

УДК 532.51

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ ВЯЗКОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

О. Ю. Цвелодуб, С. Н. Саматов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: tsvel@itp.nsc.ru

Рассмотрены волны на поверхности тонкой пленки вязкой диэлектрической жидкости, стекающей по внутренней поверхности одной из обкладок плоского конденсатора, к которому приложено переменное напряжение. Показано, что в случае длинных волн объемные силы, действующие со стороны неоднородного электрического поля, пренебрежимо малы и влияние поля сводится к влиянию добавочного давления на поверхность пленки. В длинноволновом приближении получено модельное уравнение для определения отклонения толщины пленки от невозмущенного значения. Приведены некоторые численные решения полученного уравнения.

Ключевые слова: стекающая пленка, переменное электрическое поле, диэлектрик, модельное уравнение, волновые режимы.

1. Математическая модель. Рассмотрим течение тонкой пленки вязкой диэлектрической жидкости, стекающей по внутренней поверхности одной из обкладок плоского конденсатора, расположенного вертикально в поле силы тяжести. Схема течения и принятая система координат показаны на рис. 1. К обкладкам конденсатора приложено переменное напряжение $V(t) = V_0 f(t)$ ($f(t)$ — произвольная безразмерная гладкая функция времени, максимум которой равен единице). В длинноволновом приближении в случае малых расходов решение данной задачи сводится к решению одного уравнения для определения отклонения толщины пленки от невозмущенного значения.

Система уравнений Навье — Стокса, описывающая данное течение, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} + \frac{\mathbf{f}}{\rho}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Здесь \mathbf{v} — скорость; p — давление; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость; t — время; \mathbf{g} — ускорение свободного падения; \mathbf{f} — сила, действующая на единицу объема диэлектрической жидкости со стороны электрического поля [1]:

$$\mathbf{f} = \frac{\varepsilon_0}{2} \nabla \left[E_1^2 \rho \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{\varepsilon_0}{2} E_1^2 \nabla \varepsilon_1,$$

ε_0 — электрическая постоянная; ε_1 — диэлектрическая проницаемость жидкости; E_1 — напряженность электрического поля в жидкости.

Полагая, что процесс является изотермическим, а жидкость однородной, и вводя обозначение $\chi_1 = \rho (\partial \varepsilon_1 / \partial \rho)_T$, получаем

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0 \chi_1 \nabla E_1^2 / 2.$$

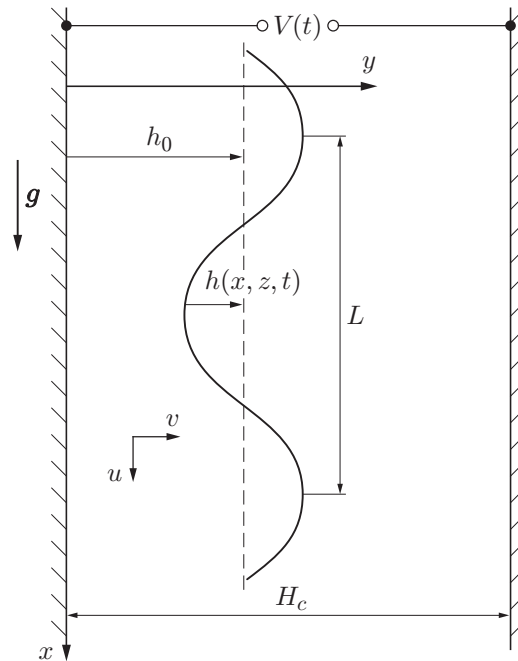


Рис. 1. Схема течения

На поверхности обкладки, по которой течет пленка, выполняется граничное условие

$$y = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

на свободной поверхности пленки — кинематическое условие

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + w \frac{\partial h}{\partial z} = v \quad (3)$$

и динамические условия

$$y = h_0 + h: \quad \sigma_{ik}^{(1)} n_k + (\sigma/R) \delta_{ik} n_k = \sigma_{ik}^{(2)} n_k. \quad (4)$$

Здесь h_0 — толщина пленки при безволновом течении; h — отклонение толщины пленки от невозмущенного значения; u, v, w — компоненты вектора скорости вдоль осей x, y, z соответственно; n_i — компоненты нормали к поверхности пленки $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = (-\partial h/\partial x, 1, -\partial h/\partial z)/\sqrt{1 + (\partial h/\partial x)^2 + (\partial h/\partial z)^2}$; $1/R \approx -(\partial^2 h/\partial x^2 + \partial^2 h/\partial z^2)$ — средняя кривизна (поверхность пленки полагается слабоискривленной, а отклонение h — малым); σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости; $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} - \varepsilon_0 \times (\varepsilon - \chi) E^2 \delta_{ik}/2 + E_i D_k$ — тензор напряжений; σ'_{ik} — тензор вязких напряжений; индекс “(1)” соответствует жидкости, “(2)” — газу над пленкой; $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ — индукция электрического поля.

Система уравнений (1) с граничными условиями (2)–(4) допускает решение с плоской свободной границей постоянной толщины

$$u(y) \equiv U = \frac{g}{2\nu} (2h_0 y - y^2) = U_s \left(2 \frac{y}{h_0} - \left(\frac{y}{h_0} \right)^2 \right),$$

$$P = p_2 - \frac{\varepsilon_0 V_0^2 [\varepsilon_1^2 (\varepsilon_2 + \chi_2) - \varepsilon_2^2 (\varepsilon_1 + \chi_1)]}{2[(H_c - h_0)\varepsilon_1 + \varepsilon_2 h_0]^2} f^2(t).$$

Здесь U_s — скорость поверхности пленки; H_c — расстояние между обкладками конденсатора; p_2 — давление газа над пленкой; ε_2 — диэлектрическая проницаемость газа; величина χ_2 , характеризующая газ, аналогична величине χ_1 .

Однако легко показать, что такое течение неустойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям и в результате эволюции этих возмущений становится волновым.

Целью данной работы является получение упрощенной модели, позволяющей качественно описать нелинейные волновые режимы в стекающей пленке диэлектрической жидкости.

Считая отклонение толщины пленки от невозмущенного значения $h(x, z, t)$ малым, в квазистационарном приближении найдем распределение потенциала между пластинами конденсатора. Обозначая через $\varphi_1(x, y, z, t)$ потенциал в жидкой пленке, а через $\varphi_2(x, y, z, t)$ потенциал в газе, получаем следующую краевую задачу:

$$0 \leq y \leq h_0 + h: \quad \Delta\varphi_1 = 0, \quad h_0 + h \leq y \leq H_c: \quad \Delta\varphi_2 = 0. \quad (5)$$

На обкладках конденсатора выполняются граничные условия

$$y = 0: \quad \varphi_1 = 0, \quad y = H_c: \quad \varphi_2 = V(t), \quad (6)$$

на поверхности пленки — условия

$$y = h_0 + h: \quad \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \nabla\varphi_1 = \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \nabla\varphi_2, \quad \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \nabla\varphi_1 = \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \nabla\varphi_2, \quad \varepsilon_1 \mathbf{n} \cdot \nabla\varphi_1 = \varepsilon_2 \mathbf{n} \cdot \nabla\varphi_2. \quad (7)$$

В (5)–(7) $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$; $\boldsymbol{\tau}_1 = (1, \partial h/\partial x, 0)/\sqrt{1 + (\partial h/\partial x)^2}$, $\boldsymbol{\tau}_2 = (0, \partial h/\partial z, 1)/\sqrt{1 + (\partial h/\partial z)^2}$ — касательные векторы к поверхности пленки, лежащие в плоскостях xy и zy соответственно.

Используя параметры h_0 и λ в качестве масштабов в направлениях y и x, z соответственно, V_0 — в качестве масштаба потенциала и полагая, что безразмерная величина h равна $\varepsilon h'$ (далее штрих опускается), уравнения (5) с граничными условиями (6), (7) запишем в безразмерном виде с точностью до членов порядка $\varepsilon = h_0/\lambda$ включительно:

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 1 + \varepsilon h: \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \quad 1 + \varepsilon h \leq y \leq H_c: \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0, \\ y = 0: \quad \varphi_1 = 0, \quad y = H_c: \quad \varphi_2 = f(t); \\ y = 1 + \varepsilon h: \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Разлагая φ_1 и φ_2 в ряды по малому параметру ε и перенося граничные условия (8) на невозмущенный уровень $y = 1$, в первом приближении получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\varepsilon_2 f(t) y}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(1 + \varepsilon \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} h \right), \\ \varphi_2 &= \frac{\varepsilon_1 f(t)(y - H_c)}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(1 + \varepsilon \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} h \right) + f(t). \end{aligned}$$

Здесь H_c — безразмерное (в единицах h_0) расстояние между обкладками конденсатора.

Используя в дополнение к выбранным параметрам λ/U_s , U_s , $\rho g h_0$ в качестве масштабов времени, скорости и давления и сохраняя члены порядка не выше ε , уравнения движения пленки запишем в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{\text{Fr}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Fr}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + W_{el} A(t) \varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{\text{Fr}} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + W_{el} A(t) \varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial z},$$

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Здесь $\text{Re} = U_s h_0 / \nu$ — число Рейнольдса; $\text{Fr} = U_s^2 / (g h_0)$ — число Фруда; $W_{el} = \varepsilon_0 \chi_1 V_0^2 / (\rho U_s^2 h_0^2)$; $A(t) = \varepsilon_2^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) f^2(t) / [(H_c - 1) \varepsilon_1 + \varepsilon_2]^3$. В первом и третьем уравнениях системы (9) последние слагаемые, пропорциональные ε^2 , оставлены до выяснения порядка величины произведения $W_{el} A(t)$.

Принимая величину V_0/h_0 в качестве масштаба напряженности электрического поля и учитывая, что $E_2^2 = E_{2n}^2 + E_{2\tau}^2$, а в силу граничных условий $\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}$, $E_{2\tau} = E_{1\tau}$, граничное условие (4) в проекциях на нормаль \mathbf{n} запишем в безразмерном виде (членами порядка ε^2 и выше пренебрегаем)

$$y = 1 + \varepsilon h: \quad p = p_2 - \varepsilon \text{We} \varepsilon^2 \Delta h - B_{el} \frac{\varepsilon_1^2 (\varepsilon_2 + \chi_2) - \varepsilon_2^2 (\varepsilon_1 + \chi_1)}{\varepsilon_2^2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (10)$$

где $\text{We} = \sigma / (\rho g h_0^2)$ — число Вебера; $B_{el} = \varepsilon_0 V_0^2 / (2 \rho g h_0^3)$.

Так как для любого касательного к поверхности пленки вектора $\boldsymbol{\tau}$ справедливо равенство $\varepsilon_0 \varepsilon E_i E_k n_k \tau_i = E_i D_k n_k \tau_i = E_\tau D_n$ и в силу граничных условий для компонент электрического поля $E_\tau^{(1)} D_n^{(1)} = E_\tau^{(2)} D_n^{(2)}$, граничное условие (4) в проекциях на направления $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ принимает вид

$$\sigma'_{ik} n_k \tau_{1i} = 0, \quad \sigma'_{ik} n_k \tau_{2i} = 0. \quad (11)$$

После обезразмеривания граничные условия (11) записываются в виде (членами порядка ε^2 и выше пренебрегаем)

$$y = 1 + \varepsilon h: \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

При $h = 0$ система (9) с условиями прилипания (2) и условиями (10), (12) на свободной границе представляет собой задачу о невозмущенном течении, решение которой имеет вид

$$v = w = 0, \quad u \equiv U_0 = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \left(y - \frac{y^2}{2} \right), \quad p \equiv P_0 = p_2 - P_{el} f^2(t).$$

Здесь

$$P_{el} = B_{el} \frac{\varepsilon_1^2 (\varepsilon_2 + \chi_2) - \varepsilon_2^2 (\varepsilon_1 + \chi_1)}{[(H_c - 1) \varepsilon_1 + \varepsilon_2]^2}$$

максимальная безразмерная величина скачка электрического давления. Кинематическое условие на свободной поверхности записывается в виде

$$y = 1 + \varepsilon h: \quad \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + w \frac{\partial h}{\partial z} \right) = v. \quad (13)$$

Полагая $u = U_0 + \varepsilon u'$, $w = \varepsilon w'$, $v = \varepsilon^2 v'$, $p = P_0 + \varepsilon p'$, систему (9) с граничными условиями (10), (12), (13) представим в виде

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) = -\frac{\varepsilon}{\text{Fr}} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}, \quad 0 = -\frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2},$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial w'}{\partial x} \right) = -\frac{\varepsilon}{\text{Fr}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0; \quad (14)$$

$$y = 1 + \varepsilon h: \quad p' = -\text{We} \varepsilon^2 \Delta h - \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} P_{el} f^2(t) h -$$

$$- \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^2 P_{el} f^2(t) h^2 \varepsilon + 2 \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial v'}{\partial y} \varepsilon, \quad (15)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial u'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + (U_0 + \varepsilon u') \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon w' \frac{\partial h}{\partial z} = v'.$$

Для оценки порядка величины слагаемых, пропорциональных P_{el} , нужно знать явное выражение χ_1 , которое зависит от типа жидкости. Если диэлектрическая жидкость состоит из неполярных молекул, то можно использовать приближение Клаузиуса — Моссотти [2]

$$\frac{3(\varepsilon_1 - 1)}{\varepsilon_1 + 2} = \frac{\alpha N_A}{m_0} \rho,$$

где α — поляризуемость молекулы; N_A — число Авогадро; m_0 — масса молекулы. Тогда

$$\chi_1 = \rho \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \rho} = \frac{(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_1 + 2)}{3}.$$

Для неполярных жидкостей $\varepsilon_1 \approx 2$, откуда следует $\chi_1 \approx 4/3$.

Для полярной жидкости используем приближение Онзагера, согласно которому [2]

$$\frac{(\varepsilon_1 - n_1^2)(2\varepsilon_1 + n_1^2)}{\varepsilon_1(n_1^2 + 2)^2} = \frac{\rho p^2}{9kTm_0\varepsilon_0}$$

(n_1 — показатель преломления жидкости; p — собственный дипольный момент молекулы; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура). Отсюда следует

$$\chi_1 = \rho \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \rho} = \varepsilon_1 \frac{(1 - n_1^2/\varepsilon_1)(2 + n_1^2/\varepsilon_1)}{2 + (n_1^2/\varepsilon_1)^2}.$$

Так как у полярных жидкостей $n_1 \ll \varepsilon_1$, то для них $\chi_1 \approx \varepsilon_1$.

Что касается газа над пленкой, то, в случае если его плотность невелика, $\varepsilon_2 \approx 1$ и $\chi_2 \approx 0$.

Выполненные оценки показывают, что для тонких пленок как неполярных жидкостей, так и полярных объемная электрическая сила пренебрежимо мала (поэтому в системе (14) слагаемые, пропорциональные $W_{el}A(t)$, отсутствуют). Этот вывод справедлив и для слагаемых, пропорциональных P_{el} , в граничном условии (15), если жидкость состоит из неполярных молекул. Если жидкость полярная, то эти слагаемые по величине одного порядка с лапласовым давлением и их необходимо оставить.

В силу последнего замечания далее будем считать, что жидкость состоит из полярных молекул (вода, спирты и т. д.). Переносим граничные условия (15) на невозмущенный уровень $y = 1$, получаем

$$y = 1: \quad p' + \varepsilon \frac{\partial p'}{\partial y} h = -\text{We} \varepsilon^2 \Delta h - \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} P_{el} f^2(t) h -$$

$$- \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^2 P_{el} f^2(t) h^2 \varepsilon + 2 \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial v'}{\partial y} \varepsilon,$$

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} h + \frac{\partial u'}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} h = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} h = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (U_0 + \varepsilon u') \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon w' \frac{\partial h}{\partial z} = v' + \varepsilon \frac{\partial v'}{\partial y} h.$$

Решение задачи (14), (16) будем искать в виде

$$(u', v', w', p') = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (u_n, v_n, w_n, p_n).$$

В нулевом по ε приближении из (14) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial p_0}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Из граничных условий (16) получаем

$$\begin{aligned} y = 1: \quad p_0 &= -\text{We} \varepsilon^2 \Delta h - \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} P_{el} f^2(t) h, \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} h, & \frac{\partial w_0}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial h}{\partial t} + U_0 \frac{\partial h}{\partial x} &= v_0. \end{aligned} \quad (17)$$

В этом приближении решение задачи имеет вид

$$p_0 = -\text{We} \varepsilon^2 \Delta h - \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} P_{el} f^2(t) h, \quad u_0 = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} y h, \quad w_0 = 0, \quad v_0 = -\frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{y^2}{2} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Здесь учтено, что $\partial^2 U_0 / \partial y^2 = -\text{Re} / \text{Fr}$.

Так как $U_s = (1/2) \text{Re} / \text{Fr} = 1$, то, подставляя полученное решение в кинематическое условие (17), находим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + 2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (18)$$

Таким образом, в нулевом по ε приближении электрическое поле не оказывает влияния на эволюцию возмущений толщины пленки, а их скорость равна удвоенной скорости поверхности пленки при безволновом течении. Вводя “медленное” время $\tau_1 = \varepsilon t$ и представляя зависимость всех величин от времени в виде $(u, v, w, p, h) = (u(x, z, t, \tau_1), v(x, z, t, \tau_1), w(x, z, t, \tau_1), p(x, z, t, \tau_1), h(x, z, t, \tau_1))$, в следующем приближении по ε для уравнений движения имеем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} &= \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \text{Re} \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial p_1}{\partial y} &= \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} &= \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{\partial p_0}{\partial z}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В этом приближении граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} p_1 &= -\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^2 P_{el} f^2(t) h^2 + 2 \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial v_0}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} h = 0, & \frac{\partial w_1}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} h = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial \tau_1} + u_0 \frac{\partial h}{\partial x} &= v_1 + \frac{\partial v_0}{\partial y} h. \end{aligned} \quad (20)$$

Система (19) с граничными условиями (20) легко интегрируется, соответствующие выкладки вследствие их громоздкости в данной работе не приводятся. При этом для v_1 при $y = 1$ получаем выражение

$$v_1(1) = \frac{3}{10} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{5}{12} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} - \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} P_{el} f^2(t) \Delta h - \frac{2}{3} \operatorname{We} \varepsilon^2 \Delta^2 h. \quad (21)$$

Подставляя (21) в кинематическое условие (20), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \tau_1} + 4h \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{3}{10} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{5}{12} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} + \\ + \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} P_{el} f^2(t) \Delta h + \frac{2}{3} \operatorname{We} \varepsilon^2 \Delta^2 h = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2.$$

С учетом уравнения (18) уравнение (22) записывается в виде

$$\frac{\partial h}{\partial \tau_1} + 4h \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{8}{15} \operatorname{Re} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} P_{el} F(\tau_1) \Delta h + \frac{2}{3} \operatorname{We} \varepsilon^2 \Delta^2 h = 0, \quad (23)$$

где $F(\tau_1) = f^2(\tau_1/\varepsilon)$.

Таким образом, уравнение (23) описывает эволюцию пространственных возмущений на диэлектрической пленке жидкости, стекающей по вертикальной плоскости. Конкретизируем выбранный характерный продольный масштаб λ . Потребуем, чтобы в уравнении (23) модули коэффициентов при третьем и пятом слагаемых были равны. Тогда для используемого в разложении малого параметра ε имеем

$$\varepsilon = \sqrt{4 \operatorname{Re} / (5 \operatorname{We})},$$

соответственно характерный продольный размер возмущений определяется равенством

$$\lambda = \sqrt{5 \operatorname{We} / (4 \operatorname{Re})} h_0.$$

Из этих соотношений следует, что предположение о длинноволновом характере рассматриваемых возмущений справедливо при больших значениях числа Вебера.

В результате с помощью замены

$$h = aH, \quad \tau = a\tau_1, \quad a = (8/15) \operatorname{Re}$$

уравнение (23) преобразуется к виду

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + C\Phi(\tau) \Delta H + \Delta^2 H = 0, \quad (24)$$

где

$$C = \frac{5}{2 \operatorname{Re}} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(H_c - 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2} P_{el}.$$

Из (18) следует, что уравнение (24) записано в системе отсчета, движущейся относительно стенки со скоростью, равной удвоенной скорости течения пленки на невозмущенной свободной поверхности. В настоящей работе рассматриваются только двумерные решения $H = H(x, \tau)$. Тогда уравнение (24) принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + (1 + C\Phi(\tau)) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0. \quad (25)$$

В случае если функция $\Phi(\tau)$ является синусоидальной, уравнение (25) совпадает с уравнением, полученным в [3, 4] при рассмотрении пленочных течений других типов. Если разность потенциалов между обкладками конденсатора равна нулю, то $C = 0$ и уравнение (25) переходит в уравнение, описывающее эволюцию двумерных возмущений в обычной вязкой пленке жидкости, стекающей по вертикальной стенке. В настоящее время это уравнение известно как уравнение Курамото — Сивашинского, несмотря на то что для описания пленочных течений оно впервые получено в [5]. Исследованию этого уравнения посвящено большое количество работ, из которых следует, что оно имеет чрезвычайно разнообразные решения.

2. Метод решения. Если в уравнении (25) пренебречь нелинейным членом, то оно будет описывать устойчивость исходного течения по отношению к бесконечно малым возмущениям. Следует отметить, что для уравнения Курамото — Сивашинского ($C = 0$) нейтральное волновое число $\alpha_n = 1$, неустойчивыми являются возмущения с волновыми числами $\alpha < \alpha_n = 1$.

Для анализа нелинейных периодических решений уравнение (25) решалось численно. Решение представлялось в виде пространственного ряда Фурье, гармоники которого являются функциями времени:

$$H(x, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(\tau) \exp(in\alpha x). \quad (26)$$

В силу вещественности H для гармоник H_n справедливо соотношение $H_{-n} = H_n^*$ (звездочка означает операцию комплексного сопряжения).

Подставляя (26) в (25), получаем бесконечную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для гармоник H_n . Обрывая ряд (26), т. е. полагая, что все гармоники начиная с некоторого номера N равны нулю, получаем конечномерное приближение этой системы

$$\frac{dH_n}{d\tau} = \alpha^2 n^2 (1 + C\Phi(\tau) - \alpha^2 n^2) H_n - 4i\alpha n \sum_{m=N-n}^N H_m H_{n-m}, \quad (27)$$

$$n = 0, 1, \dots, N.$$

Из (27) следует, что уравнение для нулевой гармоники тривиально, т. е. выполняется для любого произвольного постоянного значения H_0 . В дальнейшем будем строить решения, в которых эта константа равна нулю.

Разделяя в (27) вещественные и мнимые части, получаем систему $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений для $2N$ неизвестных функций.

Система (27) решалась численно одним из методов Рунге — Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования и контролируемой погрешностью. Число гармоник выбиралось таким, чтобы выполнялось соотношение $|H_N| / \max |H_n| < 10^{-4}$.

3. Результаты расчетов. Как отмечено выше, при $C = 0$ уравнение (25) переходит в известное уравнение Курамото — Сивашинского. Множество его решений чрезвычайно разнообразно. Например, в [5] показано, что при значении волнового числа $\alpha = \alpha_n = 1$ (нейтральное волновое число) от тривиального решения $H = 0$ ответвляется семейство периодических решений уравнения Курамото — Сивашинского, существующее при $\alpha \leq 0,4979$. В [6, 7] получен каскад бифуркаций, в результате которого возникают все более сложные решения. В данной работе рассматривается эволюция только тех решений уравнения (25), для которых начальные возмущения в случае $C = 0$ эволюционировали в стационарно бегущие решения первого семейства уравнения Курамото — Сивашинского.

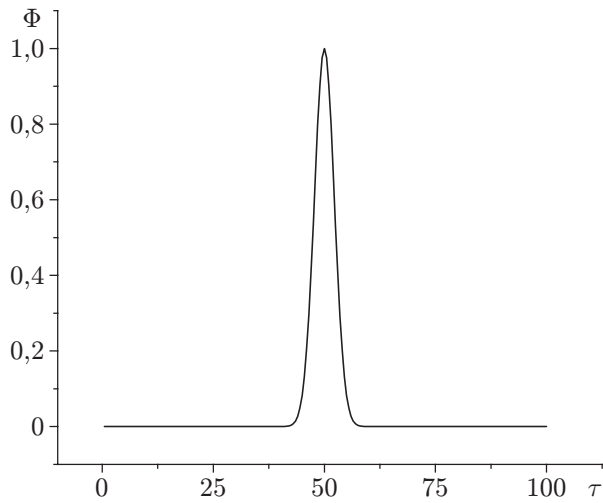


Рис. 2

Рис. 2. Вид функции $\Phi(\tau)$ в (25) при $C = 1, \beta = 0,1$

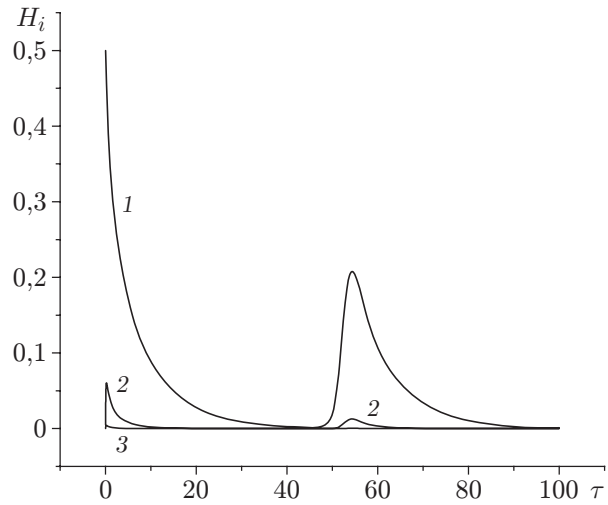


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость амплитуд первых трех гармоник от времени при $\alpha = 1,05$:

1 — H_1 ; 2 — H_2 ; 3 — H_3

В качестве функции $\Phi(\tau)$ выбирался локализованный сигнал в виде гауссиана (рис. 2)

$$\Phi(\tau) = \exp(-\beta(\tau - 50)^2),$$

сдвинутый относительно начала отсчета времени, так чтобы начальное возмущение не оказывало влияния на дальнейшую эволюцию решения. В расчетах полагалось $C = 1, \beta = 0,1$. При таких значениях параметров вне интервала $40 < \tau < 50$ значения функции $\Phi(\tau)$ близки к нулю и уравнение (25) переходит в уравнение Курамото — Сивашинского.

В проведенных расчетах начальные значения вещественной и мнимой частей первой гармоники H_1 полагались равными 0,5 и 0 соответственно. Начальные значения амплитуд остальных гармоник полагались равными нулю.

На рис. 3 представлены зависимости амплитуд первых трех гармоник от времени для волнового числа $\alpha = 1,05$. Амплитуды остальных гармоник не превышают нескольких процентов максимального значения амплитуды третьей гармоники. В случае уравнения Курамото — Сивашинского значение $\alpha = 1,05$ находится в области устойчивости, поэтому все гармоники со временем затухают. Быстрый рост гармоник наблюдается, только когда функция $\Phi(\tau)$ значительно отличается от нуля. При $\tau > 50$ происходит затухание гармоник вплоть до нуля. На рис. 4 представлены волновые профили поверхности для трех характерных моментов времени. Несмотря на то что значение функции $\Phi(\tau)$ достигает максимума в момент времени $\tau = 50$ (см. рис. 2), максимум на волновом профиле поверхности достигается позднее (ср. кривые 1 и 2). Так как в любой момент времени первая гармоника существенно больше второй, форма волнового профиля всегда близка к синусоидальной. При $\tau > 90$ решение практически обращается в нуль (кривая 3).

На рис. 5 представлены зависимости амплитуд первых трех гармоник от времени при $\alpha = 0,8$. Видно, что при $\Phi(\tau) = 0$ все зависимости достаточно быстро принимают постоянные значения, т. е. формируется стационарный волновой режим. Так как и в этом случае стационарное значение амплитуды первой гармоники существенно больше значения амплитуды второй гармоники, форма волнового профиля близка к синусоидальной (кривая 1 на рис. 6). На интервале времени, в котором функция $\Phi(\tau)$ существенно отлична от нуля,

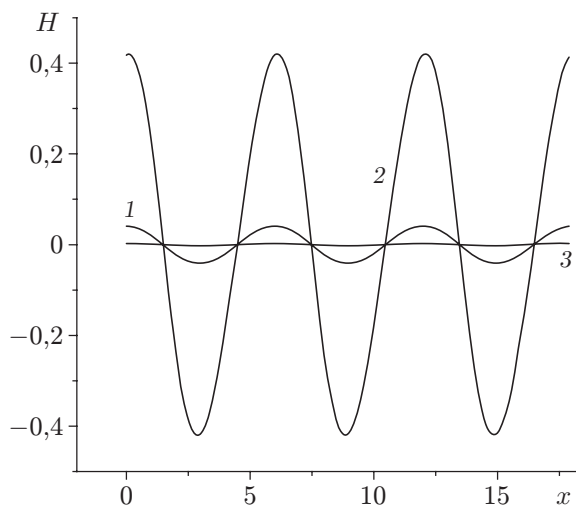


Рис. 4

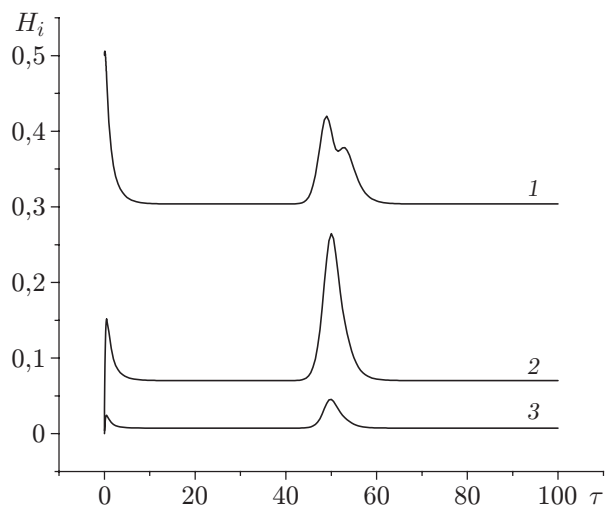


Рис. 5

Рис. 4. Волновые профили поверхности в различные моменты времени ($\alpha = 1,05$):
 1 — $\tau = 50$; 2 — $\tau = 54,5$; 3 — $\tau = 100$

Рис. 5. Зависимость амплитуд первых трех гармоник от времени при $\alpha = 0,8$:
 1 — H_1 ; 2 — H_2 ; 3 — H_3

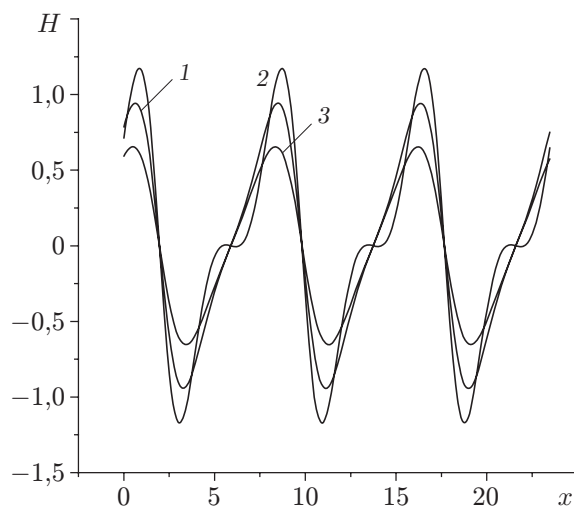


Рис. 6. Волновые профили поверхности в различные моменты времени ($\alpha = 0,8$):
 1 — $\tau = 1$, 2 — $\tau = 50$, 3 — $\tau = 100$

наблюдается всплеск всех трех гармоник, причем в процентном соотношении значения второй и третьей гармоник отклоняются от стационарных значений более существенно, чем значение первой гармоники. В результате в окрестности максимума функции $\Phi(\tau)$ форма волнового профиля существенно отличается от синусоидальной (кривая 2 на рис. 6). Наличие локальных минимума и максимума у амплитуды первой гармоники обусловлено влиянием двух эффектов: увеличения амплитуды вследствие линейной неустойчивости и ее уменьшения вследствие нелинейного воздействия остальных гармоник. С увеличением времени все гармоники принимают прежние постоянные значения. Соответствующая этим гармоникам форма волнового профиля представлена на рис. 6 (кривая 3).

Как показали расчеты, при волновых числах, достаточно близких к нейтральному волновому числу, поведение представленных решений является характерным.

4. Выводы. Полученное в работе уравнение (24) можно использовать при исследовании воздействия переменного электрического поля на слабонелинейные возмущения в пленочном течении диэлектрической вязкой жидкости. Как показали расчеты, даже в случае двумерных возмущений, возникающих в результате ограниченного по времени воздействия, могут наблюдаться волновые режимы, отсутствующие в случае свободного стекания пленки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1982.
2. Сканиви Г. И. Физика диэлектриков (область слабых полей). М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
3. Саматов С. Н., Цвелодуб О. Ю. Волны на пленке вязкой жидкости, стекающей по вибрирующей вертикальной плоскости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 90–98.
4. Саматов С. Н., Цвелодуб О. Ю. Волновые режимы на пленке вязкой ферромагнитной жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 3. С. 76–84.
5. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 3. С. 28–34.
6. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. О стационарно бегущих решениях эволюционного уравнения для возмущений в активно-диссипативной среде. Новосибирск, 1988. (Препр. / Ин-т теплофизики СО АН СССР; № 188-88).
7. Tsvlodub O. Y., Trifonov Y. Y. On steady-state travelling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // Phisica D. 1989. V. 36, N 3. P. 255–269.

*Поступила в редакцию 19/III 2009 г.,
в окончательном варианте — 9/VII 2009 г.*