

УДК 532.5:536.24

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУМЕРНЫХ ТЕПЛОВЫХ “ФАКЕЛОВ” ОТ ЛОКАЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ ЭНЕРГИИ В УСЛОВИЯХ СОПРЯЖЕННОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ

М. А. Шеремет

Томский государственный университет, 634050 Томск
E-mail: Michael-sher@yandex.ru

Проведен численный анализ сопряженной термогравитационной конвекции в горизонтальном цилиндре с двумя источниками энергии с постоянной температурой в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. Математическая модель сформулирована в безразмерных переменных функция тока — вектор завихренности — температура. Проанализировано влияние определяющих параметров (чисел Рэлея и Прандтля, температуры источников энергии, времени, относительной теплопроводности) как на локальные термогидродинамические характеристики (линии тока и поле температуры), так и на интегральный параметр (среднее число Нуссельта на поверхности источников тепловыделения).

Ключевые слова: двумерный тепловой “факел”, сопряженный теплоперенос, естественная конвекция, горизонтальный цилиндр, ламинарный режим течения.

Введение. Конвективные течения в замкнутых областях, обусловленные наличием локальных источников энергии как с постоянной температурой [1–7], так и с постоянной интенсивностью тепловыделения [8–10], встречаются во многих технических устройствах и аппаратах [1–16]. В настоящее время существует большое количество экспериментальных [1, 4–6] и теоретических [2, 3, 7–10] работ, в которых исследуются основные особенности формирования, развития и диссипации вихревых структур в замкнутых и полукрытых областях с одной или двумя теплопроводными стенками конечной толщины при наличии локальных источников энергии. В большинстве работ не учитывалось воздействие внешней среды (оно заменялось граничными условиями первого рода), а также теплопроводность контура. Известно, что учет кондуктивного механизма переноса тепла в твердых стенках в условиях воздействия окружающей среды может приводить к значительным изменениям термогидродинамических структур в полости, заполненной жидкостью [17, 18].

Целью настоящей работы является математическое моделирование динамики тепловых “факелов” от локальных источников энергии с постоянной температурой в горизонтальном цилиндре с теплопроводной твердой стенкой в условиях конвективного теплообмена с внешней средой.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (государственный контракт № П357), а также при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МК-5652.2012.8).

Рассматриваемая задача является как теоретической, так и прикладной. Представляет интерес теоретический анализ режимов формирования и развития восходящих конвективных течений над локальными источниками энергии, а также исследование условий их взаимодействия с тепловыми потоками от стенок цилиндра вследствие конвективного теплообмена с окружающей средой. Наиболее подробно исследована эволюция тепловых “факелов” над горизонтальными и вертикальными пластинами в замкнутых и полукрытых областях [11, 12] при отсутствии совместного влияния твердых стенок, обладающих тепловой инерционностью, и окружающей среды. Полученные в настоящей работе результаты показывают динамику конвективных течений в сопряженной постановке с учетом воздействия внешней среды, что может быть использовано как при проектировании и создании электронных приборов [13, 14], так и при оптимизации существующих технологических систем транспортировки и хранения жидкого топлива [15, 16]. Такие системы должны обеспечивать эффективную защиту топлива от замерзания, контролировать его вязкость и поддерживать заданную температуру.

Математическая модель. Рассматривается нестационарная сопряженная задача термогравитационной конвекции в горизонтальном цилиндре (рис. 1). Область решения достаточно точно моделирует сечение типичного узла радиоэлектронной аппаратуры при наличии двух тепловыделяющих элементов [19], а также сечение цилиндрической емкости с двумя внутренними нагревателями [15]. Температура источников тепловыделения, расположенных на внутренней поверхности стенки ($r = r_1$, $1,2\pi \leq \varphi \leq 1,4\pi$ и $r = r_1$, $1,6\pi \leq \varphi \leq 1,8\pi$), является постоянной в течение всего процесса конвекции. На границе $r = r_2$ при $0 \leq \varphi \leq \pi$ моделируется конвективный теплообмен с окружающей средой, при $\pi < \varphi < 2\pi$ стенка считается адиабатической. Температура внешней среды предполагается постоянной и меньшей по сравнению с начальной температурой области решения, что позволяет оценить тепловую инерционность материала стенок.

Предполагается, что теплофизические свойства материала твердой оболочки и жидкости не зависят от температуры, а режим течения является ламинарным. Жидкость считается теплопроводной ньютоновской и удовлетворяющей приближению Буссинеска.

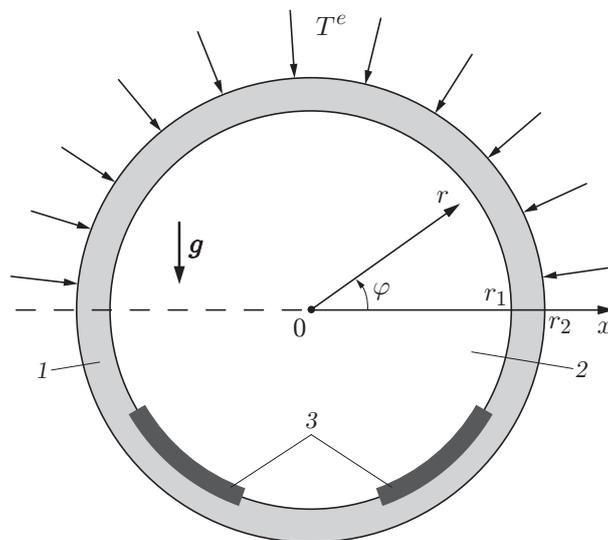


Рис. 1. Область решения задачи:

1 — твердая оболочка; 2 — газовая полость; 3 — источники энергии; T^e — температура окружающей среды

Процесс переноса тепла описывается системой нестационарных двумерных уравнений конвекции в приближении Буссинеска в полости [20] и нестационарным двумерным уравнением теплопроводности в стенке цилиндра [20, 21] в полярных координатах.

Математическая модель сформулирована в безразмерных переменных функция тока — завихренность — температура [20]. В качестве масштаба расстояния выбран радиус полости, равный r_1 . Для приведения к безразмерному виду указанной выше системы уравнений использовались соотношения

$$R = \frac{r}{r_1}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad U = \frac{V_r}{V_0}, \quad V = \frac{V_\varphi}{V_0}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \Psi = \frac{\psi}{V_0 r_1}, \quad \Omega = \frac{\omega}{V_0},$$

где r, φ — координаты полярной системы координат; R — безразмерная координата, соответствующая размерной координате r ; r_1 — размер полости по оси r (см. рис. 1); t — время; $t_0 = r_1/V_0$ — масштаб времени; τ — безразмерное время; V_r, V_φ — проекции вектора скорости на оси r, φ соответственно; U, V — безразмерные скорости, соответствующие скоростям V_r, V_φ ; $V_0 = \sqrt{g\beta(T_1 - T_0)r_1}$ — масштаб скорости (скорость естественной конвекции); g — ускорение свободного падения; β — температурный коэффициент объемного расширения; T — температура; T_1 — температура левого источника энергии; T_0 — начальная температура в полости; Θ — безразмерная температура; ψ — функция тока; Ψ — безразмерный аналог функции тока; ω — завихренность; Ω — безразмерный аналог завихренности.

Ниже приведены безразмерные уравнения естественной конвекции в сопряженной постановке [20]:

— для полости (см. рис. 1)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} - \frac{\Omega U}{R} + U \frac{\partial V}{\partial R} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{R}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} + \frac{\Omega}{R^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \sin \varphi - R \frac{\partial \Theta}{\partial R} \cos \varphi; \quad (1)$$

$$R \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = \Omega; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{\text{Pr} R}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} \right); \quad (3)$$

— для стенки цилиндра (см. рис. 1)

$$\frac{1}{\text{Fo}} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2}. \quad (4)$$

Здесь $\text{R} = g\beta(T_1 - T_0)r_1^3/(\nu a_2)$ — число Рэлея; ν — кинематическая вязкость; a_2 — теплопроводность жидкости; $\text{Pr} = \nu/a_2$ — число Прандтля; $\text{Fo} = a_1/\sqrt{g\beta(T_1 - T_0)r_1^3}$ — число Фурье; a_1 — теплопроводность материала твердой оболочки цилиндра.

Для сформулированной задачи (1)–(4) начальные условия имеют вид

$$\Psi(R, \varphi, 0) = \Omega(R, \varphi, 0) = \Theta(R, \varphi, 0) = 0.$$

На источниках энергии в течение всего процесса конвекции $\Theta = \text{const}$ (на левом источнике $\Theta_1 = 1, 0$, на правом источнике $\Theta_2 = 0; 0,5; 1,0; 2,0$).

Кроме того, задаются следующие граничные условия:

— на границе $R = r_2/r_1$ при $0 \leq \varphi \leq \pi$ выполняются условия, учитывающие конвективный теплообмен с внешней средой:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial R} = \text{Bi}(\Theta^e - \Theta);$$

— на границе $R = r_2/r_1$ при $\pi < \varphi < 2\pi$ заданы условия теплоизоляции

$$\frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0;$$

— на внутренней границе $R = 1$ вне источников энергии выполняются условия

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0, \quad \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2}, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial R} = \lambda_{2,1} \frac{\partial \Theta_2}{\partial R};$$

— на поверхности источников тепловыделения ($R = 1, 1,2\pi \leq \varphi \leq 1,4\pi$ и $R = 1, 1,6\pi \leq \varphi \leq 1,8\pi$) ставятся условия

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0, \quad \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2}, \quad \Theta = \text{const};$$

— на границах $\varphi = 0, 2\pi$ задаются условия периодичности искомых функций

$$\begin{aligned} \Psi|_{\varphi=0} = \Psi|_{\varphi=2\pi}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}|_{\varphi=2\pi}, \quad \Omega|_{\varphi=0} = \Omega|_{\varphi=2\pi}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}|_{\varphi=2\pi}, \\ \Theta|_{\varphi=0} = \Theta|_{\varphi=2\pi}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}|_{\varphi=2\pi}. \end{aligned}$$

Здесь $Bi = \alpha r_1 / \lambda_1$ — число Био; α — коэффициент теплоотдачи от внешней поверхности цилиндра; Θ^e — безразмерная температура окружающей среды; $\lambda_{2,1} = \lambda_2 / \lambda_1$ — относительная теплопроводность; λ_i — теплопроводность i -й подобласти.

Следует отметить, что на внутренней границе цилиндра $R = 1$ вне источников тепловыделения для уравнения энергии заданы граничные условия четвертого рода в полярных координатах [21, 22], учитывающие наличие границы раздела двух сред газ — твердая оболочка. Предполагается, что на этой границе реализуются условия идеального контакта, которые формулируются в виде равенств температур и тепловых потоков. Известно, что в случае нестационарного теплообмена задачи теплообмена нужно рассматривать как сопряженные [22].

Уравнения (1)–(4) решались конечно-разностным методом [20, 23, 24] на равномерной сетке размером 200×200 с использованием неявной двухслойной схемы. Для численного решения уравнений (1), (3), (4) применялась локально-одномерная схема Самарского [24]. Дискретизация конвективных слагаемых проводилась на основе монотонной аппроксимации Самарского [23]. Эволюционный член представлял собой одностороннюю разность по времени и имел первый порядок точности относительно шага по времени. Все производные по пространственным координатам аппроксимировались со вторым порядком точности по координате. Для дискретизации уравнения (2) применялся пятиточечный шаблон “крест” на основе формул симметричной аппроксимации вторых производных. При этом полученная система уравнений решалась методом последовательной верхней релаксации. Оптимальное значение параметра релаксации подбиралось на основе результатов вычислительных экспериментов.

Разработанный метод решения протестирован на модельной задаче о естественной конвекции в зазоре между двумя изотермическими коаксиальными цилиндрами [25]. Искомые величинами являлись среднее число Нуссельта на поверхности этих цилиндров (см. таблицу) и распределения изотерм (рис. 2). Из таблицы и рис. 2 следует, что созданная математическая модель и используемый численный алгоритм решения позволяют получить результаты, достаточно хорошо согласующиеся с известными данными.

Результаты численного моделирования. Численные исследования краевой задачи (1)–(4) с соответствующими начальными и граничными условиями проведены при следующих значениях безразмерных комплексов: $10^4 \leq R \leq 10^6$, $Pr = 0,1; 0,7; 7,0$, $\Theta_2 = 0$;

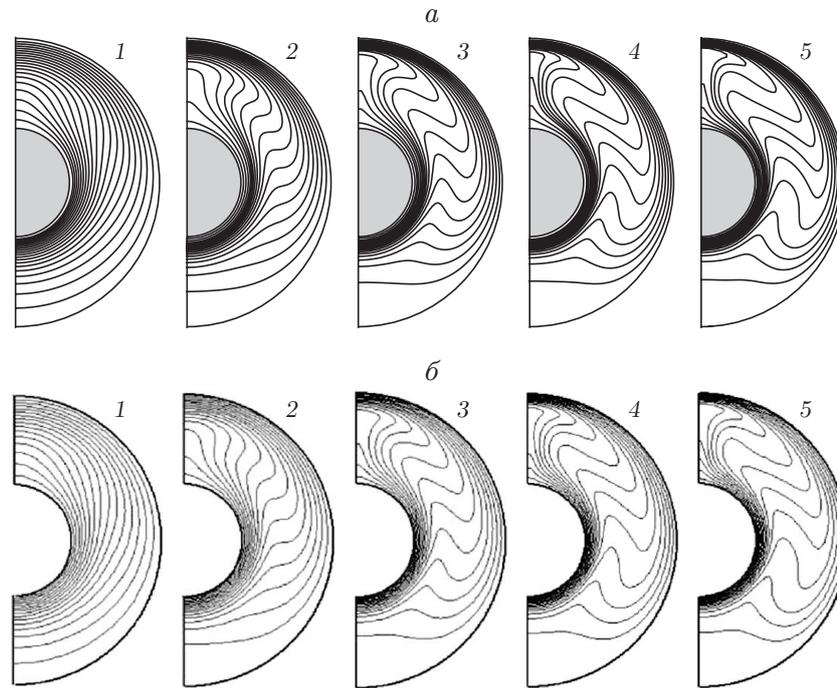


Рис. 2. Изотермы при различных значениях чисел Рэлея и Прандтля:

a — результаты, полученные в настоящей работе, *б* — данные [25]; 1 — $R = 2,38 \cdot 10^3$, $Pr = 0,716$, 2 — $R = 9,5 \cdot 10^3$, $Pr = 0,717$, 3 — $R = 3,2 \cdot 10^4$, $Pr = 0,717$, 4 — $R = 6,19 \cdot 10^4$, $Pr = 0,718$, 5 — $R = 1,02 \cdot 10^5$, $Pr = 0,718$

Значения среднего числа Нуссельта в зависимости от чисел Рэлея и Прандтля

| R | Pr | Nu | | | |
|-------------------|-------|-----------------------------|-------------|-------------|-------------|
| | | Результаты настоящей работы | Данные [25] | Данные [26] | Данные [27] |
| $2,38 \cdot 10^3$ | 0,716 | 1,374 | 1,320 | 1,38 | — |
| $9,50 \cdot 10^3$ | 0,717 | 2,040 | 1,999 | 2,01 | 1,9901 |
| $3,20 \cdot 10^4$ | 0,717 | 2,755 | 2,911 | 2,89 | — |
| $6,19 \cdot 10^4$ | 0,718 | 3,195 | 3,361 | 3,32 | 3,3092 |
| $1,02 \cdot 10^5$ | 0,718 | 3,569 | 3,531 | 3,66 | 3,6475 |

0,5; 1,0; 2,0, $0 \leq \tau \leq 100$, $Bi = 4,35 \cdot 10^{-2}$, $Fo = 3,5 \cdot 10^{-4}$ при $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$, $Bi = 3,33$, $Fo = 9,38 \cdot 10^{-6}$ при $\lambda_{2,1} = 4,3 \cdot 10^{-2}$. Безразмерные определяющие температуры принимали значения $\Theta^e = -1$, $\Theta_0 = 0$, $\Theta_1 = 1$. Анализировалось влияние чисел Рэлея и Прандтля, температуры правого источника энергии и относительной теплопроводности на распределения локальных и интегральных характеристик исследуемого процесса в различные моменты времени.

Влияние времени. На рис. 3 представлены линии тока и поля температуры при $R = 5 \cdot 10^4$, $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$, $Pr = 0,7$, $\Theta_2 = 1,0$ в различные моменты времени. На начальном этапе происходит зарождение тепловых “факелов” над локальными источниками тепла (рис. 3, *a, б*). При выбранном расположении нагревателей под действием выталкивающей силы наблюдаются формирование восходящих течений и отрыв от стенки цилиндра в окрестности верхних границ источников энергии: для левого источника — при $\varphi = 1,2\pi$, для правого — при $\varphi = 1,8\pi$. При $\tau = 10$ имеет место взаимодействие тепловых “факелов”, что оказывает влияние на гидродинамическую картину течения в полости.



Рис. 3. Линии тока (*вверху*) и поля температуры (*внизу*) при $R = 5 \cdot 10^4$, $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$, $Pr = 0,7$, $\Theta_2 = 1,0$:
 а — $\tau = 3$, б — $\tau = 6$, в — $\tau = 10$, г — $\tau = 15$, д — $\tau = 20$, е — $\tau = 25$, ж — $\tau = 30$,
 з — $\tau = 100$

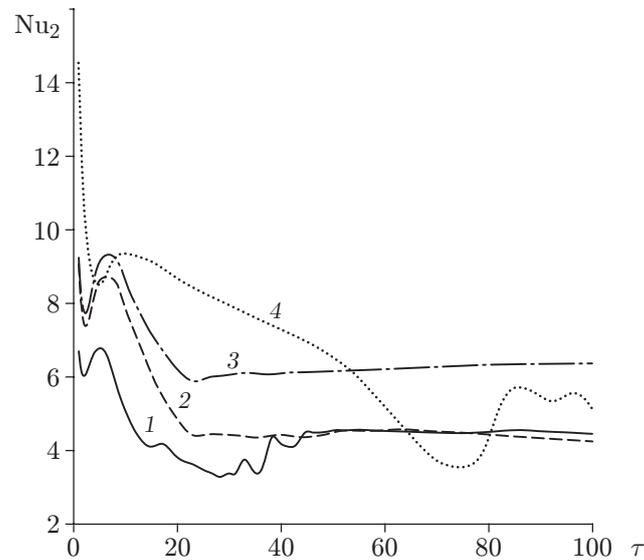


Рис. 4. Зависимость среднего числа Нуссельта от времени при $R = 5 \cdot 10^4$, $\Theta_2 = 1,0$:
 1 — $Pr = 0,1$, $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$; 2 — $Pr = 0,7$, $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$; 3 — $Pr = 0,7$, $\lambda_{2,1} = 4,3 \cdot 10^{-2}$;
 4 — $Pr = 7,0$, $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$

С течением времени в распределениях изотерм и линий тока появляется асимметрия, что обусловлено как воздействием окружающей среды, так и распространением возмущений от стенки цилиндра. При $\tau = 25$ (рис. 3, *e*) преобладает течение, обусловленное воздействием левого источника энергии. С увеличением времени вследствие прогрева полости и повышения температурного напора происходит увеличение скоростей движения жидкости, что приводит к увеличению характерной скорости конвективного движения. Также с течением времени прогревается стенка цилиндра в зоне расположения источников энергии, что способствует формированию пристенных “факелов”. При $\tau = 100$ наблюдается термогидродинамическое установление решения: формирование основной конвективной ячейки определяет дальнейшую циркуляцию жидкости в полости, а пристенный тепловой “факел” характеризует величину отвода тепла от источников энергии.

На рис. 4 представлены зависимости среднего числа Нуссельта $Nu_2 = \frac{1}{0,2\pi} \int_{1,6\pi}^{1,8\pi} \left| \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right|_{R=1} d\varphi$ от времени, числа Прандтля и относительной теплопроводности при $\Theta_2 = 1$ на поверхности правого тепловыделяющего элемента. Начальный временной этап $0 < \tau < 10$ характеризуется наличием локальных экстремумов среднего безразмерного коэффициента теплоотдачи Nu_2 , что объясняется условиями формирования и взаимодействия тепловых “факелов”. Дальнейшее увеличение τ при $Pr = 0,7$ приводит к тому, что среднее число Нуссельта становится постоянным. При $Pr = 0,1$; $7,0$ осцилляции наблюдаются в более широком временном диапазоне, что обусловлено изменением теплофизических характеристик среды.

Влияние числа Прандтля. Изменение числа Прандтля при $R = 10^5$, $\tau = 30$, $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_2 = 1,0$ приводит к изменению как картины течения, так и поля температуры. При $Pr = 7,0$ в момент времени $\tau = 30$ в полости формируется вихревая структура, характерная для начального этапа взаимодействия тепловых “факелов”. При $Pr = 0,1$ тот же момент времени соответствует промежуточной стадии формирования стационар-

ного режима течения и теплопереноса, а при $Pr = 0,7$ наблюдается увеличение размеров центральной конвективной ячейки и стабилизация термогидродинамической структуры течения. Полученная информация об изменении полей температуры и скорости может быть использована при выборе оптимальных рабочих режимов различных технологических систем, в которых естественная конвекция является основным механизмом переноса тепла (элементы радиоэлектронной аппаратуры и электронной техники, теплообменные аппараты, химические реакторы, солнечные коллекторы) [11–13, 19].

В результате проведенного анализа получены следующие корреляционные соотношения для среднего числа Нуссельта при $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$ и различных значениях числа Прандтля: $Nu_2 = 0,24R^{0,271}$ при $Pr = 0,1$, $Nu_2 = 1,22R^{0,109}$ при $Pr = 0,7$, $Nu_2 = 0,13R^{0,341}$ при $Pr = 7,0$.

Влияние числа Рэлея. На рис. 5 представлены линии тока, а также поля скорости и температуры при $Pr = 0,7$, $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_2 = 1,0$, $\tau = 100$ и различных значениях числа Рэлея. Увеличение числа Рэлея, характеризующего интенсивность тепловыделения источников, приводит к изменению термогидродинамических структур в полости. Размеры центральной конвективной ячейки, в которой поток движется по часовой стрелке, увеличива-



Рис. 5. Линии тока (вверху), поля скорости (посередине) и температуры (внизу) при $\tau = 100$, $Pr = 0,7$, $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_2 = 1,0$:
 а — $R = 10^4$, б — $R = 10^5$, в — $R = 5 \cdot 10^5$

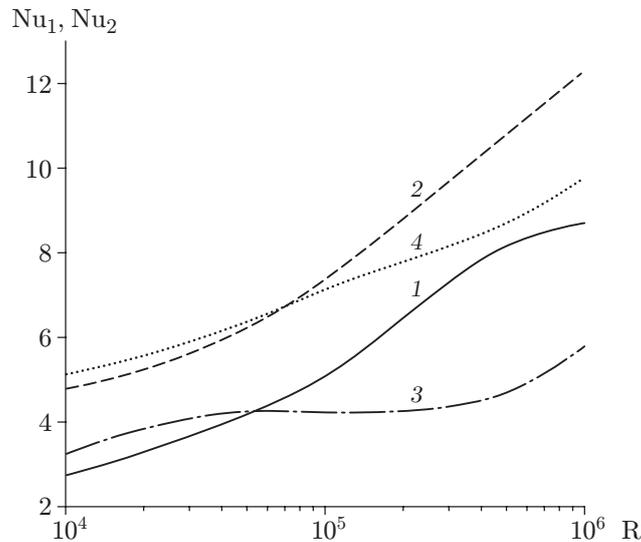


Рис. 6. Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Рэлея и относительной теплопроводности при $\tau = 100$, $Pr = 0,7$, $\Theta_2 = 1,0$:

1, 2 — левый источник энергии (1 — $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$, 2 — $\lambda_{2,1} = 4,3 \cdot 10^{-2}$); 3, 4 — правый источник энергии (3 — $\lambda_{2,1} = 5,7 \cdot 10^{-4}$, 4 — $\lambda_{2,1} = 4,3 \cdot 10^{-2}$)

ются, при этом существенно повышается скорость движения жидкости. С увеличением R размеры рециркуляционной зоны, расположенной в левой части полости, уменьшаются, при $R = 5 \cdot 10^5$ наблюдается диссипация этой вихревой структуры. Следует отметить, что в окрестности правого источника энергии зарождается область циркуляции, размеры которой увеличиваются с ростом числа Рэлея. Картину течения дополняет распределение изотерм. В момент времени $\tau = 100$ в полости доминирует тепловой “факел”, что обусловлено влиянием левого источника энергии. С увеличением числа Рэлея наблюдается приближение теплового “факела” к внутренней поверхности оболочки цилиндра, что обусловлено интенсификацией отвода тепла от нагревателя. При этом уменьшается толщина теплового пограничного слоя на поверхности оболочки.

Проведен анализ влияния числа Рэлея на значения среднего числа Нуссельта на поверхностях источников тепловыделения (рис. 6)

$$Nu_1 = \frac{1}{0,2\pi} \int_{1,2\pi}^{1,4\pi} \left| \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right|_{R=1} d\varphi, \quad Nu_2 = \frac{1}{0,2\pi} \int_{1,6\pi}^{1,8\pi} \left| \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right|_{R=1} d\varphi.$$

При фиксированном значении относительной теплопроводности $\lambda_{2,1}$ увеличение числа Рэлея приводит к росту среднего безразмерного коэффициента теплоотдачи на поверхностях источников энергии. Такое повышение среднего числа Нуссельта независимо от положения нагревателя обусловлено увеличением градиента температуры, т. е. более интенсивным отводом энергии с поверхности. Увеличение относительной теплопроводности, обусловленное уменьшением теплопроводности материала твердой оболочки цилиндра, приводит к росту среднего числа Нуссельта. Следует отметить, что при больших значениях числа Рэлея на поверхности левого источника энергии среднее число Нуссельта больше, чем на поверхности правого источника.

Влияние температуры правого источника энергии. Взаимодействие тепловых “факелов” источников энергии можно исследовать, изменяя температуру одного из этих источников. Например, при $\Theta_2 < \Theta_1 = 1,0$ в сечении $R = 0,94$ максимум температуры достигается

в зоне $\pi < \varphi < 3\pi/2$, что соответствует формированию конвективной ячейки, в которой поток движется по часовой стрелке. В случае $\Theta_2 > \Theta_1 = 1,0$ максимум температуры смещается в зону $\varphi > 3\pi/2$, вызывая циркуляционное движение потока в направлении против часовой стрелки. При $\Theta_2 = \Theta_1 = 1,0$ возможна реализация трех вариантов движения жидкости, обусловленных наличием начальных возмущений [28].

Наблюдаемые изменения режимов течения и теплопереноса описывают влияние также на распределения среднего безразмерного коэффициента теплоотдачи на поверхностях источников энергии. При $\Theta_2 < 1,2$ выполняется соотношение вида $Nu_1 > Nu_2$, что характеризует наиболее интенсивный отвод тепла с поверхности левого нагревателя. В случае $\Theta_2 \geq 1,2$, наоборот, выполняется соотношение $Nu_1 < Nu_2$, что характеризует наиболее интенсивный отвод тепла с поверхности правого нагревателя.

Следует отметить, что асимметрия течения при симметричном расположении источников энергии и их одинаковой температуре ($\Theta_2 = \Theta_1 = 1,0$) обусловлена сопряженной постановкой задачи, а также воздействием окружающей среды (конвективный теплообмен на части внешней поверхности стенки цилиндра).

Выполнен анализ влияния сеточных параметров на характер распределения скорости, линий тока и температуры. Установлено, что изменение размеров разностной сетки ($100 \times 100, 200 \times 200, 300 \times 300$) не приводит к изменению структуры течения. На начальных этапах формируется симметричная картина; с увеличением времени возникает асимметрия, что обусловлено также распространением гидродинамических возмущений от стенок цилиндра и продвижением фронта пониженной температуры со стороны окружающей среды вглубь полости.

Для обоснования указанных выше причин возникновения асимметрии проведен анализ нестационарных режимов естественной конвекции в отсутствие как твердых стенок, так и воздействия внешней среды. Для описания нестационарных режимов естественной конвекции в газовой полости используется та же математическая модель (уравнения (1)–(3)).

Для сформулированной тестовой задачи (1)–(3) начальные условия имеют вид

$$\Psi(R, \varphi, 0) = \Omega(R, \varphi, 0) = \Theta(R, \varphi, 0) = 0.$$

На источниках энергии в течение всего процесса конвекции $\Theta = \Theta_1 = \Theta_2 = 1,0$.

Кроме того, задаются следующие граничные условия:

— на границе $R = 1$ вне источников энергии выполняются условия

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0, \quad \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0;$$

— на поверхности источников тепловыделения ($R = 1, 1,2\pi \leq \varphi \leq 1,4\pi$ и $R = 1, 1,6\pi \leq \varphi \leq 1,8\pi$) задаются условия

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0, \quad \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2}, \quad \Theta = 1,0;$$

— на границах $\varphi = 0, 2\pi$ ставятся условия периодичности искомых функций

$$\begin{aligned} \Psi|_{\varphi=0} = \Psi|_{\varphi=2\pi}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}|_{\varphi=2\pi}, \quad \Omega|_{\varphi=0} = \Omega|_{\varphi=2\pi}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}|_{\varphi=2\pi}, \\ \Theta|_{\varphi=0} = \Theta|_{\varphi=2\pi}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}|_{\varphi=2\pi}. \end{aligned}$$

В результате решения поставленной начально-краевой задачи на разностной сетке размером 100×100 получены симметричные распределения линий тока и изотерм в различные моменты времени. Это позволяет сделать вывод, что причинами отсутствия симметрии

в распределениях термогидродинамических характеристик в условиях сопряженной постановки задачи являются наличие теплопроводной твердой оболочки и влияние окружающей среды.

Заключение. Численно решена задача о сопряженной естественной конвекции в замкнутом горизонтальном цилиндре при наличии локальных источников тепловыделения в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. Получены распределения линий тока, поля скорости и температуры в достаточно широких диапазонах значений определяющих параметров: $10^4 \leq R \leq 10^6$, $Pr = 0,1; 0,7; 7,0$, $\lambda_{2,1} = 3,7 \cdot 10^{-2}; 5,7 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_2 = 0; 0,5; 1,0; 2,0$, $0 \leq \tau \leq 100$. Проведен анализ влияния чисел Рэлея и Прандтля, времени, относительной теплопроводности, а также температуры источников энергии на локальные термогидродинамические характеристики (линии тока, поля скорости и температуры) и на интегральный параметр (среднее число Нуссельта на поверхности тепловыделяющих элементов). Определено влияние числа Прандтля на распределения скорости и температуры, а также на среднее число Нуссельта. Получены обобщенные зависимости коэффициента теплообмена от чисел Рэлея и Прандтля, учитывающие пространственно-временную динамику рассматриваемого процесса. Использование таких соотношений позволит достаточно быстро и корректно проводить теплофизический анализ сложных технологических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bairi A., Garcia de Maria J. M., Laraqi N., Alilat N.** Free convection generated in an enclosure by alternate heated bands. Experimental and numerical study adapted to electronics thermal control // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2008. V. 29. P. 1337–1346.
2. **Кузнецов Г. В., Шеремет М. А.** Математическое моделирование сопряженной смешанной конвекции в прямоугольной области с источником тепла // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 69–81.
3. **Sarkar S., Dalal A., Biswas G.** Mixed convective heat transfer from two identical square cylinders in cross flow at $Re = 100$ // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2010. V. 53. P. 2628–2642.
4. **Corvaro F., Paroncini M.** An experimental study of natural convection in a differentially heated cavity through a 2D-PIV system // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2009. V. 52. P. 355–365.
5. **Atayilmaz S. O., Teke I.** Experimental and numerical study of the natural convection from a heated horizontal cylinder // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2009. V. 36. P. 731–738.
6. **Calcagni B., Marsili F., Paroncini M.** Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below // Appl. Therm. Engng. 2005. V. 25. P. 2522–2531.
7. **Oosthuizen P. H., Paul J. T.** Natural convection in a rectangular enclosure with two heated sections on the lower surface // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2005. V. 26. P. 587–596.
8. **Muftuoglu A., Bilgen E.** Conjugate heat transfer in open cavities with a discrete heater at its optimized position // Intern. J. Heat Mass Transf. 2008. V. 51. P. 779–788.
9. **Bilgen E., Balkaya A.** Natural convection on discrete heaters in a square enclosure with ventilation ports // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2008. V. 29. P. 1182–1189.
10. **Кузнецов Г. В., Шеремет М. А.** Численное моделирование температурных полей узлов и блоков радиоэлектронной аппаратуры и электронной техники // Микроэлектроника. 2009. Т. 38, № 5. С. 344–352.
11. **Джалурия Й.** Естественная конвекция: Тепло- и массообмен. М.: Мир, 1983.
12. **Соковишин Ю. А.** Введение в теорию свободно-конвективного теплообмена / Ю. А. Соковишин, О. Г. Мартыненко. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982.
13. **Jaluria Y.** Design and optimization of thermal systems. Boca Raton: CRC Press, 2008.

14. **Fushinobu K., Hijikata K., Kurosaki Y.** Heat transfer regime map for electronic devices cooling // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1996. V. 39. P. 3139–3145.
15. **Галлямов А. К., Юкин А. В., Мастобаев Б. Н., Муталов Д. И.** Использование гибких электронагревательных лент для разогрева нефтепродуктов в железнодорожных цистернах // Трансп. и хранение нефтепродуктов и углеводород. сырья. 1988. № 3. С. 19–20.
16. **Шамсутдинов Э. В., Халитова Г. Р.** Исследование процессов теплообмена при различных теплогидравлических режимах подогрева вязких нефтепродуктов в резервуарах хранения // Изв. РАН. Энергетика. 2008. № 5. С. 44–50.
17. **Шеремет М. А.** Математическое моделирование естественной конвекции в замкнутой квадратной полости с теплопроводными стенками конечной толщины // Физ.-мат. 2011. № 1/2. С. 3–8.
18. **Шеремет М. А.** Сопряженные задачи естественной конвекции. Замкнутые области с локальными источниками тепловыделения. Берлин: LAP LAMBERT Acad. Publ., 2011.
19. **Варламов Р. Г.** Справочник конструктора РЭА: Общие принципы конструирования. М.: Сов. радио, 1980.
20. **Шеремет М. А.** Нестационарная сопряженная задача термогравитационной конвекции в горизонтальном цилиндре // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2010. № 2. С. 102–111.
21. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967.
22. **Лыков А. В.** Теплообмен: Справ. М.: Энергия, 1978.
23. **Пасконов В. М.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов. М.: Наука, 1984.
24. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
25. **Shi Y., Zhao T. S., Guo Z. L.** Finite difference-based lattice Boltzmann simulation of natural convection heat transfer in a horizontal concentric annulus // Comput. Fluids. 2006. V. 35. P. 1–15.
26. **Kuehn T. H., Goldstein R. J.** An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli // J. Heat Transfer. 1978. V. 100. P. 635–640.
27. **Shahraki F.** Modeling of buoyancy-driven flow and heat transfer for air in a horizontal annulus: effects of vertical eccentricity and temperature-dependent properties // Numer. Heat Transfer. Pt A. 2002. V. 42. P. 603–621.
28. **Гершуни Г. З.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. М.: Наука, 1972.

*Поступила в редакцию 2/VII 2010 г.,
в окончательном варианте — 24/X 2011 г.*
