний тензора модулей упругости используется при построении моделей пластического деформирования и критериев текучести. Обзор работ, посвященных исследованию обобщенного закона Гука для линейно-упругих анизотропных сред, представлен в [14].

Обобщенный закон Гука для линейно-упругих анизотропных сред записывается в виде [14]

$$\sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j, \quad \varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j, \quad i, j = \overline{1, 6} \quad (1)$$

(по повторяющимся индексам проводится суммирование). В (1) для симметричных по двум индексам тензоров используются формулы перехода от двух индексов к одному

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1, & \sigma_{22} &= \sigma_2, & \sigma_{33} &= \sigma_3, \\ \sqrt{2}\sigma_{23} &= \sqrt{2}\sigma_{32} = \sigma_4, & \sqrt{2}\sigma_{13} &= \sqrt{2}\sigma_{31} = \sigma_5, & \sqrt{2}\sigma_{12} &= \sqrt{2}\sigma_{21} = \sigma_6, \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2, & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3, \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} &= \sqrt{2}\varepsilon_{32} = \varepsilon_4, & \sqrt{2}\varepsilon_{13} &= \sqrt{2}\varepsilon_{31} = \varepsilon_5, & \sqrt{2}\varepsilon_{12} &= \sqrt{2}\varepsilon_{21} = \varepsilon_6. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций в декартовой прямоугольной системе координат (x_1, x_2, x_3) . С учетом формул (2) матрицы A_{ij} , $a_{ij} = A_{ij}^{-1}$ в (1) соответствуют тензорам четвертого ранга модулей упругости $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}$ и коэффициентов податливости $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$.

Симметричные и положительно определенные матрицы A , $a = A^{-1}$ представляются через собственные модули $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$, $\lambda_i > 0$ и ортонормированные соб-

ственные состояния $T = [t_{ip}]$, $T'T = E$ ($E = [\delta_{pq}]$ — единичная матрица; штрих означает операцию транспонирования матрицы) [14]:

$$A = T\Lambda T', \quad a = T\Lambda^{-1}T', \quad \Lambda = T'AT. \quad (3)$$

С учетом (3) запишем (1) в виде

$$\sigma = T\Lambda T'\varepsilon, \quad T'\sigma = \Lambda T'\varepsilon. \quad (4)$$

Второе выражение (4) есть инвариантная запись закона Гука. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= T'\sigma, & \tilde{\sigma}_p &= \sigma_i t_{ip}, & \sigma_i &= t_{ip} \tilde{\sigma}_p, \\ \tilde{\varepsilon} &= T'\varepsilon, & \tilde{\varepsilon}_p &= \varepsilon_i t_{ip}, & \varepsilon_i &= t_{ip} \tilde{\varepsilon}_p, & t_{ip} t_{iq} &= \delta_{pq}, \end{aligned} \quad (5)$$

из (4) получаем

$$\tilde{\sigma} = \Lambda \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\sigma}_p = \lambda_{pq} \tilde{\varepsilon}_q, \quad p = q,$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1 &= \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_1, & \tilde{\sigma}_2 &= \lambda_2 \tilde{\varepsilon}_2, & \tilde{\sigma}_3 &= \lambda_3 \tilde{\varepsilon}_3, \\ \tilde{\sigma}_4 &= \lambda_4 \tilde{\varepsilon}_4, & \tilde{\sigma}_5 &= \lambda_5 \tilde{\varepsilon}_5, & \tilde{\sigma}_6 &= \lambda_6 \tilde{\varepsilon}_6. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно (5) величины $\tilde{\sigma}_p$, $\tilde{\varepsilon}_p$ являются проекциями тензоров (векторов) σ_i , ε_i на тензоры (векторы) ортогонального базиса t_{ip} , $p = \overline{1, 6}$ и остаются инвариантными при ортогональных преобразованиях системы координат x_i . Таким образом, закон Гука (1) представлен в виде шести независимых линейных инвариантных соотношений (6).

Выражение для удельной энергии деформации имеет вид

$$2\Phi = \sigma_i \varepsilon_i = t_{ip} \tilde{\sigma}_p t_{iq} \tilde{\varepsilon}_q = \delta_{pq} \tilde{\sigma}_p \tilde{\varepsilon}_q = \tilde{\sigma}_p \tilde{\varepsilon}_p. \quad (7)$$

Из (6) находим

$$\begin{aligned} 2\Phi_1 &= \tilde{\sigma}_1 \tilde{\varepsilon}_1 = \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_1^2 = \frac{1}{\lambda_1} \tilde{\sigma}_1^2, & 2\Phi_2 &= \tilde{\sigma}_2 \tilde{\varepsilon}_2 = \lambda_2 \tilde{\varepsilon}_2^2 = \frac{1}{\lambda_2} \tilde{\sigma}_2^2, \\ 2\Phi_3 &= \tilde{\sigma}_3 \tilde{\varepsilon}_3 = \lambda_3 \tilde{\varepsilon}_3^2 = \frac{1}{\lambda_3} \tilde{\sigma}_3^2, & 2\Phi_4 &= \tilde{\sigma}_4 \tilde{\varepsilon}_4 = \lambda_4 \tilde{\varepsilon}_4^2 = \frac{1}{\lambda_4} \tilde{\sigma}_4^2, \\ 2\Phi_5 &= \tilde{\sigma}_5 \tilde{\varepsilon}_5 = \lambda_5 \tilde{\varepsilon}_5^2 = \frac{1}{\lambda_5} \tilde{\sigma}_5^2, & 2\Phi_6 &= \tilde{\sigma}_6 \tilde{\varepsilon}_6 = \lambda_6 \tilde{\varepsilon}_6^2 = \frac{1}{\lambda_6} \tilde{\sigma}_6^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражения (8) представляют собой составляющие энергии, соответствующие собственным состояниям t_{ip} , $p = \overline{1, 6}$. Из (7), (8) получаем

$$\begin{aligned} 2\Phi &= \sigma_i \varepsilon_i = \tilde{\sigma}_p \tilde{\varepsilon}_p = \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_1^2 + \lambda_2 \tilde{\varepsilon}_2^2 + \lambda_3 \tilde{\varepsilon}_3^2 + \lambda_4 \tilde{\varepsilon}_4^2 + \lambda_5 \tilde{\varepsilon}_5^2 + \lambda_6 \tilde{\varepsilon}_6^2 = \\ &= \frac{1}{\lambda_1} \tilde{\sigma}_1^2 + \frac{1}{\lambda_2} \tilde{\sigma}_2^2 + \frac{1}{\lambda_3} \tilde{\sigma}_3^2 + \frac{1}{\lambda_4} \tilde{\sigma}_4^2 + \frac{1}{\lambda_5} \tilde{\sigma}_5^2 + \frac{1}{\lambda_6} \tilde{\sigma}_6^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Будем считать, что собственные модули λ_i пронумерованы в порядке убывания:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \lambda_5 \geq \lambda_6 > 0. \quad (10)$$

В зависимости от числа различных собственных модулей λ_i и их кратностей все анизотропные материалы, характеризуемые матрицей модулей упругости A (3), делятся на 32 класса [15, 16]. В координатах $\tilde{\sigma}_p$, $\tilde{\varepsilon}_p$ выражения (6) представляют собой линейные функции (рис. 1).

Допустим, что при нагружении материал может воспринять (накопить) только определенную величину энергии упругости, соответствующую собственным состояниям t_{ip} ,

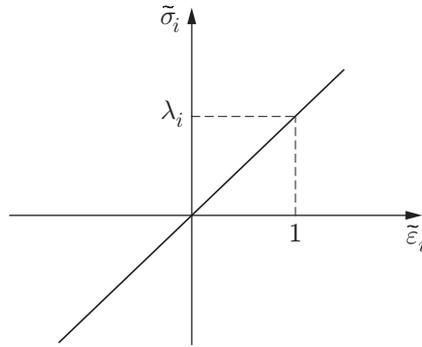


Рис. 1. Линейные функции (6)

$p = \overline{1, 6}$ и собственным модулям $\lambda_p, p = \overline{1, 6}$, при этом предельные значения $\Phi_p = k_p, p = \overline{1, 6}$. Тогда из (8) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1 \tilde{\varepsilon}_1 &= \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_1^2 = \frac{1}{\lambda_1} \tilde{\sigma}_1^2 = 2k_1, & \tilde{\sigma}_2 \tilde{\varepsilon}_2 &= \lambda_2 \tilde{\varepsilon}_2^2 = \frac{1}{\lambda_2} \tilde{\sigma}_2^2 = 2k_2, \\ \tilde{\sigma}_3 \tilde{\varepsilon}_3 &= \lambda_3 \tilde{\varepsilon}_3^2 = \frac{1}{\lambda_3} \tilde{\sigma}_3^2 = 2k_3, & \tilde{\sigma}_4 \tilde{\varepsilon}_4 &= \lambda_4 \tilde{\varepsilon}_4^2 = \frac{1}{\lambda_4} \tilde{\sigma}_4^2 = 2k_4, \\ \tilde{\sigma}_5 \tilde{\varepsilon}_5 &= \lambda_5 \tilde{\varepsilon}_5^2 = \frac{1}{\lambda_5} \tilde{\sigma}_5^2 = 2k_5, & \tilde{\sigma}_6 \tilde{\varepsilon}_6 &= \lambda_6 \tilde{\varepsilon}_6^2 = \frac{1}{\lambda_6} \tilde{\sigma}_6^2 = 2k_6. \end{aligned} \tag{11}$$

В (11) предполагается, что все собственные модули $\lambda_p, p = \overline{1, 6}$ различные и порядок соотношений между предельными значениями $k_p, p = \overline{1, 6}$ может не совпадать с упорядочиванием собственных модулей (10). Предельные значения $\Phi_p = k_p, p = \overline{1, 6}$ (11) достигаются независимо друг от друга. Пусть, например, $\Phi_3 = k_3$, а $\Phi_p < k_p, p \neq 3$. Тогда вместо третьего равенства (6) из (11) следует соотношение

$$\tilde{\sigma}_3 = \frac{2k_3}{\tilde{\varepsilon}_3}, \tag{12}$$

где $2k_3 = \lambda_3 \tilde{\varepsilon}_{3(0)}^2 = \tilde{\sigma}_{3(0)}^2 / \lambda_3$; $\tilde{\varepsilon}_{3(0)}, \tilde{\sigma}_{3(0)}$ — предельные упругие деформация и напряжение в подпространстве с собственным состоянием t_{i3} . Выражение (12) есть уравнение гиперболы (рис. 2). Если в подпространстве с собственным состоянием t_{i3} происходит разгрузка, то она происходит по упругому закону (6).

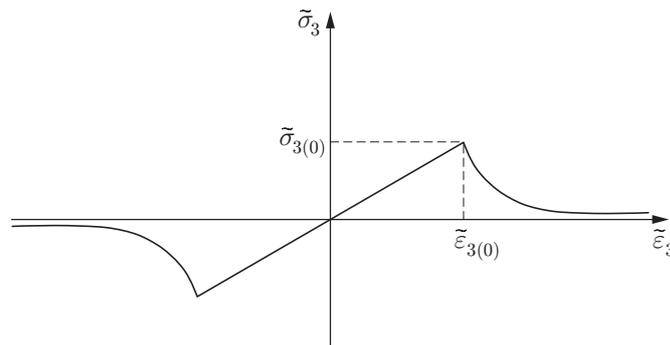


Рис. 2. Предельное условие (12)

При дальнейшем нагружении предельное значение энергии деформации может быть достигнуто, например, в подпространстве с собственным состоянием t_{i2} ($\Phi_2 = k_2$) или t_{i4} ($\Phi_4 = k_4$), при этом определяющие соотношения также будут иметь вид (12):

$$\tilde{\sigma}_2 = \frac{2k_2}{\tilde{\varepsilon}_2}, \quad \tilde{\sigma}_4 = \frac{2k_4}{\tilde{\varepsilon}_4}.$$

В зависимости от соотношений между величинами k_p , $p = \overline{1,6}$ предельные значения (11) могут достигаться в различных комбинациях и последовательности. По-видимому, полное предельное состояние получается при одновременном выполнении всех шести равенств (11).

Аналогично получаются критерии предельности и определяющие соотношения в случаях, когда некоторые собственные модули λ_p оказываются кратными, т. е. совпадают. Рассмотрим, например, матрицу коэффициентов податливости для материалов кубической сингонии

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & \\ a_{21} & a_{11} & & \text{sym} & & & \\ a_{21} & a_{21} & a_{11} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & \end{bmatrix}, \quad (13)$$

при этом собственные модули

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{\lambda_1} = a_{11} + 2a_{21} = a_{11}(1 - 2\nu) > 0, \\ \mu_2 = \mu_3 &= \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_3} = a_{11} - a_{21} = a_{11}(1 + \nu) > 0, \\ \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 &= \frac{1}{\lambda_4} = \frac{1}{\lambda_5} = \frac{1}{\lambda_6} = a_{44} > 0, \end{aligned} \quad (14)$$

а собственные состояния могут быть выбраны в виде [17]

$$t_{ip} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Из (14) следует, что коэффициент Пуассона $\nu = -a_{21}/a_{11}$ находится в пределах $-1 < \nu < 1/2$. В случае изотропного материала $a_{44} = a_{11} - a_{21}$. В силу кратности собственных модулей λ_2, λ_4 в соответствующих подпространствах собственных состояний t_{ip} (15) возможно ортогональное преобразование [18] $t_{iq}^* = t_{ip}\alpha_{pq}$, $p, q = 2, 3$ или $p, q = 4, 5, 6$, где α_{pq} — произвольные ортогональные матрицы второго или третьего порядка. В случае изотропного материала α_{pq} , $p, q = \overline{2,6}$ — произвольная ортогональная матрица пятого порядка. Это преобразование соответствует так называемому постулату изотропии [18, 19].

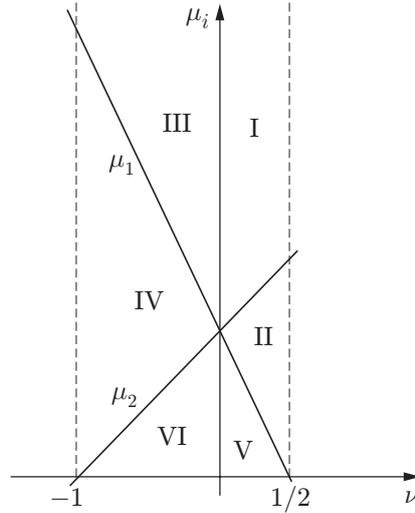


Рис. 3. Допустимые области значений μ_i для материалов кубической сингонии

В зависимости от соотношений между величинами μ_1, μ_2, μ_4 (14) (или $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$) материалы кубической сингонии делятся на шесть классов [15–17]:

- I. $\{1, 2, 3\} \longleftrightarrow \mu_1 < \mu_2 < \mu_4$;
- II. $\{1, 3, 2\} \longleftrightarrow \mu_1 < \mu_4 < \mu_2$;
- III. $\{2, 1, 3\} \longleftrightarrow \mu_2 < \mu_1 < \mu_4$;
- IV. $\{2, 3, 1\} \longleftrightarrow \mu_2 < \mu_4 < \mu_1$;
- V. $\{3, 1, 2\} \longleftrightarrow \mu_4 < \mu_1 < \mu_2$;
- VI. $\{3, 2, 1\} \longleftrightarrow \mu_4 < \mu_2 < \mu_1$.

Допустимые области значений μ_i/a_{11} ($a_{11} = 1$) для данных классов показаны на рис. 3. Изотропному материалу $\mu_2 = \mu_4$ (14) соответствуют два класса [15–17]: $\{1, 5\} \longleftrightarrow \mu_1 < \mu_2$ ($0 < \nu < 1/2$) и $\{5, 1\} \longleftrightarrow \mu_2 < \mu_1$ ($-1 < \nu < 0$) (см. рис. 3). Чтобы классы (16) соответствовали упорядоченности собственных модулей (10), нужно переобозначить модули (14) и переставить столбцы в матрице (15).

С учетом (10), (14), (15) выражения для удельной энергии деформации (9) для класса $\{1, 3, 2\}$ (16) материалов кубической сингонии и класса $\{1, 5\}$ изотропных материалов записываются в виде

$$2\Phi = \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_1^2 + \lambda_2 (\tilde{\varepsilon}_2^2 + \tilde{\varepsilon}_3^2 + \tilde{\varepsilon}_4^2) + \lambda_5 (\tilde{\varepsilon}_5^2 + \tilde{\varepsilon}_6^2) = \frac{1}{\lambda_1} \tilde{\sigma}_1^2 + \frac{1}{\lambda_2} (\tilde{\sigma}_2^2 + \tilde{\sigma}_3^2 + \tilde{\sigma}_4^2) + \frac{1}{\lambda_5} (\tilde{\sigma}_5^2 + \tilde{\sigma}_6^2); \quad (17)$$

$$2\Phi = \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_1^2 + \lambda_2 (\tilde{\varepsilon}_2^2 + \tilde{\varepsilon}_3^2 + \tilde{\varepsilon}_4^2 + \tilde{\varepsilon}_5^2 + \tilde{\varepsilon}_6^2) = \frac{1}{\lambda_1} \tilde{\sigma}_1^2 + \frac{1}{\lambda_2} (\tilde{\sigma}_2^2 + \tilde{\sigma}_3^2 + \tilde{\sigma}_4^2 + \tilde{\sigma}_5^2 + \tilde{\sigma}_6^2), \quad (18)$$

а, например, для класса $\{2, 1, 3\}$ (16) материалов кубической сингонии и класса $\{5, 1\}$ изотропных материалов — в виде

$$2\Phi = \lambda_1 (\tilde{\varepsilon}_1^2 + \tilde{\varepsilon}_2^2) + \lambda_3 \tilde{\varepsilon}_3^2 + \lambda_4 (\tilde{\varepsilon}_4^2 + \tilde{\varepsilon}_5^2 + \tilde{\varepsilon}_6^2) = \frac{1}{\lambda_1} (\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2) + \frac{1}{\lambda_3} \tilde{\sigma}_3^2 + \frac{1}{\lambda_4} (\tilde{\sigma}_4^2 + \tilde{\sigma}_5^2 + \tilde{\sigma}_6^2); \quad (19)$$

$$2\Phi = \lambda_1(\tilde{\varepsilon}_1^2 + \tilde{\varepsilon}_2^2 + \tilde{\varepsilon}_3^2 + \tilde{\varepsilon}_4^2 + \tilde{\varepsilon}_5^2) + \lambda_6\tilde{\varepsilon}_6^2 = \frac{1}{\lambda_1}(\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \tilde{\sigma}_3^2 + \tilde{\sigma}_4^2 + \tilde{\sigma}_5^2) + \frac{1}{\lambda_6}\tilde{\sigma}_6^2. \quad (20)$$

Предполагаем, что в каждом подпространстве, соответствующем собственным модулям λ_p (17)–(20), может быть достигнуто предельное значение накопленной упругой энергии деформации. Тогда из (17)–(20) получаем

$$\tilde{\sigma}_1\tilde{\varepsilon}_1 = \lambda_1\tilde{\varepsilon}_1^2 = \frac{1}{\lambda_1}\tilde{\sigma}_1^2 = 2k_1,$$

$$\tilde{\sigma}_2\tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{\sigma}_3\tilde{\varepsilon}_3 + \tilde{\sigma}_4\tilde{\varepsilon}_4 = \lambda_2(\tilde{\varepsilon}_2^2 + \tilde{\varepsilon}_3^2 + \tilde{\varepsilon}_4^2) = \frac{1}{\lambda_2}(\tilde{\sigma}_2^2 + \tilde{\sigma}_3^2 + \tilde{\sigma}_4^2) = 2k_2, \quad (21)$$

$$\tilde{\sigma}_5\tilde{\varepsilon}_5 + \tilde{\sigma}_6\tilde{\varepsilon}_6 = \lambda_5(\tilde{\varepsilon}_5^2 + \tilde{\varepsilon}_6^2) = \frac{1}{\lambda_5}(\tilde{\sigma}_5^2 + \tilde{\sigma}_6^2) = 2k_5;$$

$$\tilde{\sigma}_1\tilde{\varepsilon}_1 = \lambda_1\tilde{\varepsilon}_1^2 = \frac{1}{\lambda_1}\tilde{\sigma}_1^2 = 2k_1, \quad \tilde{\sigma}_p\tilde{\varepsilon}_p = \lambda_2\tilde{\varepsilon}_p\tilde{\varepsilon}_p = \frac{1}{\lambda_2}\tilde{\sigma}_p\tilde{\sigma}_p = 2k_2, \quad p = \overline{2, 6}; \quad (22)$$

$$\tilde{\sigma}_1\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\sigma}_2\tilde{\varepsilon}_2 = \lambda_1(\tilde{\varepsilon}_1^2 + \tilde{\varepsilon}_2^2) = \frac{1}{\lambda_1}(\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2) = 2k_1,$$

$$\tilde{\sigma}_3\tilde{\varepsilon}_3 = \lambda_3\tilde{\varepsilon}_3^2 = \frac{1}{\lambda_3}\tilde{\sigma}_3^2 = 2k_3, \quad (23)$$

$$\tilde{\sigma}_4\tilde{\varepsilon}_4 + \tilde{\sigma}_5\tilde{\varepsilon}_5 + \tilde{\sigma}_6\tilde{\varepsilon}_6 = \lambda_4(\tilde{\varepsilon}_4^2 + \tilde{\varepsilon}_5^2 + \tilde{\varepsilon}_6^2) = \frac{1}{\lambda_4}(\tilde{\sigma}_4^2 + \tilde{\sigma}_5^2 + \tilde{\sigma}_6^2) = 2k_4;$$

$$\tilde{\sigma}_p\tilde{\varepsilon}_p = \lambda_1\tilde{\varepsilon}_p\tilde{\varepsilon}_p = \frac{1}{\lambda_1}\tilde{\sigma}_p\tilde{\sigma}_p = 2k_1, \quad p = \overline{1, 5}, \quad \tilde{\sigma}_6\tilde{\varepsilon}_6 = \lambda_6\tilde{\varepsilon}_6^2 = \frac{1}{\lambda_6}\tilde{\sigma}_6^2 = 2k_6. \quad (24)$$

Предельные значения $\Phi_p = k_p$ (21)–(24) в каждом классе могут достигаться независимо. Пусть, например, в (21) $\Phi_2 = k_2$, $\Phi_1 < k_1$, $\Phi_5 < k_5$, при этом считаем, что в предельном состоянии вид определяющих соотношений (6) сохраняется, но $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \Lambda_2(\tilde{\varepsilon}_p) = \Lambda_2(\tilde{\sigma}_p)$. Тогда из (21) получаем

$$\Lambda_2 = \frac{2k_2}{\tilde{\varepsilon}_2^2 + \tilde{\varepsilon}_3^2 + \tilde{\varepsilon}_4^2} = \frac{\tilde{\sigma}_2^2 + \tilde{\sigma}_3^2 + \tilde{\sigma}_4^2}{2k_2}. \quad (25)$$

Три соотношения (6) с учетом (25) принимают вид

$$\tilde{\sigma}_2 = \frac{2k_2\tilde{\varepsilon}_2}{\tilde{\varepsilon}_2^2 + \tilde{\varepsilon}_3^2 + \tilde{\varepsilon}_4^2}, \quad \tilde{\sigma}_3 = \frac{2k_2\tilde{\varepsilon}_3}{\tilde{\varepsilon}_2^2 + \tilde{\varepsilon}_3^2 + \tilde{\varepsilon}_4^2}, \quad \tilde{\sigma}_4 = \frac{2k_2\tilde{\varepsilon}_4}{\tilde{\varepsilon}_2^2 + \tilde{\varepsilon}_3^2 + \tilde{\varepsilon}_4^2}, \quad (26)$$

при этом предельное условие (21) очевидно выполняется. В (26) правые части зависят от трех переменных, а не от одной, как в (12). При дальнейшем нагружении может быть достигнуто предельное значение $\Phi_1 = k_1$ или $\Phi_5 = k_5$ (21). Если в каком-либо подпространстве происходит разгрузка, то она происходит по упругому закону (6).

Для изотропного материала класса $\{1, 5\}$ могут выполняться предельные условия (22): $\Phi_1 = k_1$, $\Phi_2 < k_2$, или $\Phi_1 < k_1$, $\Phi_2 = k_2$, или $\Phi_1 = k_1$, $\Phi_2 = k_2$. Если выполняется второе условие, то из (22) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_p\tilde{\sigma}_p &= (\sigma_i t_{ip})(\sigma_j t_{jp}) = t_{ip}t_{jp}\sigma_i\sigma_j = (\delta_{ij} - t_{i1}t_{j1})\sigma_i\sigma_j = \\ &= \delta_{ij}\sigma_i\sigma_j - t_{i1}\sigma_i t_{j1}\sigma_j = \sigma_i\sigma_i - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ss}\sigma_{kk} = \\ &= \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ss}\delta_{ij}\right)\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) = 2\lambda_2 k_2 = 2k^2, \quad p = \overline{2, 6}, \quad (27) \end{aligned}$$

т. е. последнее выражение совпадает с известным условием пластичности Мизеса [1–7]. Предельное условие в (24) $\tilde{\sigma}_p \tilde{\sigma}_p = 2\lambda_1 k_1 = 2k_2^2$, $p = \overline{1, 5}$ также совпадает с условием Мизеса (27).

Если $\Phi_1 < k_1$, $\Phi_2 = k_2$, то материал находится в упругопластическом состоянии и при этом $\lambda_2 = \Lambda_2(\tilde{\varepsilon}_p) = \Lambda_2(\tilde{\sigma}_p)$. Тогда из (22) находим

$$\Lambda_2 = \frac{2k_2}{\tilde{\varepsilon}_p \tilde{\varepsilon}_p} = \frac{\tilde{\sigma}_p \tilde{\sigma}_p}{2k_2}, \quad p = \overline{2, 6}. \quad (28)$$

Пять соотношений (6) с учетом (28) принимают вид

$$\tilde{\sigma}_q = \frac{2k_2}{\tilde{\varepsilon}_p \tilde{\varepsilon}_p} \tilde{\varepsilon}_q, \quad p, q = \overline{2, 6}, \quad (29)$$

при этом предельное условие (22) очевидно выполняется. В (29) правые части зависят от пяти переменных.

Отметим, что в предельном состоянии предельными условиями (определяющими соотношениями) являются только первые выражения в равенствах (11) или (21)–(24), а не выражения с модулями λ_p , $p = \overline{1, 6}$. Например, в (21) выражение $\tilde{\sigma}_2 \tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{\sigma}_3 \tilde{\varepsilon}_3 + \tilde{\sigma}_4 \tilde{\varepsilon}_4 = 2k_2$ есть предельное условие, из которого следуют определяющие соотношения (25), (26), а выражение

$$\lambda_2(\tilde{\varepsilon}_{2(0)}^2 + \tilde{\varepsilon}_{3(0)}^2 + \tilde{\varepsilon}_{4(0)}^2) = \frac{1}{\lambda_2}(\tilde{\sigma}_{2(0)}^2 + \tilde{\sigma}_{3(0)}^2 + \tilde{\sigma}_{4(0)}^2) = 2k_2$$

является только соотношением, из которого с помощью экспериментальных данных можно определить постоянную k_2 . В последнем соотношении индекс “(0)” соответствует предельным упругим деформациям и напряжениям в подпространствах с собственными модулями λ_p , $p = \overline{1, 6}$. При более подробной записи в формулах (11), (21)–(24) у напряжений и деформаций следовало бы добавить индекс “(0)”. Аналогично для изотропного материала в (22) предельным условием является выражение $\tilde{\sigma}_p \tilde{\varepsilon}_p = 2k_2$, $p = \overline{2, 6}$, из которого следуют определяющие соотношения (28), (29), а условие Мизеса (27)

$$\lambda_2 \tilde{\varepsilon}_{p(0)} \tilde{\varepsilon}_{p(0)} = \frac{1}{\lambda_2} \tilde{\sigma}_{p(0)} \tilde{\sigma}_{p(0)} = 2k_2, \quad p = \overline{2, 6}$$

является соотношением, с помощью которого по экспериментальным данным определяется постоянная k_2 .

Функции (26), (29) имеют вид

$$\tilde{\sigma}_2 = \frac{2k_2 \tilde{\varepsilon}_2}{\tilde{\varepsilon}_2^2 + \tilde{\varepsilon}_3^2 + \tilde{\varepsilon}_4^2 + \tilde{\varepsilon}_5^2 + \tilde{\varepsilon}_6^2} = \frac{2k_2 \tilde{\varepsilon}_2}{\tilde{\varepsilon}_2^2 + a^2},$$

где $a^2 = \tilde{\varepsilon}_3^2 + \tilde{\varepsilon}_4^2 + \tilde{\varepsilon}_5^2 + \tilde{\varepsilon}_6^2$. При малых a^2 эти функции близки к функциям вида (12) (см. рис. 2).

Определяющие уравнения упругопластического состояния (6), (28), (29) записываются в форме обычного закона Гука (1), где

$$A_{ij} = (\lambda_1 - \Lambda_2)t_{i1}t_{j1} + \Lambda_2\delta_{ij}, \quad a_{ij} = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\Lambda_2}\right)t_{i1}t_{j1} + \frac{1}{\Lambda_2}\delta_{ij}, \quad (30)$$

$$t_{i1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 0, 0, 0).$$

В формуле (30) для a_{ij} используется второе выражение (28) для Λ_2 в том случае, когда необходимо выразить деформации через напряжения (1). Матрицы A_{ij} , a_{ij} , аналогичные

матрицам в формулах (30), могут быть записаны и для других вариантов предельных соотношений (11) или (21)–(24). Для этого в соответствующих выражениях нужно заменить малые буквы λ_i на большие Λ_i (например, Λ_2 имеет вид (25)).

Рассмотрим случай, когда имеется только одно напряжение σ_1 . Тогда из (1) с учетом (14), (30) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_{11}\sigma_1, & \varepsilon_2 = \varepsilon_3 &= a_{21}\sigma_1 = -\nu\varepsilon_1, & \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 &= 0, \\ \frac{\sigma_1}{\lambda_1} &= \frac{1}{a_{11}\lambda_1} \varepsilon_1 = (1 - 2\nu)\varepsilon_1, & \frac{\Lambda_2}{\lambda_1} &= \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu}. \end{aligned} \quad (31)$$

Равенства (31) выполняются как в случае упругого, так и в случае упругопластического состояния. Для Λ_2 имеем формулу (28), где (см. (27), (31))

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_p \tilde{\varepsilon}_p &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 - \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 = \\ &= \varepsilon_1^2 + (-\nu\varepsilon_1)^2 + (-\nu\varepsilon_1)^2 - \frac{1}{3} (\varepsilon_1 - \nu\varepsilon_1 - \nu\varepsilon_1)^2 = \frac{2}{3} (1 + \nu)^2 \varepsilon_1^2, \quad p = \overline{2, 6}. \end{aligned} \quad (32)$$

Если материал находится в пластическом состоянии, то из (28), (31), (32) следует уравнение для ν

$$(1 - 2\nu)(1 + \nu) = \frac{3k_2}{\lambda_1 \varepsilon_1^2}, \quad \varepsilon_1^2 > \varepsilon_{1(0)}^2, \quad (33)$$

где $\varepsilon_{1(0)}^2 = 3k_2/[\lambda_1(1-2\nu)(1+\nu)]$ — предельное значение упругой деформации. Далее из (33) находим

$$\nu = \frac{1}{4} \left(-1 + 3\sqrt{1 - \frac{8k_2}{3\lambda_1 \varepsilon_1^2}} \right). \quad (34)$$

Здесь перед корнем выбран знак “плюс”, так как должно выполняться условие $0 < \nu < 1/2$, а под знаком корня должно быть положительное число, т. е. $\varepsilon_1^2 > 8k_2/(3\lambda_1)$. В силу неравенства (33) последнее неравенство всегда выполняется.

С учетом (34) из (31) получаем

$$\frac{\sigma_1}{\lambda_1} = \begin{cases} (1 - 2\nu)\varepsilon_1, & \varepsilon_1^2 \leq \varepsilon_{1(0)}^2, \\ (3/2) \left[1 - \sqrt{1 - 8k_2/(3\lambda_1 \varepsilon_1^2)} \right] \varepsilon_1, & \varepsilon_1^2 > \varepsilon_{1(0)}^2. \end{cases} \quad (35)$$

Графики функций (34), (35) при $\nu = 0,3$ и $\varkappa = 2k_2/\lambda_1 = 0,02; 0,05; 0,10$ приведены на рис. 4, 5 соответственно. Теоретические кривые на рис. 4 практически совпадают с экспериментальными кривыми, построенными в [20]. На рис. 5 видно, что переход к площадке текучести начинается с некоторого пика. Это согласуется с экспериментальными данными.

Из предложенной выше модели следует, что в зависимости от соотношений между собственными модулями λ_p и предельными значениями k_p энергии деформации в соответствующих подпространствах могут получаться различные варианты предельных условий для анизотропных материалов. В конкретных задачах все эти варианты необходимо подробно исследовать.

С учетом (1) выражение для удельной энергии деформации (9) принимает вид $2\Phi = \sigma_i a_{ij} \sigma_j$. Пусть напряженное состояние представлено в виде суммы двух состояний $\sigma_i = \alpha_i + \beta_i$, тогда

$$2\Phi = (\alpha_i + \beta_i) a_{ij} (\alpha_j + \beta_j) = \alpha_i a_{ij} \alpha_j + \beta_i a_{ij} \beta_j + 2\alpha_i a_{ij} \beta_j. \quad (36)$$

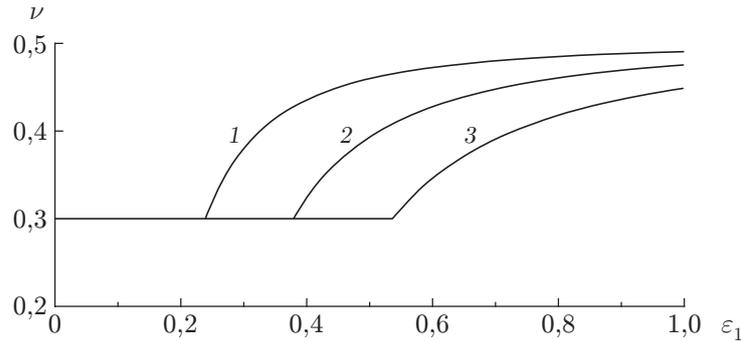


Рис. 4. Зависимость (34):
1 — $\kappa = 0,02$; 2 — $\kappa = 0,05$; 3 — $\kappa = 0,10$

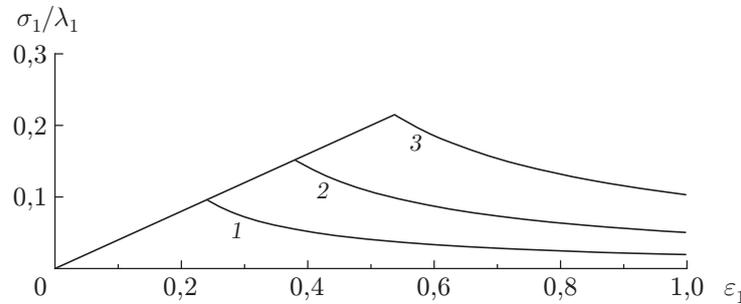


Рис. 5. Зависимость (35) (обозначения те же, что на рис. 4)

Напряжения α_i и β_j называются энергетически разделенными, если $\alpha_i a_{ij} \beta_j = 0$ [6], при этом из (36) следует $\Phi(\alpha + \beta) = \Phi(\alpha) + \Phi(\beta)$. Напряжения $c\alpha_i$ являются безопасными, если при любом значении коэффициента c упругий элемент не переходит в пластическое состояние [6]. Ортогональным дополнением к напряжениям α_i являются напряжения γ_i , такие что $\alpha_i \gamma_i = 0$. Состояния, энергетически разделенные с α_i , имеют вид $\beta_i = A_{ik} \gamma_k$. Действительно,

$$\alpha_i a_{ij} \beta_j = \alpha_i a_{ij} A_{jk} \gamma_k = \alpha_i \delta_{ik} \gamma_k = \alpha_i \gamma_i = 0.$$

Выражения для напряжений представим в виде

$$\sigma_i = \sigma_i^0 + \sigma_i^* = c\alpha_i + A_{ik} \gamma_k.$$

Из условия энергетической разделенности получаем

$$\sigma_i^0 a_{ij} (\sigma_j - \sigma_j^0) = 0, \quad \sigma_i^0 a_{ij} \sigma_j = \sigma_i^0 a_{ij} \sigma_j^0, \quad c\alpha_i a_{ij} \sigma_j = c^2 \alpha_i a_{ij} \alpha_j, \quad c = \frac{\alpha_i a_{ij} \sigma_j}{\alpha_i a_{ij} \alpha_j}.$$

Выражение

$$E_{ij}^0 = \frac{\alpha_i a_{jk} \alpha_k}{\alpha_p a_{pq} \alpha_q}$$

проецирует напряжения σ_j на одномерное подпространство безопасных состояний

$$E_{ij}^0 \sigma_j = \frac{\alpha_i a_{jk} \alpha_k \sigma_j}{\alpha_p a_{pq} \alpha_q} = c\alpha_i = \sigma_i^0.$$

Удельная энергия деформации представляет собой сумму двух составляющих $\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma^0) + \Phi(\sigma^*)$, где

$$2\Phi(\sigma^0) = \sigma_i^0 a_{ij} \sigma_j^0 = c^2 \alpha_i a_{ij} \alpha_j = \frac{(\alpha_i a_{ij} \sigma_j)^2}{\alpha_i a_{ij} \alpha_j} = \sigma_i \frac{\alpha_i a_{ij} \sigma_j}{\alpha_p a_{pq} \alpha_q} = \sigma_i a_{ij}^0 \sigma_j,$$

$$\begin{aligned}
2\Phi(\sigma^*) &= \sigma_i^* a_{ij} \sigma_j^* = (\sigma_i - \sigma_i^0) a_{ij} (\sigma_j - \sigma_j^0) = \sigma_i a_{ij} (\sigma_j - \sigma_j^0) - \sigma_i^0 a_{ij} (\sigma_j - \sigma_j^0) = \\
&= \sigma_i a_{ij} \sigma_j - \sigma_i a_{ij} \sigma_j^0 = \sigma_i a_{ij} \sigma_j - \sigma_i a_{ij} E_{js}^0 \sigma_s = \sigma_i (a_{ij} - a_{im} E_{mj}^0) \sigma_j = \\
&= \sigma_i \left(a_{ij} - \frac{a_{im} \alpha_m a_{jk} \alpha_k}{\alpha_p a_{pq} \alpha_q} \right) \sigma_j = \sigma_i a_{ij}^* \sigma_j.
\end{aligned}$$

Так как $\sigma_i^0 = c\alpha_i$ — безопасное напряжение, то предлагается следующий энергетический критерий предельности [6]:

$$2\Phi(\sigma^*) = \sigma_i a_{ij}^* \sigma_j \leq 2k^* \quad (37)$$

(k^* — предельное значение энергии деформации в подпространстве с напряжениями σ_i^*). Для матрицы a_{ij}^* безопасное напряжение α_i является собственным состоянием (вектором) с нулевым собственным значением: $a_{ij}^* \alpha_j = 0$.

Пусть, например, безопасными являются гидростатические напряжения $\alpha_i = \delta_i$. Тогда из приведенных выше формул находим

$$\begin{aligned}
c &= \frac{\delta_i a_{ij} \sigma_j}{\delta_i a_{ij} \delta_j} = \frac{(a_{1j} + a_{2j} + a_{3j}) \sigma_j}{a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2(a_{32} + a_{31} + a_{21})} = K(a_{1j} + a_{2j} + a_{3j}) \sigma_j, \\
E_{ij}^0 &= \frac{\delta_i a_{jk} \delta_k}{\delta_p a_{pq} \delta_q} = K \delta_i (a_{1j} + a_{2j} + a_{3j}), \quad (38)
\end{aligned}$$

$$E_{ij}^0 \sigma_j = K \delta_i (a_{1j} + a_{2j} + a_{3j}) \sigma_j = c \delta_i = \sigma_i^0, \quad \sigma_i^* = \sigma_i - c \delta_i,$$

где K — объемный модуль. При этом критерий предельности (37) принимает вид

$$\begin{aligned}
2\Phi(\sigma^*) &= (\sigma_i - c \delta_i) a_{ij} (\sigma_j - c \delta_j) = \sigma_i \left(a_{ij} - \frac{a_{im} \delta_m a_{jk} \delta_k}{\delta_p a_{pq} \delta_q} \right) \sigma_j = \\
&= \sigma_i \left[a_{ij} - \frac{(a_{i1} + a_{i2} + a_{i3})(a_{j1} + a_{j2} + a_{j3})}{a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2(a_{32} + a_{31} + a_{21})} \right] \sigma_j \leq 2k^*. \quad (39)
\end{aligned}$$

Для изотропного материала класса {1, 5} имеем

$$a_{ij} = \frac{1}{3\lambda_1} \delta_i \delta_j + \frac{1}{\lambda_2} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} \delta_i \delta_j \right),$$

и с учетом формул (38) критерий предельности (39) принимает вид условия пластичности Мизеса (27), при этом

$$c = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad E_{ij}^0 = \frac{1}{3} \delta_i \delta_j, \quad a_{ij}^* = \frac{1}{\lambda_2} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} \delta_i \delta_j \right), \quad k_2 = k^*.$$

Для трансверсально-изотропного материала с осью вращения x_3 и с матрицей коэффициентов податливости

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & \\ a_{21} & a_{11} & & & & & \text{sym} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} - a_{21} & \end{bmatrix} \quad (40)$$

из формул (38), (39) получаем

$$c = \frac{(a_{11} + a_{21} + a_{31})(\sigma_1 + \sigma_2) + (2a_{31} + a_{33})\sigma_3}{2(a_{11} + a_{21} + 2a_{31}) + a_{33}};$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Филоненко-Бородич М. М.** Механические теории прочности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1961.
2. **Гольденблат И. И.** Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов / И. И. Гольденблат, В. А. Кошнов. М.: Машиностроение, 1968.
3. **Писаренко Г. С.** Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. Киев: Наук. думка, 1976.
4. **Поль Б.** Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975. С. 336–520.
5. **Ву Э. М.** Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред // Композиционные материалы. Т. 2. Механика композиционных материалов. М.: Мир, 1978. С. 401–491.
6. **Рыхлевский Я.** Разложения упругой энергии и критерии предельности // Успехи механики. 1984. Т. 7, вып. 3. С. 51–80.
7. **Yu Mao-hong.** Advances in strength theories for materials under complex stress state in 20th century // Appl. Mech. Rev. 2002. V. 55, N 3. P. 169–218.
8. **Чанышев А. И.** О пластичности анизотропных сред // ПМТФ. 1984. № 2. С. 149–151.
9. **Кравчук А. С.** О теории пластичности анизотропных материалов // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1986. Вып. 27. С. 21–29.
10. **Аннин Б. Д.** Модели упругопластического деформирования трансверсально-изотропных материалов // Сиб. журн. индустр. математики. 1999. Т. 2, № 2. С. 3–7.
11. **Schreyer H. L., Zuo Q. H.** Anisotropic yield surfaces based on elastic projection operators // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1995. V. 62, N 3. P. 780–785.
12. **Arramon Y. P., Mechrabadi M. M., Martin D. W., Cowin S. C.** A multidimensional anisotropic strength criterion based on Kelvin modes // Intern. J. Solids Struct. 2000. V. 37, N 21. P. 2915–2935.
13. **Kowalczyk K., Ostrowska-Maciejewska J.** Energy-based limit condition for transversally isotropic solids // Arch. Mech. 2002. V. 54, N 5/6. P. 497–523.
14. **Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И.** Анизотропия упругих свойств материалов // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 131–151.
15. **Остросаблин Н. И.** О классификации анизотропных материалов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 71. С. 82–96.
16. **Остросаблин Н. И.** О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // ПМТФ. 1986. № 4. С. 127–135.
17. **Остросаблин Н. И.** Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 75. С. 113–125.
18. **Остросаблин Н. И.** О функциональной связи двух симметричных тензоров второго ранга // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 134–137.
19. **Ильющин А. А.** О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 6. С. 641–666.
20. **Жуков А. М.** О коэффициенте Пуассона в пластической области // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1954. № 12. С. 86–91.

Поступила в редакцию 18/II 2011 г.